I043-Esame di Stato di Istruzione secondaria superiore

Indirizzi:LI02, EA02-Scientifico
LI03-Scientifico Opzione scienze applicate
LI15-Scientifico-Sezione ad indirizzo sportivo.
(Testo valido anche per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali)

Problema 1[1]

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in opportune unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- Si sceglie una funzione $y=f(x)$ definita e continua nell'intervallo [0;1] che soddisfi le condizioni:
  a) $f(0)=1$;
  b) $f(1)=0$;
  c) $0< f(x)<1$ per $0<x<1$.
- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y=f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine O, ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ, passante per i punti (1;0), (0;1), (-1;0), (0;-1), simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato Q di vertici (1;1), (-1;1), (-1;-1), (1;-1).
- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa Λ e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:

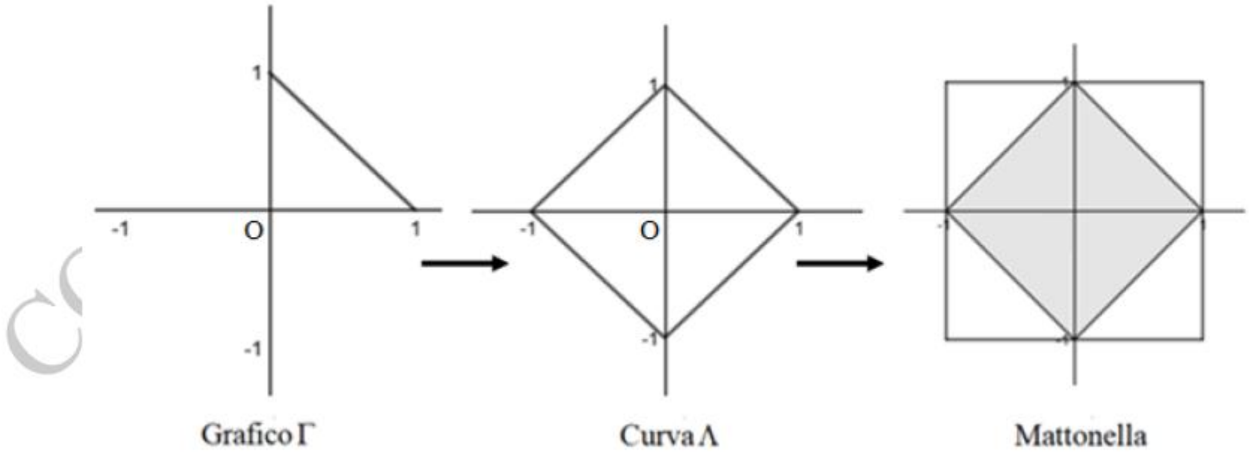

Figura 1

La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

(1) Le figure 1 e 2 sono tratte dal testo ministeriale pubblicato all'indirizzo http://www.istruzione.it/esame_di_stato/201718/Licei/Ordinaria/I043_ORD18.pdf e restano dunque di proprietà intellettuale dell'autore del testo.

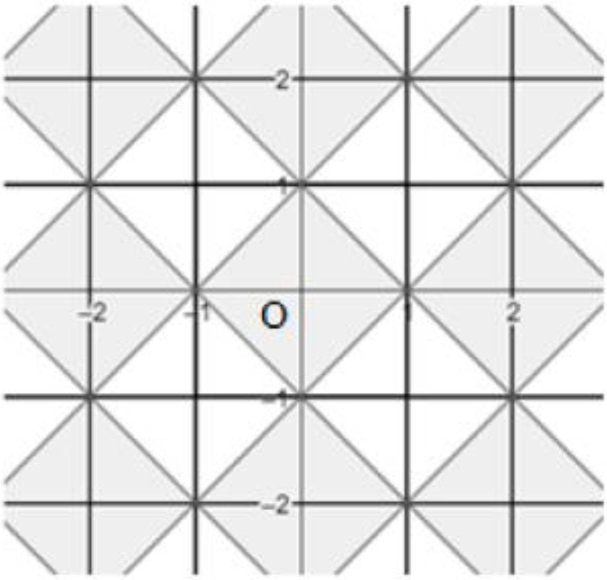

Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y=f(x)$ e l'equazione della curva Λ, così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.
2. Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0)=0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo e terzo grado.

   Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a,b,c,d \in \Re$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

3. Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti dalle funzioni $a_n(x)=1-x^n$, $b_n(x)=(1-x)^n$, considerate per $x\in[0;1]$, con n intero positivo.

   Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle a partire da tali funzioni a_n e b_n, calcola $\lim_{n\to+\infty} A(n)$ e $\lim_{n\to+\infty} B(n)$ ed interpreta i risultati in termini geometrici.

4. Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

   Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

Risoluzione

a) Dal disegno della mattonella riportato in Figura 1 si deduce che la funzione $y=f(x)$ ha come grafico il segmento che unisce i punti degli assi cartesiani (0;1), (1;0), quindi l'espressione algebrica della funzione è $f(x)=1-x$, con $0\le x\le 1$ e tenendo conto delle simmetrie della curva Λ rispetto agli assi cartesiani la sua equazione è $\Lambda: |x|+|y|=1$. Nelle figure 1.1 e 1.2 sono riportati rispettivamente i grafici della funzione $y=f(x)$ e della curva Λ.

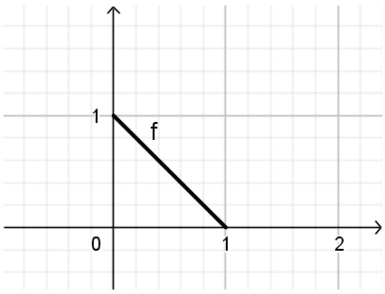

Figura 1.1

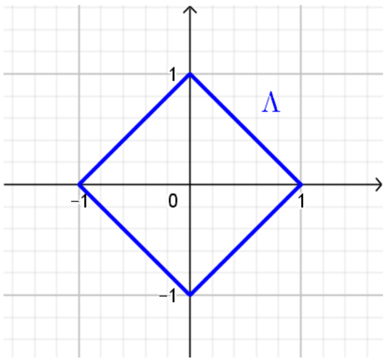

Figura 1.2

b) Nel testo si suggerisce di determinare una funzione polinomiale di secondo o di terzo grado che verifichi le condizioni imposte. In verità, subito dopo si informa il lettore che la sua ricerca sarà andata a vuoto per quanto concerne la funzione polinomiale di secondo grado e vedremo tra breve il perché; tuttavia, per ottemperare alle consegne del testo, cominciamo con la ricerca dell'eventuale funzione polinomiale di secondo grado.

La generica funzione polinomiale di secondo grado ha la forma $y=P(x)=ax^2+bx+c$, con a, b, c costanti da determinare. Le condizioni da imporre sono:

a) $P(0)=1$, da cui si deduce $c=1$;

b) $P(1)=0$, da cui $a+b+c=0$, ed essendo $c=1\rightarrow a+b=-1$;

c) poiché la derivata prima è $P'(x)= 2ax+b$, la condizione $P'(0)=0$ implica $b=0$, da cui $a=-1$.

A questo punto si ha già l'espressione definitiva del polinomio di secondo grado cercato ed è $P(x)=-x^2+1$, ma facciamo osservare che ancora non è stata imposta l'ulteriore condizione che l'area della parte colorata della mattonella corrisponda al 55% dell'area dell'intera mattonella. La rappresentazione grafica della funzione trovata è riportata in Figura 2.1. Considerato che ormai il polinomio è definito si può solo sperare che l'area della regione finita di piano delimitata dagli assi cartesiani e dalla funzione polinomiale relativamente all'intervallo [0;1] sia pari al 55% dell'area del quadrato di lato unitario avente come vertici (0;0),(1;0),(1;1),(0;1), che è appunto uno. L'area della regione in oggetto, tenendo presente la proprietà del segmento parabolico, la si può calcolare come segue :

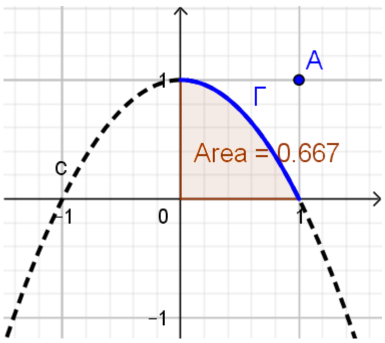

Figura 2.1- L'area della parte colorata della mattonella disegnata con l'arco di parabola è pari al 66,67% di quella dell'intera mattonella. In figura, con stile tratteggio, è evidenziata la parabola di equazione $y=1-x^2$.

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 1 = \frac{2}{3} = 0,\bar{6} \simeq 66,67\%$$

Per gli appassionati del calcolo integrale, il procedimento è riportato di seguito e fornisce lo stesso valore:

$$\text{Area}= = \int_0^1 \left(1-x^2\right)dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Il valore ottenuto è diverso dal 55% dell'area del quadrato, dunque **il polinomio di secondo grado non risolve il problema in oggetto**.

Cerchiamo dunque tra i polinomi di terzo grado. L'espressione della funzione deve essere della forma $y=P(x)=ax^3+b\,x^2+c\,x+d$, con a, b, c, d costanti reali da determinare.

Le condizioni da imporre per determinare i valori dei parametri sono:

a) P(0)=1, da cui si deduce d=1;
b) P(1)=0, da cui $a+b+c+d=0$, ed essendo $d=1 \rightarrow a+b+c=-1$;
c) Poiché la derivata prima è $P'(x)= 3ax^2+2bx+c$, la condizione $P'(0)=0$ implica c=0, da cui $a+b=-1$, quindi $b=-a-1$. La forma algebrica del polinomio deve essere del tipo $P(x)=ax^3-(a+1)\,x^2+1$.
d) Per determinare il valore dell'ultimo parametro imponiamo che l'area del sottografico della funzione relativo all'intervallo [0;1] valga 0,55. Si ha:

$$\int_0^1\left[ax^3-(a+1)x^2+1\right]dx=\left[a\cdot\frac{x^4}{4}-(a+1)\cdot\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=$$

$$\frac{a}{4}-\frac{a+1}{3}+1=\frac{8-a}{12},$$

quindi deve valere l'uguaglianza

$$\frac{8-a}{12}=0,55, \text{ da cui } \quad \frac{8-a}{12}=\frac{11}{20}\rightarrow a=8-\frac{11}{20}\cdot 12=\frac{7}{5}$$

Il polinomio di terzo grado richiesto è dunque:

$P(x)=\frac{7}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2+1$. Il grafico della funzione polinomiale ottenuta è riportato in stile tratteggio in Figura 3.1 e in stile continuo il bordo che delimiterà insieme agli assi coordinati relativamente al primo quadrante la parte colorata della mattonella.

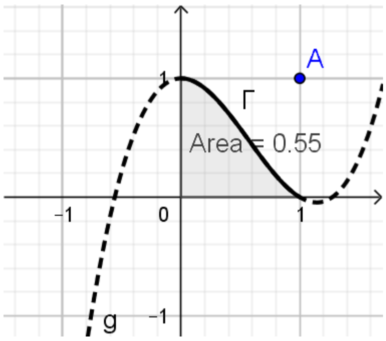

Figura 3.1- Una mattonella è costituita dal quadrato di alto unitario avente per vertici i punti (0;0), (1;0),(1;1),(0;1).

In Figura 3.2 è riportato il quadrato ABCD composto dall'unione di quattro mattonelle quadrate di lato unitario opportunamente assemblate. La parte colorata di grigio del quadrato ABCD è delimitata dal bordo formato dall'unione dei grafici delle curve Γ, Γ', Γ'', Γ''', così come descritto nel testo del problema.

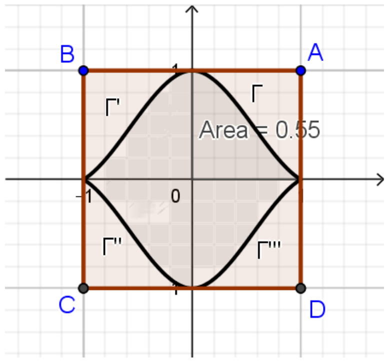

Figura 3.2- Gruppo di 4 mattonelle decorate affiancate.

c) Consideriamo le funzioni polinomiali $a_n(x)=1-x^n$, $b_n(x)=(1-x)^n$, con n naturale positivo. Occorre verificare che entrambe verificano le tre condizioni a), b), c) indicate nel testo. Infatti:
a) $a_n(0)=1$, $b_n(0)=1$;
b) $a_n(1)=1-1=0$, $b_n(1)=0^n=0$, perché n è intero positivo.
c) $0<a_n(x)=1-x^n<1$, perché la potenza di un numero dell'intervallo]0;1[è ancora un numero dello stesso intervallo e allo stesso intervallo appartiene la differenza $1-x^n$; analogamente, $0<b_n(x)=(1-x)^n<1$ perché con $0<x<1$ risulta anche $0<1-x<1$ e quindi anche la potenza $(1-x)^n$ con esponente positivo assume valori nell'intervallo]0;1[.

Calcoliamo le aree delle parti colorate delle mattonelle, delimitate da due lati della mattonella e dal grafico curvilineo di due modelli algebrici considerati.

Assumendo come motivo decorativo il grafico della funzione $a_n(x)=1-x^n$, l'area della regione colorata è data da :

$$A(n)=\int_0^1(1-x^n)\,dx=\left[x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}A(n)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1;$$

assumendo come motivo decorativo il grafico della funzione $b_n(x)=(1-x)^n$ relativo all'intervallo [0;1] l'area della regione colorata è data da:

$$B(n)=\int_0^1 (1-x)^n\,dx=-\int_0^1 -(1-x)^n\,dx=\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1} \text{ e risulta } \lim_{n\to+\infty} B(n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Interpretazione geometrica dei risultati

Per le mattonelle decorate con il profilo della funzione $a_n(x)$, quando $n\to+\infty$ la parte colorata tende a ricoprire l'intera mattonella; per le mattonelle decorate con il profilo della funzione $b_n(x)$ per $n\to+\infty$ la parte colorata tende a scomparire del tutto.

d) Progetto particolare per il cliente (applicazione della probabilità)

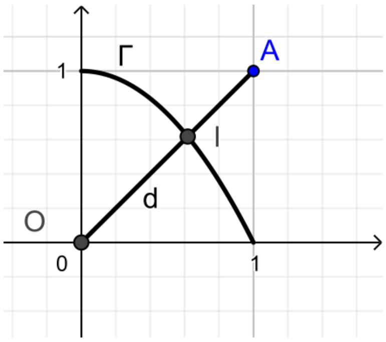

Figura 4.1

I profili delle parti colorate delle mattonelle sono dunque quelli dedotti dalle funzioni $a_2(x)=1-x^2$, $b_2(x)=(1-x)^2$; precisamente si devono preparare 5000 mattonelle per ciascun tipo di decorazione.

La verniciatura della parte da colorare per ogni mattonella, data l'imperfezione del "braccio meccanico", evidentemente è un'operazione a rischio e vi è una certa probabilità che ciascuna mattonella prodotta sia difettosa, quindi inservibile per la vendita.

Nelle figure 4.1 e 4.2 sono riportati i profili decorativi dei due tipi di mattonelle (si tratta di due archi di parabole).

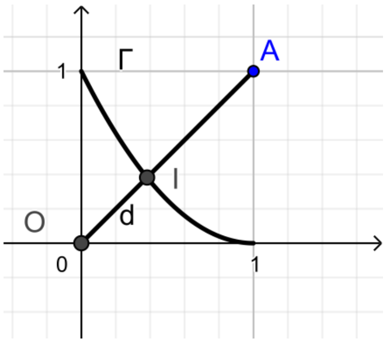

Figura 4.2

Si osserva in ciascuno dei due disegni il punto contrassegnato con I, che rappresenta l'intersezione della diagonale del quadrato (rappresentante la mattonella) avente per estremi l'origine O e il punto A(1;1) con il profilo della decorazione. Questo punto è importante **nell'ipotesi che il braccio meccanico abbia come posizione di riposo l'origine O degli assi** (posizione home) e che il suo moto sia progettato in modo che dopo la colorazione della mattonella il ritorno nella posizione home avvenga percorrendo la diagonale dall'estremo A(1;1) all'estremo (0;0)[(2)]. Osserviamo che nel testo del problema non è specificato quale diagonale il braccio meccanico percorra e la scelta di una diagonale o dell'altra non è indifferente. L'imperfezione del braccio meccanico ha incidenze diverse[(3)].

Per ciascuno dei due tipi di mattonelle prodotte **si deve determinare la probabilità p che nella corsa di ritorno alla posizione home il braccio meccanico rilasci una goccia di colore nella parte bianca della mattonella**, quindi internamente al segmento AI. Consideriamo i due eventi:

E_1="Nella corsa di ritorno il braccio meccanico rilascia una goccia di colore";

[(2)] Osserviamo che nel testo del problema non si precisa quale sia la diagonale del quadrato che il braccio meccanico percorre per tornare alla posizione home. E' bene osservare che il braccio meccanico potrebbe avere come posizione di home uno dei due punti (1;0), (0;1) e in questo caso la diagonale da percorrere sarebbe il segmento che avrebbe detti punti come estremi.
[(3)] Confrontare quanto riportato nel commento alla traccia.

E_2="La goccia di colore rilasciata dal braccio meccanico cade internamente al segmento AI".

Ebbene, una mattonella sarà danneggiata se nella sua produzione, durante la corsa di ritorno del braccio meccanico si verificano entrambi gli eventi. Si sa che $P(E_1)=0,20$ (perché l'erogazione del colore dal braccio meccanico non è perfetta); per quanto riguarda $P(E_2)$, il valore è pari al rapporto tra le misure dei segmenti AI, AO. Infatti, **è lecito ritenere che durante la corsa di ritorno il braccio meccanico si muova a velocità costante e quindi il tempo di attraversamento del tratto AI è direttamente proporzionale alla sua lunghezza**. Dunque: $P(E_2)=\frac{\overline{AI}}{\overline{AO}}$.

La probabilità **dell'evento composto** $E=E_1\cap E_2$ si determina tenendo conto che i **due eventi** sono **indipendenti**. Perciò risulta:

$$P(E)=P(E_1)\cdot P(E_2)=0,20\cdot\frac{\overline{AI}}{\overline{AO}}.$$

Elaborazioni algebriche

Dobbiamo determinare la misura del segmento AI in ciascuno dei due casi e calcolare il valore del rapporto $\frac{\overline{AI}}{\overline{AO}}$.

Primo: decorazione con il profilo $a_2(x)=1-x^2$

La misura della diagonale del quadrato della mattonella è $\overline{AO}=\sqrt{2}$. Determiniamo le coordinate del punto I risolvendo il sistema formato dall'equazione $y=x$ della bisettrice del quadrante e dall'equazione del profilo della decorazione.

$$\begin{cases} y=x \\ y=1-x^2 \end{cases} \text{,con } 0\le x\le 1 \rightarrow I\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Dunque $\overline{AI}=\sqrt{2\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$; $\frac{\overline{AI}}{\overline{AO}}=\sqrt{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=P(E_2)$

La probabilità di avere una mattonella difettosa è:

$$p_1=0,20\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0,20\cdot 0,381966...=0,07639...\simeq 7,64\%$$

Secondo: decorazione con il profilo $b_2(x)=(1-x)^2$

Si risolve il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y=x \\ y=(1-x)^2 \end{cases} \rightarrow x^2-3x+1=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Il valore $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0,38196...$ è accettabile, mentre $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2,618...$ si scarta perché non appartiene all'intervallo [0;1]. Il punto cercato è $I\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. La misura di AI è:

$\overline{AI}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, quindi si ha anche

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AO}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = P(E_2) \simeq 0,6180339...$$

La probabilità di avere una mattonella difettosa è:

$$p_2 = 0,20 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{10} = 0,123606... \simeq 12,36\%$$

Conclusioni

Sulle 5000 mattonelle decorate con il primo profilo se ne possono presentare difettose

$$\mathrm{N}_1 = p \cdot 5000 = 7,64\% \cdot 5000 = 382 \;;$$

tra le 5000 decorate con il secondo profilo se ne possono presentare difettose

$$\mathrm{N}_2 = p_2 \cdot 5000 = 12,36\% \cdot 5000 = 618$$

Complessivamente sulle 10.000 mattonelle prodotte dall'Azienda produttrice se ne possono trovare 382+618=1000 difettose.

Osservazione

Il numero delle mattonelle difettose decorate con il profilo n.2 è molto più alto di quello delle mattonelle difettose decorate con il profilo n.1 e la causa risiede nel fatto che il tratto AI della diagonale che ricade nella parte della mattonella non colorata nel caso del secondo profilo è più lungo che nel primo, quindi è maggiormente probabile che la goccia rilasciata dal braccio meccanico interessi la zona bianca della mattonella.

Luigi Lecci:*www.matematicaescuola.it*

22-giu-2018