L'apprendimento della Matematica: il resoconto di un dibattito già avviato, mai concluso!

Emilio Ambrisi

1 Il 2007: un anno buono per la matematica

Quale dibattito! Non certo quello che si svolgerà in questa sede né certo quello che sempre ha animato i nostri convegni perchè un dibattito sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica c'è sempre stato e sarebbe difficile condensarlo. Ed è un dibattito sempre aperto, connaturato alla stessa storia della matematica che è sostanzialmente anche la storia del suo insegnamento/apprendimento. Allora, a quale dibattito mi riferisco! Di quale dibattito mi propongo di farvi un resoconto. Di quello che c'è stato nel corso di quest'anno, il 2007, e che ha ruotato sostanzialmente attorno a due momenti molto significativi: il primo, quello della annuale relazione del governatore della Banca d'Italia a fine maggio; il secondo legato alle dichiarazioni del ministro Fioroni riguardo agli esiti dell'insegnamento ed in particolare all'entità dei debiti formativi riportati dagli allievi della scuola secondaria superiore.

Perché è importante la relazione del Governatore Draghi! Perché per la prima volta l'insegnamento della matematica ed i suoi risultati sono stati oggetto di una riflessione da parte del mondo della finanza e dell'economia in una delle occasioni istituzionali di maggior prestigio come è quella della presentazione della relazione annuale del Governatore. Il Governatore ha preso spunto dai risultati delle indagini OCSE/PISA che come è noto rivelano per l'Italia un livello di apprendimento molto basso nelle comparazioni con gli altri paesi. Si tratta di risultati già ampiamente noti e discussi. La novità è stata che ne parlasse Draghi. Egli ha correlato i risultati OCSE/PISA al livello di sviluppo del paese e alle differenze Nord/Sud con la conclusione che sviluppo del Paese e divari territoriali di occupazione, partecipazione e disoccupazione, la stessa democrazia vissuta, dipendono in misura sostanziale dalla dotazione di conoscenze nelle macroaree del Paese e tra queste fondamentali sono le conoscenze e competenze matematiche. La stampa ha dato ampio rilievo a questa parte della relazione Draghi che conteneva tra l'altro anche interpretazioni che pur plausibili non appaiono però corrispondere alla realtà dei fatti e cioè che il divario Nord Centro Sud per gli alunni quindicenni è tale che il livello delle conoscenze matematiche di un ragazzo del Nord con 4 in pagella è in media uguale a quello di un ragazzo del Centro con 6 e superiore a quello di uno studente del Sud con 7. Si tratta appunto di risultati che appaiono poco attendibili legati anche alle particolari modalità e contenuti dell'indagine. Quale è però il risultato della relazione Draghi che vale la pena di sottolineare: il fatto che nella collettività si è rafforzata la convinzione che apprendere la matematica è essenziale per lo sviluppo economico della Nazione e per il futuro della democrazia.

Un risultato dunque importante perché in un momento di crisi generale è servito a fugare ogni possibile dubbio circa ciò che è essenziale e ciò che non lo è nella formazione dell'uomo e del cittadino. Guardate, se io dico: "*la matematica è l'unica cosa al mondo che va sempre bene*", voi che dite? Certamente non smentite! La matematica è quella. Il prodotto più elevato nella nostra mente, il modello della razionalità, per certi versi quel prodotto della nostra mente che non è cadùco, né transeunte ma, come nell'espressione di Platone, *ciò che sempre è che non nasce e non perisce*. Dunque *la matematica è l'unica cosa al mondo che va sempre bene*. La frase è del marchese De Condorcet: la scrisse, nel 1773, in risposta ad una lettera dell'abate Turgot che si era dimesso da ministro di Luigi XVI e si lamentava che il sistema stava precipitando (siamo a soli 16 anni dalla rivoluzione francese).

Se però la matematica è andata sempre bene non così il suo insegnamento. Non è andato mai tanto bene se ne dovette accorgere forse già Pitagora se intese organizzare la sua scuola sul silenzio. Il giovane alunno prima di poter parlare doveva concentrarsi nell'ascolto, ascoltare la viva voce del maestro e questo primo periodo di ascolto variava a seconda del soggetto, da due a tre anni. E gli stessi Elementi di Euclide sono un'opera didattica: un'esigenza già allora! Costituirono il modello della organizzazione disciplinare, e ancora oggi forniscono l'esempio di un metodo di insegnamento che parte dalle nozioni prime e gradatamente, per gradi, sviluppa le conoscenze e i risultati in una scala che va dai più semplici a quelli più complessi. La storia è piena di testimonianze sulle difficoltà di insegnare e apprendere la matematica: una testimonianza da ricordare è quella che ci dà il grande *Leopardi*, grande anche come studente perché vi si è dedicato: è *l'eroe dello studio*. La matematica la capisce e avrebbe voluto saperne di più ma non ha avuto maestri bravi e scopre che neppure i libri sono scritti in modo chiaro perchè l'autore non riesce a calarsi e mettersi nei piedi dello studente per guidarne i passi. In una pagina del suo Zibaldone è più drastico, scrive: *Escludo dal bene scrivere i professori di matematica e fisica!*

La matematica per essere appresa e capita ha bisogno di concentrazione, di impegno, a volte pieno e totale. Questo è quello che sempre è stato detto. Allora se è così difficile perché insegnarla? Non potremo perlomeno fare a meno di insegnarla a tutti? Forse una delle risposte più belle ed efficaci fu data nei programmi della scuola elementare del 1955 "*una persona è tanto più libera quanto più sa misurare e commisurarsi*". Questo era scritto nella premessa. E la posizione non è mutata ed è esplicitamente ricordata nei documenti ufficiali sull'educazione redatti a livello europeo e nel recente provvedimento di innalzamento dell'obbligo d'istruzione a 10 anni. Il relativo decreto ministeriale specifica, declina, le competenze, capacità e conoscenze che deve possedere il giovane a conclusione dell'obbligo. Tali saperi e competenze sono riferiti a solo quattro assi culturali e tra questi insieme a quelli scientifico-tecnologico, storico-sociale e dei linguaggi, c'è quello matematico distinto quindi da quello scientifico-tecnologico a segno di un insegnamento e apprendimento della matematica che sono irrinunciabili perché costituiscono una parte del patrimonio culturale di una persona che è ineliminabile, essenziale per la costruzione di percorsi di apprendimento orientati all'acquisizione delle *competenze chiave* per la cittadinanza attiva. La legge sull'obbligo d'istruzione a dieci anni (che poi è la legge delega del dicembre 2006) prevede anche interventi per l'innalzamento culturale degli adulti e su questo si sta ancora lavorando: il documento preciserà quelle competenze e conoscenze matematiche che si reputa necessario che ogni adulto acquisisca. E lo stesso lavoro si è cominciato a pensare per le competenze, abilità e conoscenze a conclusione dei percorsi dei licei, degli istituti tecnici e professionali.

2 Quale il nostro compito?

Se è così, se apprendere la matematica si presenta come un fatto essenziale, un diritto/dovere sul piano individuale e collettivo, essenziale cioè per la crescita della persona e ugualmente importante per lo sviluppo e il vivere democratico, allora quale il nostro compito? Dobbiamo impegnarci per renderne l'insegnamento più efficace e contribuire così ad elevarne i livelli di apprendimento. E che ce ne sia bisogno al di là dei risultati delle indagini IEA o PISA/OCSE, basta guardare ai risultati conseguiti dagli alunni nelle nostre scuole. La metà degli alunni ammessi con debito alla classe successiva ha un debito in matematica. E questo non è un fatto da poco. *La matematica* —è stato scritto— *unisce in ignoranza l'Italia da Nord (44,8% degli studenti con debito) a Sud (43,2%) passando per il Centro (44,4%) e le isole (43,9%) e accomuna trasversalmente gli indirizzi di ogni ordine e grado, in una forchetta che va dal 51,6% dello scientifico al 41,2% dei professionali.*
È questo che ha portato il ministro Fioroni a dire che siamo di fronte ad una emergenza formativa per la matematica e dichiarare l'intento di fronteggiare tale emergenza con la costituzione di un apposito comitato tecnico che studi il problema e dica che cosa fare. Che fare?

È naturale che a questo punto il dibattito c'è stato, ed è stato vivace: ha tenuto banco sulle pagine dei quotidiani per tutta l'estate.

Le posizioni sono molto varie ciascuna rivolta a trovare una causa.

C'è chi afferma che tutto dipende dalle scuole elementari e quindi bisogna cominciare da lì preoccupandosi che siano date buone basi ovvero che i primi germi educativi siano quelli giusti e c'è invece chi dice che il problema è nella scuola secondaria di primo grado ove a insegnare la matematica ci sono laureati non specifici e ciò per colpa della cattedra di Scienze Matematiche, Chimiche, Fisiche e Naturali (che non avrebbe più ragione di esistere) ma che per altri rappresenta tuttora un eccellente concreto strumento per pensare alle scienze in modo integrato.

C'è ancora chi lamenta la scarsità di risorse tecnologiche nelle nostre scuole così come più in generale quella dei laboratori scientifici e c'è chi se la prende con i programmi d'insegnamento che sono antichi e sorpassati (... Per i licei... Eppure leggete la premessa ai programmi del 1945 su www.matmedia.it. Molto bella!)
C'è chi dice che manca il tempo! Il fatto è che non sono solo i docenti a dirlo, ma anche gli alunni. Anche a loro manca il tempo per soddisfare tutti gli impegni che la collettività richiede.
C'è ancora chi individua nella televisione, ma anche nell'editoria e in genere nei *media* una debole azione di trasmissione di **germi** di apprendimento scientifico e in particolare matematico.
Ci sono quelli che propongono maggiori attenzioni all'organizzazione di *festival* e di gare e di olimpiadi (tantissime!... anche un affare economico di tutto rispetto!).
C'è ancora chi richiama allo spirito antiscientifico dell'idealismo italiano di Croce e di Gentile, critiche peraltro che non sono pochi a non condividere e chi vuole addebitare ad un dominante **spirito clericale** il deludente apprendimento della matematica e più in generale delle scienze (dimenticando che è stato proprio il sentimento religioso il più potente alleato della ricerca matematica, ad esempio nel Seicento!).

A fare da cornice alle divergenti linee discorsive è però il problema degli insegnanti e della loro formazione, quella iniziale affidata alle università e che non pare abbia soddisfatto molto e quella in servizio sulla quale si discute tanto, forse mai abbastanza e che non vede modelli che soddisfino... in primo luogo gli insegnanti. Quello che oggi si ripete è che: la scuola buona la fanno insegnanti "buoni" per la qual cosa occorre che i docenti siano posti nella condizione di essere buoni e quindi occorre che:

1. **sia buono il riconoscimento sociale della funzione docente**;
2. **siano buone le prospettive di carriera**;
3. **siano buone le condizioni "interne" di assolvimento dei doveri**;
4. **sia buona l'amministrazione della scuola (governo nazionale e regionale)**;
5. **siano buone le formazioni, iniziali e in servizio**.

È venuto certamente il tempo di pensare ad una seria valorizzazione della funzione docente attraverso la valorizzazione del loro lavoro quindi non progetti di formazione eventualmente elaborati all'esterno della comunità scolastica, ma occasioni di incontro. Occasioni di riflessione e di confronto tra docenti delle medesime discipline, su contenuti e metodi, su *che cosa si insegna*, su *come si insegna* e su quali ne sono i risultati. Questo è il modo più naturale, concreto e rispettoso degli stessi docenti per promuovere la loro crescita professionale. È una delle vie da seguire per realizzare quella che è più in generale la valorizzazione della funzione docente che da tempo è agognata e dare concreto impulso al progressivo innalzamento dei livelli di apprendimento conseguiti nelle nostre scuole. È stato scritto che la *crescita professionale* dei docenti deve essere *strettamente connessa alla pratica di insegnamento* e che *occorre dunque pensare ad adeguate soluzioni organizzative* ***dentro la scuola***, soluzioni organizzative all'interno degli Uffici Scolastici provinciali e regionali che attivino forme e modalità sistematiche di confronto a livello territoriale estendendo altresì il rapporto collaborativo all'università, ai centri di ricerca e alle istituzioni culturali, alle associazioni disciplinari. L'ottica dovrebbe essere quella di pensare e vedere le scuole e i territori come ***ambienti matetici*** — secondo la bella definizione data dallo studioso Seymour Papert, già collaboratore di J. Piaget a Ginevra e poi ricercatore al M.I.T. di Boston — ambienti cioè ricchi di germi portatori di apprendimento. Ambienti dove scienza ed educazione si integrano e si compenetrano: dove concetti, idee e procedure, metodi e tecnologie hanno una loro naturalezza di espressione, comprensibilità e utilizzazione; ambienti la cui realizzazione è la grande sfida che hanno di fronte a sé le società e più specificamente i sistemi scolastici. L'impegno potrebbe essere quello di tendere a creare un clima generale di attenzione e in particolare di chiamare alla partecipazione attenta e collettiva un poco tutti per aiutare le scuole nella loro funzione di luoghi specifici dell'apprendimento, per aiutarle a porsi come noi tutti vorremmo: ambienti matetici per eccellenza. Un clima e un'atmosfera che — se mi si consente un riferimento bibliografico — lo colgo in un best seller di qualche tempo fa, *Dal Big bang ai buchi neri* di Stephen Hawking il fisico teorico definito un *cervello puro* per la grave forma di sclerosi da cui è affetto. Come fisico teorico Hawking chiarisce di essere impegnato nella ricerca di una *G.T.U.* ovvero una grande teoria unificata dell'universo o *teoria completa*, impegnato cioè a trovare le equazioni che potrebbero, in analogia alle equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico, spiegare ogni sorta di fenomeni che avvengono nell'universo. Bene una volta fatto questo, la scienza, in particolare la Fisica, è finita. Che ci rimane da fare? Educare! La conclusione del bel libro di Hawking, educativa e formativa, è questa: *Se però perverremo a scoprire una teoria completa, essa dovrebbe essere col tempo comprensibile a tutti nei suoi principi generali, e non solo a pochi scienziati. Noi tutti — filosofi, scienziati e gente comune — dovremmo allora essere in grado di partecipare alla discussione del problema del perché noi e il mondo esistiamo.*

Tali citazioni e riflessioni non possono non richiamare alla mente quel meraviglioso affresco di Raffaello che è la *Scuola di Atene*, quell'immagine stupenda che è

trasposizione pittorica di ogni ideale di scuola e di scienza, di società come collettività educante. Un punto di vista che ci richiama a un'altra immagine che vorremmo pervadesse la Scuola e che Italo Calvino descrive in modo pregnante nelle sue *Lezioni Americane* ovvero tra gli aspetti caratteristici da conservare nella Letteratura del terzo millennio: *il cristallo e la fiamma*. Due forme di bellezza perfetta da cui lo sguardo non sa staccarsi, da cui l'azione delle scuole non dovrebbe mai allontanarsi: il Cristallo, immagine d'invarianza e di regolarità di strutture specifiche, la Fiamma, immagine di costanza d'una forma globale esteriore, malgrado l'incessante agitazione interna. La razionalità geometrica e insieme, la passione e l'entusiasmo, che sempre dovrebbero caratterizzare e dominare l'azione dei docenti nella bella e preziosa arte d'insegnare.

A tali fondamentali aspetti o strumenti si aggiungono quelli più interni alla disciplina e che consistono in un modo diverso di pensare alla matematica e al suo insegnamento. Un risultato importante e significativo è questo: la matematica non è immobile, autoreferenziale, legata a ciò che non nasce e non perisce, a-storica e senza storia. Specie nell'insegnamento va vista, considerata e appresa come *un'entità socio-storico-culturale* che gode di proprietà uniche: prima di tutto il consenso unanime, secondo di essere il luogo di compossibilità e dominio delle grandi opposizioni dialettiche. Il resoconto dunque non finisce qua ma si allarga agli aspetti interni e un modo efficace per farlo è quello di riflettere sui contenuti degli esami di stato, cioè sui contenuti della prova scritta di matematica nei licei scientifici perché essi danno un'idea precisa di quello che si insegna e di quello che gli allievi apprendono.

3 Gli esami e il tema di matematica nei licei

Occorre premettere che gli esami di stato della sessione 2007 più chiaramente che negli anni scorsi si sono posti come momento culminante e ineliminabile dell'organizzazione, dell'attività e della finalità della scuola nonché come occasione privilegiata di riscontro dei livelli di efficacia di esse e che la prova scritta ha alimentato un dibattito ampio che presenta spunti di rilevante interesse. È mancata purtroppo la rilevazione effettuata dal servizio in rete **Matmedia**[1] che negli anni scorsi ha rappresentato la voce dei commissari d'esame raccogliendone i giudizi e le riflessioni.

Fino al 1970 la prova consisteva di un unico problema, poi si è data la possibilità di operare delle scelte: risolvere due problemi fra i tre o quattro proposti. Dal 2001 infine la prova è articolata in problemi e quesiti: si richiede di risolvere un problema e di rispondere a cinque quesiti. La struttura attuale appare decisamente la più adeguata per gli indubbi successi: ha offerto un più preciso riferimento agli insegnanti, ristabilito per gli alunni un più saldo legame con gli argomenti di studio ed eliminato il compito consegnato in bianco.

Dal 2001, cioè, sono stati compiuti significativi passi di avvicinamento della matematica alla realtà dell'insegnamento e delle classi di alunni, un avvicinamento della dote personale di intuizione e di intelligenza, alle doti di diligenza e impegno di studio. Un lavoro di avvicinamento favorito anche delle indagini annualmente realizzate attraverso il sito Matmedia. Indagini preziose non solo per la quantità e qualità delle informazioni fornite quanto perchè occasioni per i docenti di essere chiamati a riflettere sulla prova, a darne un giudizio, a confrontarsi con il colleghi. In definitiva un lavoro prezioso per la creazione di quel clima positivo per l'apprendimento che è obiettivo di ogni sana azione posta in essere dall'Amministrazione Scolastica. E questo purtroppo, come già si è detto, è mancato. Ciò che non è mancato però è il dibattito tra docenti e esperti.

Un dibattito importante perché ha toccato la prova scritta agli esami di stato nella sua caratteristica di meta di riferimento dell'azione didattica dei docenti. Un ruolo che ha sempre avuto, tant'è che i problemi assegnati nel corso degli anni non solo sono stati costantemente riportati su tutti i libri di testo, a mò di raccolta per le necessarie esercitazioni, ma ancora ne costituiscono una parte rilevante ai fini dell'organizzazione didattica, sia del testo che del lavoro dell'insegnante che lo adotta. **Quindi la riflessione sulle prove d'esame si è posta nuovamente quale strumento essenziale per il lavoro di definizione di ciò che è importante che gli allievi sappiano di matematica e sappiano fare con la matematica. Favorirla e incentivarla è importante per arrivare a definire "Indicazioni Nazionali per il curricolo" nei licei che siano chiare e condivise.**

[1] www.matmedia.it

L'analisi può partire da ciò che si assegna: che cosa veramente si ritiene importante e significativo accertare attraverso la prova che gli insegnanti abbiano trattato e gli alunni sappiano? E che cosa invece sarebbe il caso di tagliare o cosa varrebbe la pena di aggiungere?

4 A che punto siamo?

Nulla è senza storia e il tema scritto di matematica alla "maturità" ne ha una sua di storia, bella e ricca. Il primo tema per i licei scientifici è del 1924, un problema di applicazione dell'algebra alla geometria con discussione. Già nel 1934, *O. Chisini* pubblicava una lettera di un suo collega, commissario all'esame di maturità, a lui indirizzata : «*gli esami di ottobre t'avranno confermato che di soluzioni geometriche dirette dei problemi, alla maturità scientifica non si può parlare. I candidati non ne hanno la più lontana idea: i migliori credono che al più tutto si riduca a costruire graficamente le radici dell'equazione di secondo grado inerente al problema.* ***Tartinville*** *impera… e quando i giovani mettono in azione quell'ordigno buono a tutto ogni visione geometrica del problema sparisce…* ».

Tantinville continuò ad imperare ancora per più decenni poi cominciò a farsi strada, soprattutto per il rafforzamento dell'insegnamento della geometria analitica, il metodo grafico. Dal 1970 in poi anche la discussione dei problemi ha lasciato il campo allo studio di funzione: dalla *trinomite* alla *funzionite*. La situazione degli anni 2000 è ancora diversa e il nome e il metodo di Tartinville sono sconosciuti a non pochi neo laureati in matematica. La prova scritta agli esami di stato conclusivi del liceo scientifico è in linea con quello che si fa nella maggior parte dei Paesi più sviluppati anche se con alcune differenze che ci vedono più vicini a taluni Paesi per gli aspetti di *matematizzazione*, per le applicazioni dell'algebra alla geometria, del calcolo integrale e di quello numerico e meno vicini alle posizioni della matematica moderna che vige in altri Paesi, ad esempio quelli dell'Est.

Nella comparazione internazionale, ci sono quesiti giudicati di difficoltà molto bassa, ma altre questioni sono nel contempo giudicate molto difficoltose.[2] E la stessa varietà di giudizi c'è anche da noi dove però, l'articolazione in problemi e quesiti, pone al riparo dall'antica accusa rivolta ai temi assegnati alla prova scritta di essere fatti più per gli esperti che per gli alunni, "*talora superiori alla capacità media degli allievi anche di scolaresche buone*".[3]

---

[2] Significativo è al riguardo quanto sottolineato dai proff. Popescu e Dinga (Romania) i quali rilevano che nei nostri temi c'è più geometria e più legami con la realtà, ma meno algebra moderna (vedi il sito www.matmedia.it).

[3] Atti della Mathesis, anni 1953 e 1954, ed Zanichelli, pag. 93.

Tale varietà di giudizi è stata tra i motivi che hanno finora determinato la scelta ministeriale di rimettere l'attribuzione del punteggio finale della prova alla valutazione della commissione giudicatrice e ciò ci differenzia dalla maggioranza dei Paesi ove per ogni problema o quesito è anche indicato il punteggio che esso comporta, se risolto. Ciò che ci differenzia ancora è però la possibilità, lasciata agli studenti, di scegliere fra quesiti e fra problemi (e anche questa distinzione tra problemi e quesiti pare sia solo nostra) e in quest'ultima scelta si vede anche come lo studio della funzione sia ancora il più gradito e atteso a segno che un'equilibrata gestione di argomenti e metodi è sempre difficile da ottenersi e che le esagerazioni di moda sono sempre in agguato. Sono queste esagerazioni che avevano mosso a combattere la *trinomite* e non solo.

5 La questione del Syllabus

Il tema scritto agli esami di stato costituisce una meta, si è detto, un traguardo dell'azione didattica. Ma è qualcosa che si pone più sul piano normativo che su quello dei contenuti. Mancano cioè o sono molto sfuocate le indicazioni atte a individuare e definire la collocazione di questa meta da parte di chi la deve raggiungere. Si può stilare l'elenco di questi contenuti? È quello che chiedono i docenti come servizio alla loro opera: avere un *syllabus*, una lista di conoscenze e competenze chiaramente prescritte da tener presenti quali traguardi ed obiettivi dell'azione formativa. E questo equivale in definitiva a dare le "*indicazioni per il curricolo*" per il licei. Ed è un'idea quanto mai stimolante ma non nuova nella storia del nostro sistema. Infatti analoga situazione si visse negli anni cinquanta del secolo scorso. Malgrado i tentativi, l'impegno delle associazioni e di illustri matematici e pedagogisti non era stato possibile rinnovare i programmi d'insegnamento nei licei: mai accordo è risultato più difficile da ottenersi! Bene, di fronte a programmi giudicati già vetusti (allora!), non adeguati ai tempi, che fare? La risposta fu esemplare: fissare le prove e gli argomenti degli esami di maturità classica e scientifica e di abilitazione magistrale e tecnica. Nacque così il decreto del ministro Medici (pubblicato sul supp. ord. della G.U. del 30 settembre 1959, n. 235). Un esempio unico, rilevante: in **poche paginette** è detto quello che oggi pare non si sappia dire in 100 pagine. Si dice finanche come interrogare oltre che su che cosa interrogare. Una modalità che ancora regge.

Per la maturità scientifica è così stabilito:

Prova scritta

Risoluzione di un problema riguardante la materia degli esami orali.
(Durata della prova: 5 ore).

Prova orale

Una parte della prova sarà di carattere applicativo e consisterà nella risoluzione — sotto la guida dell'esaminatore — di esercizi su argomenti del programma dell'ultima

classe e del programma indicato nella parte 1^a dell'elenco appresso riportato.
Un'altra parte della prova consisterà nell'esposizione di concetti fondamentali (definizioni, enunciazione di proprietà e dimostrazione logica di qualcuna di queste) e verterà sull'intero programma dell'ultima classe e su quello della parte 2^a dell'elenco.

Che cosa elenca, il decreto Medici?

Parte 1^a

- **Equazioni e sistemi di equazioni di 2° grado o riconducibili al 2° grado.**
- **Equazioni parametriche di 2° grado; confronto delle radici con uno o due numeri dati.**
- **Applicazioni dell'algebra alla geometria.**
- **Formule fondamentali di goniometria e di trigonometria piana. Identità ed equazioni goniometriche.**
- **Limiti delle funzioni.**
- **Derivata di una funzione. Regole di derivazione delle funzioni razionali, dei radicali, delle funzioni goniometriche.**
- **Rappresentazione grafica delle funzioni. Equazione della tangente alla curva immagine di una funzione della quale si sappia determinare la derivata.**

Parte 2^a

- **Rette e piani nello spazio; ortogonalità e parallelismo; rette sghembe. Angoloidi.**
- **Concetto di eguaglianza tra figure spaziali.**
- **Equivalenza dei solidi.**

Chi legge il decreto Medici non può non coglierne l'analogia con le discussioni attuali sulle conoscenze essenziali, su ciò che la società ritiene che sia importante che gli alunni sappiano a conclusione del loro ciclo di studio e indipendentemente dal percorso didattico seguito. Perchè è questo che si delinea e si traccia. E ampliando la lettura del decreto a quello che è prescritto per la *maturità classica*, si ha il quadro dettagliato di ciò che di matematica si riteneva importante nella formazione dei giovani e, stante quel significato di maturità, per l'accesso all'università. Per la maturità classica il decreto del '59 recita:
«Una parte dell'esame sarà di carattere applicativo e consisterà nella risoluzione — sotto la guida dell'esaminatore — di esercizi su argomenti del programma della terza classe e anche sul calcolo dei radicali, sulle equazioni e sui sistemi di 2° grado e sui logaritmi.

Un'altra parte dell'esame consisterà nell'esposizione di concetti fondamentali (definizioni, enunciazione di proprietà e dimostrazione logica di qualcuna di queste) e verterà sull'intero programma della terza classe e anche su qualcuno degli argomenti relativi alle rette e ai piani nello spazio».

Poichè il programma della terza classe del liceo classico è sostanzialmente trigonometria e geometria solida, il decreto del 1959 dà l'insieme delle conoscenze matematiche che debbono costituire le mete dell'azione didattica e la loro acquisizione la condizione per l'accesso all'università e tale sarà ancora per qualche decennio. Un insieme di conoscenze caratterizzate da una finalità che è sostanzialmente formativa e non funzionale a superare l'esame di Analisi del primo anno d'università che sempre di più appare l'obiettivo dominante, gradito ad alunni e genitori e perseguito acriticamente dai docenti.

Il decreto Medici costituisce, un documento certamente importante perchè pietra di paragone per valutare i cambiamenti e l'entità dei cambiamenti, ma al momento della sua pubblicazione non suscitò particolari commenti o discussioni perchè declinava con sinteticità e chiarezza quegli argomenti e questioni che erano condivisi, consolidati nella pratica didattica e sui libri di testo.[4]
È questa una caratteristica che certamente bisogna augurarsi che "Le indicazioni per il curricolo" dei licei possano possedere. La stessa natura di essere "indicazioni nazionali" impone di non farle nascere dalla penna di pochi esperti (come è avvenuto per quelle dell'infanzia e del primo ciclo) ma far sì che, per contenuti e formulazioni, siano il distillato di un pensiero collettivo che ha trovato le forme adatte a costituirsi e manifestarsi.

6 La discussione sui temi di matematica del 2007

Vi presento subito un problemino che figura tra i quesiti.[5]
Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

Appare a tutti che il quesito non richiede conoscenze matematiche che vanno al di là del biennio ed è simile a quelli del P.I.S.A./OCSE per gli aspetti riguardanti la

[4] Tant'è che il documento riportava *le equazioni parametriche di 2° grado e il confronto delle radici con uno o due numeri dat*i che non erano menzionate esplicitamente nei programmi vigenti. Ma nessuno se ne meravigliò più di tanto perchè argomento alla base della discussione dei problemi di algebra applicata alla geometria che costituiva la parte conclusiva dei programmi del quinto anno quasi a sottolinearne la funzione di obiettivo didattico e formativo cui gli stessi miravano.

[5] Per comodità del lettore, si riportano in allegato le tracce di Matematica, sia per il corso di Ordinamento che per il corso Sperimentale, assegnate all'Esame di Stato di Liceo Scientifico.

realtà. Quale il risultato:

- non pare che sia stato granchè affrontato dagli alunni
- molti professori l'hanno giudicato banale, quasi osceno

Eppure è nella sostanza, anzi con qualche richiesta in più, uno dei quesiti inseriti tra quelli proposti nelle batterie di item utilizzati per il concorso di ammissione alle SSIS lo scorso anno. Utilizzato cioè per la selezione di laureati (laurea magistrale).

La formulazione del quesito nelle selezioni per la SSIS 2006 è la seguente:

Il prezzo P di un titolo azionario subisce un aumento del 5% ed una diminuzione del 5% (ma non si sa in quale ordine). Alla fine il prezzo del titolo è:

A) **sicuramente maggiore di P**

B) **sicuramente minore di P**

C) **uguale a P**

D) **maggiore di P se e solo se l'aumento è avvenuto prima della diminuzione**

E) **maggiore di P se e solo se la diminuzione è avvenuta prima dell'aumento**

I risultati delle prove sono importanti ed è bene rifletterci e discuterne. Quindi, il 2007 anche da questo punto di vista ha un bilancio positivo il cui resoconto può essere centrato sulle seguenti importanti questioni.

a) Risolvere problemi

Uno dei due problemi proposti non comportava l'uso di particolari strumenti matematici; esigeva, però, una maturità, nella impostazione e nella risoluzione, che pur in linea con quanto sempre si è chiesto, è apparsa talora mancare. Ciò indica che nei cambiamenti che si sono verificati **qualcosa si è perso** e non tanto nell'acquisizione delle tecniche *del come si fa* una derivata o un integrale quanto proprio in uno dei settori che più si vorrebbero curare, quello della *risoluzione dei problemi*. Un settore disastrato, tanto da investire anche i docenti ed è questo forse all'origine dell'accusa di *anacronismo* che taluni hanno rivolto alla prova. Se è così, è bene essere anacronistici! Altrimenti perché proporre la risoluzione di un problema, distinguendo tra *problemi* e *quesiti*? Pare che quel problema, analogo, si ripete, a quelli che sempre sono stati proposti e che si trovano su tutti i manuali, abbia posto più di un commissario (privo d'esperienza d'insegnamento nel liceo scientifico) nella condizione di non saper dare indicazione utili ai candidati o addirittura di averle date sbagliate. I docenti una volta dovevano risolvere un problema proposto negli esami di abilitazione all'insegnamento e nei concorsi a cattedre. E a questo si preparavano. La possibilità di conquistare l'abilitazione o la cattedra in modo diverso ha certo inciso sulle abilità dei docenti nel "saper" risolvere problemi. A maggior ragione questo avviene per gli studenti. **Bisogna invitare le SSIS ad essere attente alla questione: dedicare un poco di tempo del percorso di formazione alla soluzione di problemi.**

b) Graduare le difficoltà

Nelle discussioni, l'articolazione della prova in problemi e quesiti si ritiene valida ma si chiede che le domande siano graduate per difficoltà crescenti. È questa veramente una questione da offrire alla riflessione e alla discussione collettiva. Le "difficoltà" sono legate, naturalmente, all'opportunità di apprendere, a ciò che si fa, e a come si fa, ma non hanno, in genere, un carattere oggettivo, uguale per tutti e per sempre. Ciò che è facile per Giovanni non è detto che lo sia per Maria e, ad esempio, la discussione dei problemi riscontrava trent'anni fa meno difficoltà di quanto possa riscontrarne adesso. **Oggi, però, è ritenuto più facile studiare una funzione o anche calcolare l'integrale di una funzione** giudicata difficile qualche decennio fa.

c) La Valutazione della prova

Il problema di offrire una "griglia" di valutazione è strettamente collegato al punto precedente perchè assegnare pesi o punteggi che possano essere validi per tutti, per tutte le realtà scolastiche equivale a graduare le difficoltà dei singoli punti in cui sono articolati problemi e quesiti. Una cosa abbastanza difficile da realizzare specie senza un lavoro di preparazione e di convincimento. La proposta di una griglia di valutazione nazionale è stata, peraltro, bocciata dai docenti nelle indagini che il servizio "Matmedia" ha effettuato dal 2001 al 2005 rivendicando alla commissione giudicatrice la piena e completa valutazione degli elaborati.

Tra i precedenti utili alla discussione c'è un'esperienza realizzata nel 2004 di costituzione di gruppi di docenti che entro il giorno successivo alla prova scritta attribuivano indici di difficoltà alle varie parti del tema e proponevano ai colleghi loro griglie di valutazione. L'esperienza fu realizzata e partecipata attraverso il servizio Matmedia con la collaborazione della Mathesise e si ha intenzione di ripeterla per gli esami della sessione 2008.

d) L'uso del calcolatore

Consentire o no l'uso delle macchine programmabili e grafiche? È anche questa una questione dibattuta molto e da tempo e che molto dipende, ovviamente, da che cosa si vuole valutare che gli allievi sappiano e sappiano fare.

L'eliminazione del divieto a utilizzarle in sede d'esame deve essere soprattutto sorretta da motivazioni d'ordine pedagogico, di finalità dell'insegnamento, di utilità per l'apprendimento e il suo accertamento. Sempre dall'indagine Matmedia 2005 emerse che solo 1 Commissione su 10 era favorevole all'uso di una calcolatrice programmabile e grafica. Il resto dei docenti, la quasi totalità, era contraria a tale uso, e non furono pochi quelli che ritennero che, in sede d'esame, non dovrebbe essere consentito l'uso di alcuno strumento di calcolo automatico. Un altro aspetto, non secondario, che ha consigliato di non eliminare il divieto è quello che finora l'offerta sul mercato di macchine calcolatrici grafiche è stata per lo più limitata ad un solo marchio. Oggi, probabilmente, la proliferazione del software accessibile in modo "*free*" può portare ad altre considerazioni. Ma è un discorso da avviare. **Non si può eliminare il divieto senza un'ampia e condivisa maturazione della decisione.**

Le questioni a-d sono intimamente correlate e insieme al Syllabus sono effettivamente quelle che negli ultimi anni sono state sempre sottoposte all'attenzione dell'Amministrazione. Non va sottaciuto però che dal 2001, da quando cioè la prova scritta di matematica è stata articolata in problemi e quesiti, siano stati compiuti significativi passi di avvicinamento della matematica alla realtà dell'insegnamento e delle classi di alunni, un avvicinamento della dote personale di intuizione e di intelligenza, alle doti di diligenza e impegno di studio. Un lavoro di avvicinamento che si è giovato anche delle indagini annualmente realizzate in rete attraverso il web di Matmedia, curate dagli ispettori tecnici del settore e diramate da apposite note munisteriali. Indagini preziose non solo per la quantità e qualità delle informazioni fornite quanto perchè occasioni per i docenti di essere chiamati a riflettere sulla prova, a darne un giudizio, a confrontarsi con il colleghi. In definitiva un lavoro prezioso per la creazione di quel clima positivo per l'apprendimento che è obiettivo di ogni sana azione posta in essere dall'Amministrazione. Un lavoro prezioso che può portarci a condividere le competenze matematiche che i giovani debbano possedere a conclusione degli studi secondari e che possono essere individuate nelle seguenti:

1. **Sviluppare dimostrazioni e riconoscere il legame deduttivo tra proposizioni di un determinato ambito**
2. **Utilizzare i metodi e gli strumenti dell'analisi matematica.**
3. **Affrontare situazioni problematiche in contesti diversi avvalendosi dei modelli e degli strumenti matematici più adeguati alla loro rappresentazione e risoluzione**
4. **Interpretare e formalizzare situazioni geometriche spaziali**
5. **Utilizzare i metodi e gli strumenti della probabilità e della statistica**
6. **Cogliere il valore socio-storico-culturale della matematica e riconoscerne il contributo allo sviluppo delle Scienze e della Cultura**

ALLEGATO

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Sessione ordinaria 2007

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\widehat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\widehat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\widehat{B}C = 36^\circ$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

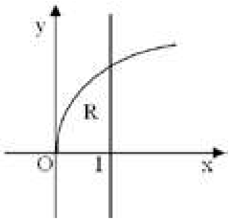
PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2} r^2 \, sen \frac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

QUESTIONARIO

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 *cm*. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0.$$
4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema *1 metro*. Si dica quanti *litri* di olio il serbatoio può contenere.
5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio (o teorema di Lagrange)* sull'intervallo [-2, 2] . Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
6. Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
7. Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?
8. Si risolva l'equazione: $4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$
9. Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ è in accordo con il suo significato geometrico.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Sessione ordinaria 2007

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in R$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\frac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

PROBLEMA 2

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\widehat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\widehat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\widehat{B}C = 36^\circ$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

QUESTIONARIO

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.
2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $\ln x$ e l'asse x, con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.
3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetia* con centro O fissato è un *gruppo*.
4. Si consideri la funzione:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x-\mu}{2\sigma^2}}$$
Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.
5. Si consideri il teorema: *«la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto»* e si spieghi perchè esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1, 2).
8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».
9. Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.