

I043-Esame di Stato di Istruzione secondaria superiore

Indirizzi:LI02, EA02-Scientifico

LI03-Scientifico Opzione scienze applicate

LI15-Scientifico-Sezione ad indirizzo sportivo.

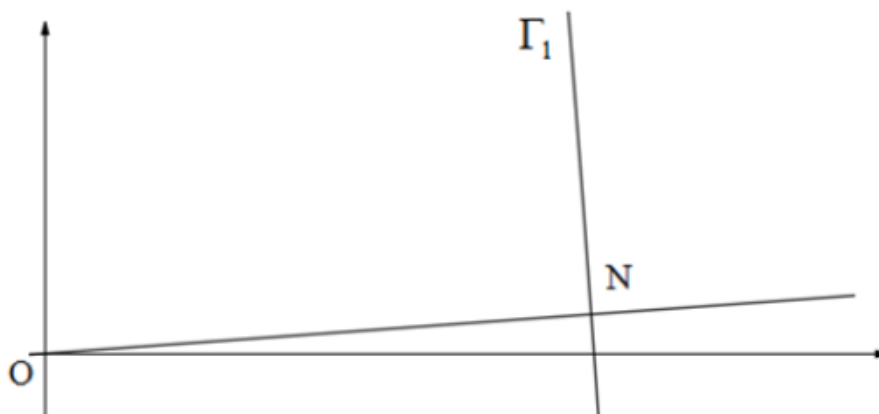
(Testo valido anche per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali)

Problema 2⁽¹⁾

Consideriamo la funzione $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che $k=1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 , s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p; y_p)$ all'interno di T , questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico di Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente in quel punto) passa per l'origine degli assi O .



Figura

Il grafico di Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.

⁽¹⁾ La figura 1 è tratta dal testo ministeriale pubblicato all'indirizzo

http://www.istruzione.it/esame_di_stato/201718/Licei/Ordinaria/I043_ORD18.pdf e resta dunque di proprietà intellettuale dell'autore del testo.

Risoluzione

1. Indichiamo con A il punto del grafico di ascissa 0. Poiché $f_k(0) = 9$ risulta $A(0;9)$. Analogamente, detto B il punto del grafico di ascissa 1 risulta $B(1; f_k(1)) = B(1; 8+k)$.

Ricordiamo che l'equazione della retta tangente al diagramma della funzione $y=f(x)$ nel punto $(x_0; f(x_0))$, con x_0 appartenente al dominio di definizione, se la funzione è derivabile in x_0 è $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Nel caso in esame la funzione è un polinomio ed è definita e derivabile su tutto \mathbb{R} , calcoliamo dunque la funzione derivata prima e i rispettivi coefficienti angolari delle due rette tangenti richieste.

$$f'_k(x) = -3x^2 + k \rightarrow f'_k(0) = k, f'_k(1) = k - 3. \text{ Per le equazioni delle rette tangenti si ha:}$$

$$r_k : y - f_k(0) = f'_k(0) \cdot x \rightarrow r_k : y = kx + 9, \text{ per il punto A;}$$

$$s_k : y - f_k(1) = f'_k(1) \cdot (x - 1) \rightarrow s_k : y = (k - 3)x + 11, \text{ per il punto B.}$$

Si determinano le coordinate del punto M di intersezione tra r_k ed s_k risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} r_k : y = kx + 9 \\ s_k : y = (k - 3)x + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} kx + 9 = (k - 3)x + 11 \\ y = kx + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3}k + 9 \end{cases}, \text{ dunque risulta } M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}k + 9\right).$$

2. Per rispondere alla prima parte del quesito si deve risolvere la disequazione $y_M < 10$, cioè $\frac{2}{3}k + 9 < 10$ nell'incognita k ed avere presente che $k \in \mathbb{Z}$. La disequazione è soddisfatta per i valori di k tali che $k < \frac{3}{2}$ ed evidentemente il più grande numero intero che soddisfa la disuguaglianza è $k=1$.

Procediamo con lo studio della funzione $f_1(x) = -x^3 + x + 9$.

Della funzione si devono determinare i punti stazionari, il flesso e tracciarne il grafico.

I punti stazionari sono quelli in cui si annulla la derivata prima. Poiché la funzione derivata prima è $f'_1(x) = -3x^2 + 1$, i suoi zeri sono $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Sono questi i soli punti stazionari della funzione. Possiamo classificarli studiando il segno della derivata prima nel dominio. Risulta

$f'_1(x) > 0$ per i valori $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, quindi $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di minimo relativo e $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ punto di massimo relativo e i valori sono $f_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{81 - 2\sqrt{3}}{9} = 8,615099\dots$, $f_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{81 + 2\sqrt{3}}{9} = 9,384900\dots$.

Per quanto concerne il **punto di flesso**, ricordiamo che ogni cubica ha un solo punto di flesso e la sua ascissa è il punto in cui si annulla la derivata seconda. Nel nostro caso, poiché la funzione derivata seconda è $f''_1(x) = -6x$, si deduce che il punto di flesso è $x=0$, con $f(0)=9$; dunque $F(0;9)$.

Questo punto coincide con il punto A(0;9) individuato prima. Precisiamo che trattasi di un flesso discendente perché la derivata seconda è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$.

Per quanto concerne il **segno della funzione**, avendo precisato il valore del minimo e quello del massimo relativi e notato che la funzione è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $\left] -\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right[$, $\left] \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right[$, nonché strettamente crescente nell'intervallo $\left] -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$, possiamo affermare che la funzione ammette **un solo zero $x=\alpha$** e che risulta $f_1(x) < 0 \quad \forall x < \alpha$ e $f_1(x) > 0 \quad \forall x > \alpha$. Possiamo altresì affermare che **il numero α è irrazionale** perché le eventuali radici razionali dell'equazione $f_1(x) = 0$, cioè dell'equazione $x^3 - x - 9 = 0$ vanno ricercate tra i divisori del termine noto e quindi nell'insieme $\{-1; 1; -3; 3; -9; 9\}$, ma nessuno degli elementi di questo insieme soddisfa l'equazione.

Possiamo fornire un primo **valore approssimato del punto α** osservando che $f_1(2) = 3 > 0$, $f_1(3) = -15 < 0$ e invocando il teorema di esistenza degli zeri per una funzione reale di variabile reale $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, definita in un intervallo chiuso e limitato, che assuma agli estremi dell'intervallo valori discordi. Il **teorema di esistenza degli zeri** afferma che **una tale funzione ammette internamente all'intervallo almeno uno zero. Nel caso in oggetto** la funzione, avendo derivata prima negativa nell'intervallo considerato, è strettamente decrescente e quindi **lo zero è unico**. Scriviamo dunque che $2 < \alpha < 3$. Per completezza di informazioni precisiamo che

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$, quindi **la funzione non ammette massimo, né minimo assoluti** e il diagramma non ammette alcuna retta asintotica⁽²⁾. Nel corso dello sviluppo del quesito n.3 avremo modo di ritornare sul valore di α e fornire ulteriori informazioni.

Precisiamo che le due rette tangenti r_1, s_1 hanno equazioni $r_1: y = x + 9$, $s_1: y = -2x + 11$.

In Figura 1 è riportato parzialmente il diagramma della funzione con i punti particolari fin qui determinati e le due rette tangenti r_1, s_1 .

3. Il **Triangolo T** ha come vertici il punto M, di intersezione delle due tangenti, le cui coordinate sono $(2/3; 29/3)$, i punti C(-9;0) e D(11/2;0), rispettivamente intersezioni delle rette r_1, s_1 con l'asse delle ascisse.

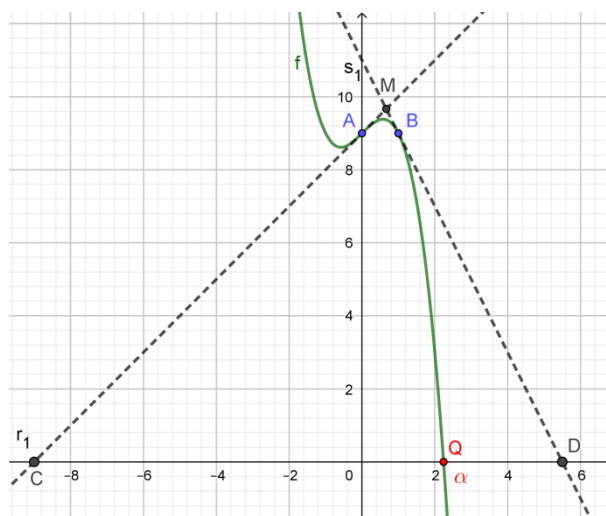


Figura 1

Calcolo della probabilità richiesta

Dove si deve trovare il punto P da prendere a caso nel triangolo CDM?

Definiamo l'evento:

$E =$ "Il punto $P(x_p; y_p)$ del piano cartesiano preso internamente al triangolo CDM ha coordinate tali che $y_p > f_1(x_p)$ ".

Si deve calcolare la probabilità $P(E)$.

⁽²⁾ Ricordiamo che ogni funzione polinomiale $y = P_n(x)$, con $n > 1$, è definita su tutto l'asse reale e il suo diagramma non ammette alcuna retta asintotica per $x \rightarrow \pm\infty$.

Strategia risolutiva

Osservando la Figura 1 si evince che P deve essere interno al triangolo mistilineo MAB delimitato dai segmenti MA, MB e dall'arco di curva AB, oppure interno al triangolo mistilineo BQD delimitato dall'arco di curva BQ, dal segmento QD e dal segmento BD. La probabilità dell'evento E è data dal rapporto ⁽³⁾

$$P(E) = \frac{Area(MAB_{mistil.}) + Area(BQD_{mistil.})}{Area(MCD_{triang.})}$$

Per il calcolo della probabilità indicata sono necessari i seguenti elementi:

- a) L'area S del triangolo CDM;
- b) L'area S₁ del triangolo MAB;
- c) L'area S₂ della regione finita di piano delimitata dall'arco di Γ₁ e dalla retta t:y=9, con 0≤x≤1;
- d) L'area S₃ del triangolo BB'D, dove B'(1;0) è la proiezione ortogonale di B sull'asse x;
- e) L'area del sottografico S₄ della funzione relativa all'intervallo [x_B;α].

Una volta trovati gli elementi indicati la probabilità cercata sarà $P(E) = \frac{(S_1 - S_2) + (S_3 - S_4)}{S}$.

Elaborazioni per determinare gli elementi indicati

a) $S = \frac{1}{2}(x_D - x_C) \cdot y_M = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{11}{2} + 9\right) \cdot \frac{29}{3} = \frac{841}{12}$

b) $S_1 = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \cdot (y_M - y_A) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{29}{3} - 9\right) = \frac{1}{3}$

c) $S_2 = \int_0^1 (-x^3 + x + 9 - 9) dx = \int_0^1 (-x^3 + x) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

d) $S_3 = \frac{1}{2}(x_D - x_{B'}) \cdot y_B = \frac{1}{2} \left(\frac{11}{2} - 1\right) \cdot 9 = \frac{81}{4}$

- e) **(Analisi numerica)** Per il calcolo di S₄ abbiamo bisogno di conoscere il valore dell'ascissa α del punto Q. Possiamo determinare il valore α con la precisione desiderata applicando il **metodo di bisezione**. Nella tabella riportata di seguito sono indicate le elaborazioni necessarie eseguite con Excel. Come si opera?

- a. Si sa che 2 < α < 3, con f₁(2) > 0, f₁(3) < 0. Poniamo x'₀ = 2, x''₀ = 3
- b. Si sceglie il punto medio x_m = (x'₀ + x''₀)/2 e si calcola f₁(x_m). Se f₁(x_m) > 0 allora vuol dire che x_m < α < 3 e si continua ponendo x'₁ = x_m, x''₁ = 3, altrimenti sarà 2 < α < x_m e si continua ponendo x'₁ = 2, x''₁ = x_m. Si determina il nuovo punto medio x_m = (x'₁ + x''₁)/2
- c. Si calcola f₁(x_m) e si osserva il

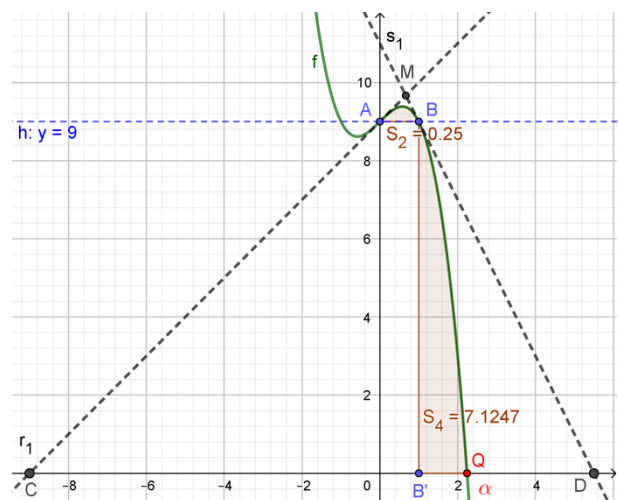


Figura 2

⁽³⁾ La formula che segue si ispira al calcolo della probabilità dell'evento con il *metodo Monte Carlo*.

suo segno per stabilire in quale dei due intervalli $]x'_1; x_m[$, $]x_m; x''_1[$ ricade α .
 Deciso in quale dei due intervalli indicati si trova α si procede iterativamente con l'algoritmo di ricerca per definire intervalli sempre più ristretti contenenti α .

Quando arrestare la ricerca?

- d. I due estremi x'_n, x''_n con l'aumentare di n si avvicinano tra loro sempre di più e da un certo punto in poi si noterà che essi avranno la stessa parte intera e le prime cifre della parte decimale coincidenti. Il numero di cifre decimali coincidenti per i due estremi permette di stabilire la precisione del valore di α . Per esempio, supponiamo che si sia deciso di determinare un valore approssimato per α affetto da errore inferiore a 10^{-k} , con k naturale positivo. Che fare?
- e. Sia $l = x''_0 - x'_0 = 3 - 2 = 1$ l'ampiezza dell'intervallo di ricerca iniziale. Dopo n passaggi si sarà determinato l'intervallo $]x'_n; x''_n[$ contenente il punto α e l'ampiezza di questo intervallo sarà

$$\delta(x'_n; x''_n) = x''_n - x'_n = \frac{l}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Osserviamo che tutti i punti estremi degli intervalli contenenti α che via via si determinano sono numeri razionali perché lo sono i due punti iniziali $x'_0=2, x''_0=3$ e quindi sono razionali tutti i punti medi che si determinano nell'applicazione

dell'algoritmo di ricerca, quindi è razionale anche il punto medio $x_m = \frac{x'_n + x''_n}{2}$

dell'ultimo intervallo, pertanto il valore cercato α è diverso da $x_m = \frac{x'_n + x''_n}{2}$. Al

termine della ricerca noi vogliamo **prendere come valore rappresentativo di α quello del punto medio dell'ultimo intervallo determinato contenente α** ; questa decisione permette di affermare che l'errore di cui sarà affetto il valore approssimato x_m di α sarà minore della semiampiezza dell'ultimo intervallo, quindi

$$err = |x_m - \alpha| < \frac{l}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l}{2^{n+1}} \quad (4) \quad (\text{nel caso specifico } l=1)$$

Imponendo che sia soddisfatta la disuguaglianza $\frac{l}{2^{n+1}} < 10^{-k}$ e risolvendola nell'incognita n si stabilisce dopo quanti passaggi il processo iterativo avrà termine. Risoluzione della disequazione

$$\frac{l}{2^{n+1}} < 10^{-k} \rightarrow 2^{n+1} > l \cdot 10^k \rightarrow n+1 > \log_2(l \cdot 10^k) \rightarrow n > \log_2(l \cdot 10^k) - 1 \quad (1^*)$$

Dunque n sarà il più piccolo numero naturale verificante la (1*).

Per essere concreti, nel caso in esame, supponiamo di voler fornire un'approssimazione di α con errore inferiore a $0,001=10^{-3}$. Dovrà risultare

$$n > \log_2(1 \cdot 10^3) - 1 = 9,96578... - 1 = 8,96578...;$$

il primo valore utile per n sarà 9, dunque occorreranno 9 passaggi.

⁽⁴⁾ Nel caso specifico è $l=1$, ma se l'intervallo iniziale comprendente α fosse $]a;b[$, con $a < b$ la maggiorazione per l'entità dell'errore sarebbe quella indicata.

Nella tabella che segue sono riportate le elaborazioni della ricerca effettuata con il foglio elettronico Excel, avendo effettuato 16 passaggi. Osserviamo che al **nono passaggio l'intervallo contenente lo zero α è]2,2382813; 2,2402344[** e la sua semiampiezza è

$$\delta/2=(2,2402344-2,2382813)/2=9,7655 \cdot 10^{-4} < 0,001 ,$$

come appunto ci si aspettava.

Chiudiamo queste considerazioni facendo notare che dal 15° passaggio gli estremi dell'intervallo contenente α hanno coincidente la parte intera e le prime quattro cifre decimali. Assumendo $\alpha=2,2400$ possiamo affermare che le quattro cifre decimali sono esatte. Ebbene, questo sarà il valore che noi assumeremo come approssimazione dell'ascissa del punto Q del grafico: Q(2,2400;0) per i calcoli necessari che ci permetteranno di calcolare la probabilità richiesta.

Ricerca del valore approssimato di α con il metodo di bisezione					
$f(x) = -x^3 + x + 9$					
	$a=2$	$b=3$	$\alpha = x_m$		
n	x'	x''	$x_m=(x'+x'')/2$	$f(x_m)$	$l= x''-x' $
0	2,0000000	3,0000000	2,5000000	-4,125000	1,0000000
1	2,0000000	2,5000000	2,2500000	-0,140625	0,5000000
2	2,0000000	2,2500000	2,1250000	1,529297	0,2500000
3	2,1250000	2,2500000	2,1875000	0,719971	0,1250000
4	2,1875000	2,2500000	2,2187500	0,296173	0,0625000
5	2,2187500	2,2500000	2,2343750	0,079411	0,0312500
6	2,2343750	2,2500000	2,2421875	-0,030197	0,0156250
7	2,2343750	2,2421875	2,2382813	0,024709	0,0078125
8	2,2382813	2,2421875	2,2402344	-0,002718	0,0039063
9	2,2382813	2,2402344	2,2392578	0,011002	0,0019531
10	2,2392578	2,2402344	2,2397461	0,004144	0,0009766
11	2,2397461	2,2402344	2,2399902	0,000713	0,0004883
12	2,2399902	2,2402344	2,2401123	-0,001002	0,0002441
13	2,2399902	2,2401123	2,2400513	-0,000144	0,0001221
14	2,2399902	2,2400513	2,2400208	0,000284	0,0000610
15	2,2400208	2,2400513	2,2400360	0,000070	0,0000305
16	2,2400360	2,2400513	2,2400436	-0,000037	0,0000153

Possiamo procedere ora con il calcolo dell'area del sottografico della funzione indicato con S_4 .

$$S_4 = \int_1^{2,24} (-x^3 + x + 9) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 9x \right]_1^{2,24} = (-6,294077 + 2,5088 + 20,16) - (-0,25 + 0,5 + 9) = 7,124723$$

Calcolo della probabilità richiesta

$$P(E) = \frac{(S_1 - S_2) + (S_3 - S_4)}{S} = \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{81}{4} - 7,124723\right)}{841:12} \approx 0,18847 = 18,847\%$$

4. Consideriamo il polinomio di grado n $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Com'è noto i polinomi sono funzioni continue e dotate di derivata di qualsiasi ordine su tutto \mathbb{R} e quindi il corrispondente diagramma ammette retta tangente in un qualsiasi punto $P_0(x_0; P_n(x_0))$. L'equazione della tangente è

$$t_{P_0} : y - P_n(x_0) = P_n'(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ essendo } P_n'(x_0) \text{ il valore della derivata prima del polinomio in } x_0.$$

La normale al diagramma della funzione polinomio nel punto $P_0(x_0; P_n(x_0))$ esiste per ogni punto del diagramma stesso, perché come precisato esiste la derivata prima in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e se risulta

$P_n'(x_0) \neq 0$ la retta normale n_{P_0} avrà equazione

$$n_{P_0} : y - P_n(x_0) = -\frac{1}{P_n'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (2^*)$$

Evidentemente se x_0 è un punto stazionario, poiché la derivata prima si annulla, la retta tangente al diagramma della funzione $P_n(x)$ nello stesso punto è parallela all'asse delle ascisse e quindi la corrispondente normale sarà una retta parallela all'asse delle ordinate che avrà equazione $x=x_0$, che non si può porre nella forma esplicita (2*). Per altro, una tale normale passa per l'origine degli assi solo se coincide con l'asse y, quindi solo se il punto $x_0=0$. Per tutti gli altri eventuali punti stazionari le corrispondenti normali al diagramma non passeranno certamente dall'origine O degli assi cartesiani.

E' appena il caso di precisare che i polinomi $P_n(x)$ i cui diagrammi avranno come normale nel punto $x=0$ proprio l'asse y sono quelli la cui derivata prima si annulla in $x=0$, per i quali cioè risulta $P_n'(0) = 0$, e quindi sono solo i polinomi di grado maggiore o uguale a 2 mancanti del termine di primo grado ($a_{n-1}=0$).

Consideriamo dunque l'insieme dei punti $P_0(x_0; P_n(x_0))$ del diagramma della funzione, con $x_0 \neq 0$ e per i quali si abbia $P_n'(x_0) \neq 0$. Affinché la normale nel punto passi dall'origine degli assi la sua equazione deve essere soddisfatta dalla coppia (0;0), quindi deve sussistere l'uguaglianza

$$0 - P_n(x_0) = -\frac{1}{P_n'(x_0)} \cdot (0 - x_0), \text{ che diventa } -P_n(x_0) = \frac{x_0}{P_n'(x_0)}, \text{ che ancora, per l'ipotesi}$$

$P_n'(x_0) \neq 0$, si trasforma nell'equazione equivalente

$$P_n(x_0) \cdot P_n'(x_0) + x_0 = 0 \quad (3^*)$$

L'equazione (3*) ottenuta nell'incognita x_0 ha grado pari alla somma dei gradi dei due polinomi $P_n(x_0)$, $P_n'(x_0)$, che sono rispettivamente n e $n-1$, quindi il grado dell'equazione $2n-1$.

Dal **teorema fondamentale dell'algebra** si sa che un polinomio a coefficienti reali di grado n ammette nel **campo complesso** esattamente n radici e le radici complesse non reali sono presenti a coppie (se $z_1=a+ib$ è radice lo è anche il numero coniugato $z_2=a-ib$), pertanto l'equazione (3*) ammette certamente $2n-1$ radici nel campo complesso e se di esse nessuna è complessa allora ammetterà $2n-1$ radici reali. Questa conclusione è quanto nel quesito 4 della prova si pretendeva di dimostrare. E' bene precisare che i $2n-1$ eventuali punti non è detto che siano distinti, alcune radici dell'equazione (3*) potrebbero avere molteplicità maggiore di 1; in questo caso, il numero massimo di punti aventi la proprietà dichiarata sarebbe minore di $2n-1$.

Osservazione particolarmente importante

Abbiamo dedotto la (3*) ricercando punti $P_0(x_0; P_n(x_0))$ del diagramma della funzione, con $x_0 \neq 0$ e per i quali si abbia $P'_n(x_0) \neq 0$. Possiamo però notare che se il punto $x=0$ è stazionario, quindi se risulta $P'_n(0) = 0$ allora l'equazione (3*) è soddisfatta anche da $x_0=0$, quindi nel numero massimo $2n-1$ di punti è compreso anche il punto $(0; P_n(0))$.

Nota aggiuntiva

Nel testo si afferma che "il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà". Non si tratta di una proprietà che il Candidato deve dimostrare; si tratta semplicemente di un'informazione sulle proprietà specifiche del polinomio $P_3(x) = -x^3 + x + 9$. Proviamo in questa parte che l'affermazione è vera.

Omettiamo i calcoli necessari per ottenere la forma finale dell'equazione (3*) corrispondente. L'equazione è la seguente

$$-3x_0^5 + 4x_0^3 + 27x_0^2 - 2x_0 - 9 = 0$$

Si può riconoscere agevolmente la proprietà rappresentando il diagramma della funzione polinomiale e "osservare" che interseca l'asse delle ascisse in tre punti distinti.

Il diagramma è riportato in Figura 3

Le ascisse dei punti A, B, C sono rispettivamente $x_A \approx -0,5583$, $x_B \approx 0,5954$, $x_C \approx 2,2286$.

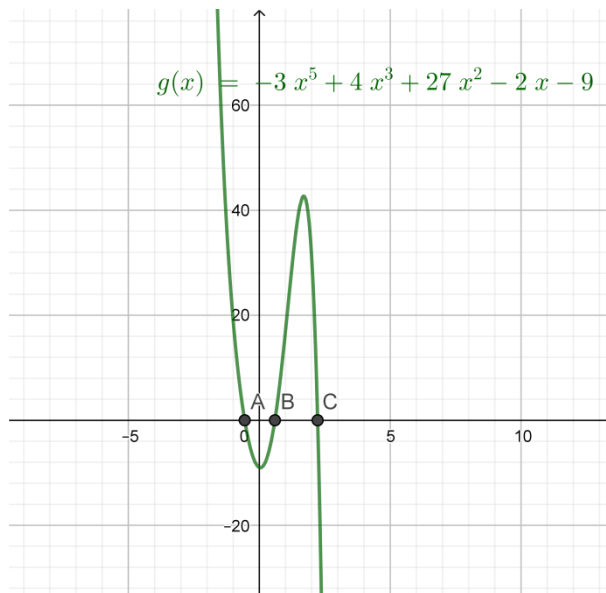


Figura 3

Luigi Lecci: www.matematicaescuola.it

23-giu-2018