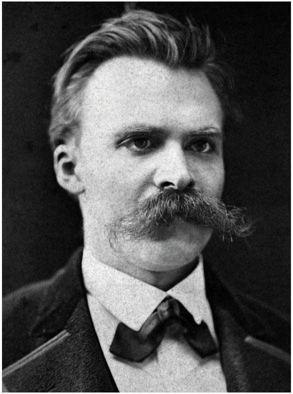
“Nell’orizzonte dell’infinito”

Umberto Bottazzini

Università degli Studi di Milano

Milano, 17 Novembre 2018

Da Nietzsche, *La gaia scienza*



"Abbiamo lasciato terra, e siamo saliti sulla nave! Abbiamo i ponti dietro di noi; di più, abbiamo reciso ogni legame con la terra alle nostre spalle! E adesso, navicella, guarda avanti! Accanto a te c'è l'oceano, è vero, non sempre muggisce, e ogni tanto se ne sta là come seta e oro e fantasticherie di bontà. Ma verranno ore in cui ti accorgerai che è infinito e che non c'è niente di più terribile dell'infinità"

L'oceano dell'infinito

- Quando riceve una copia dei *Discorsi* Cavalieri saluta in Galileo il maestro che "con la scorta della buona geometria e con la tramontana del suo altissimo ingegno ha potuto felicemente navigare l'immenso oceano degli indivisibili, de' vacui, de gl'infiniti". Lo stesso Cavalieri, dopo la stesura della sua *Geometria indivisilibus* può felicemente condurre in porto, non la navicella di Nietzsche, ma il suo "battello che ha percorso l'oceano della infinità degli indivisibil" evitando il pericolo di "mettersi a repentaglio negli scogli di quella infinità". Più prudente Torricelli, quando assicura il lettore che "non ci inoltreremo però nell'immenso oceano della geometria cavalieriana, ma, con minore audacia, staremo vicini a terra".

L'oceano dell'infinito

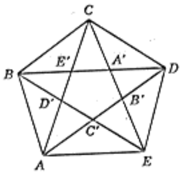
- Quando riceve una copia dei *Discorsi* Cavalieri saluta in Galileo il maestro che "con la scorta della buona geometria e con la tramontana del suo altissimo ingegno ha potuto felicemente navigare l'immenso oceano degli indivisibili, de' vacui, de gl'infiniti". Lo stesso Cavalieri, dopo la stesura della sua *Geometria indivisilibus* può felicemente condurre in porto, non la navicella di Nietzsche, ma il suo "battello che ha percorso l'oceano della infinità degli indivisibil" evitando il pericolo di "mettersi a repentaglio negli scogli di quella infinità". Più prudente Torricelli, quando assicura il lettore che "non ci inoltreremo però nell'immenso oceano della geometria cavalieriana, ma, con minore audacia, staremo vicini a terra".
- Avventurarsi nell'oceano degli infiniti nell'oceano degli infiniti è la metafora suggerita ai matematici del Seicento dalle imprese dei grandi navigatori, che hanno solcato gli oceani per esplorare nuovi continenti.

L'oceano dell'infinito

- Quando riceve una copia dei *Discorsi* Cavalieri saluta in Galileo il maestro che "con la scorta della buona geometria e con la tramontana del suo altissimo ingegno ha potuto felicemente navigare l'immenso oceano degli indivisibili, de' vacui, de gl'infiniti". Lo stesso Cavalieri, dopo la stesura della sua *Geometria indivisilibus* può felicemente condurre in porto, non la navicella di Nietzsche, ma il suo "battello che ha percorso l'oceano della infinità degli indivisibil" evitando il pericolo di "mettersi a repentaglio negli scogli di quella infinità". Più prudente Torricelli, quando assicura il lettore che "non ci inoltreremo però nell'immenso oceano della geometria cavalieriana, ma, con minore audacia, staremo vicini a terra".
- Avventurarsi nell'oceano degli infiniti nell'oceano degli infiniti è la metafora suggerita ai matematici del Seicento dalle imprese dei grandi navigatori, che hanno solcato gli oceani per esplorare nuovi continenti.
- Ma ancora all'inizio del Settecento, l'immagine dell'oceano compare negli *Elements de Géométrie de l'infini* apparsi in forma anonima a Parigi nel 1727, in realtà opera di Bernard Le Bovier de Fontenelle

L'Oceano dell'infinito negli *Elements de Géométrie* di Fontenelle

C'è un infinito metafisico – si legge in quegli *Elements* – che proprio di "una grandezza senza limiti in ogni senso, che comprende tutto e fuori dalla quale non c'è nulla". Tutt'altra cosa, molto diversa, è l'infinito che si considera in geometria, l'infinito geometrico: è "una grandezza più grande di ogni grandezza finita, ma non più grande di ogni grandezza", sostiene Fontenelle. A suo dire, "questa definizione consente che ci siano infiniti più piccoli o più grandi di altri infiniti".
L'infinito geometrico si presenta fin dai primi passi, e pervade tutta la geometria, per la buona ragione che "dà luogo agli incommensurabili il cui numero è infinitamente più grande dei commensurabili".
Si racconta, egli continua, che nei Paesi bassi grandi distese di terra sono state ricoperte dal mare, e solo le punte dei campanili sparse qua e là emergono dall'acqua. "È pressappoco così che l'Oceano dell'infinito ha sommerso tutti i numeri e tutte le grandezze e non restano che quelle commensurabili che noi possiamo conoscere perfettamente".



Le diagonali del pentagono regolare $ABCDE$ generano un nuovo pentagono regolare più piccolo $A'B'C'D'E'$ i cui lati sono paralleli ai lati del pentagono di partenza. Reiterando indefinitamente il procedimento si ottiene una successione telescopica di pentagoni regolari sempre più piccoli. In ciascuno dei pentagoni della successione il rapporto tra le diagonali e i lati degli infiniti pentagoni sempre lo stesso. Si dimostra che quel rapporto è dato dal cosiddetto numero aureo

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$


André e Simone Weil

Figure: André e Simone Weil

"Il fatto che vi siano rapporti che non sono nominabili" e per i Pitagorici "nominabile è un rapporto tra numeri interi, che vi siano stati dei *logoi alogoi*, l'espressione stessa è tanto sconvolgente che non posso credere che in un'epoca così drammatica nella sua essenza, e che ha conosciuto e provato a tal punto l'angoscia, un fatto così straordinario abbia potuto essere preso per una semplice scoperta scientifica"

Figure: André e Simone Weil

- *André a Simone*: La grande importanza attribuita alla proporzione "suggerisce che agli inizi del pensiero greco si sia avuto un sentimento della sproporzione tra il pensiero e il mondo (e, come dici tu, fra l'uomo e Dio) di un'intensità tale che hanno avuto bisogno di gettare ad ogni costo un ponte al di sopra di quell'abisso". Nietzsche "ha meditato più di ogni altro sul pensiero greco arcaico"

Figure: André e Simone Weil

- *André a Simone*: La grande importanza attribuita alla proporzione "suggerisce che agli inizi del pensiero greco si sia avuto un sentimento della sproporzione tra il pensiero e il mondo (e, come dici tu, fra l'uomo e Dio) di un'intensità tale che hanno avuto bisogno di gettare ad ogni costo un ponte al di sopra di quell'abisso". Nietzsche "ha meditato più di ogni altro sul pensiero greco arcaico"
- *Simone a André*: "Non posso sopportare Nietzsche; mi esaspera, persino quando esprime cose che penso"

Ancora André e Simone Weil: lettere dal e al carcere nel 1940

L'irruzione dell'infinito sconvolse l'armonia numerica del mondo dei Pitagorici. André: "Ciò che rende oltremodo originale la matematica greca è forse il fatto che non esiste l'approssimazione: questo ha ucciso il numero a vantaggio del *logos* (è tutto qui il dramma della scoperta degli irrazionali)". "Certo, c'è stato un dramma di portata immensa – ribatte Simone. La divulgazione della scoperta ha gettato sulla nozione di verità un discredito che dura tuttora" innescando un processo che ha finito per distruggere la civiltà ellenica e, con le armi romane, infine "uccidere la Grecia". Perciò, conclude Simone, "gli dei hanno avuto ragione a far perire in un naufragio" Ippaso di Metaponto il quale, racconta Giamblico, contravvenendo alle prescrizioni di Pitagora divulgò la notizia della scoperta che non doveva uscire dalla cerchia della confraternita, e leggenda vuole che per ciò morisse in un naufragio.

L'*anthyphairesis* di Euclide

Per caratterizzare le grandezze incommensurabili tra loro Euclide ricorre alla procedura dell*anthyphairesis*, l'algoritmo di reiterata sottrazione applicato a grandezze omogenee (per es. segmenti) che risale a Teeteto: dati due segmenti a e b con $a > b$, si sottrae ripetutamente b da a, finch non si ottiene un resto $r < b$ (in altri termini, b contenuto n volte in a, con resto $r < b$). Se $r = 0$, allora b è l'unità di misura comune ad a e b. Se $r \neq 0$, si ripete il procedimento con b e r. Se r contenuto un numero intero di volte in b, allora r è l'unit di misura comune cercata, altrimenti si continua. Questo procedimento si arresta o no dopo un numero finito di passi a seconda che ci sia una unità di misura comune ad a e b, oppure non ci sia. In quest'ultimo caso il procedimento di *anthyphairesis* continua indefinitamente, e i resti decrescono fino a diventare minori di ogni grandezza prefissata: a e b non hanno *logos* comune, sono tra loro incommensurabili. È quanto Euclide afferma e dimostra nel Libro X degli *Elementi*: "se, quando la minore di due grandezze diseguali è continuamente sottratta a sua volta dalla maggiore, quello che resta non misura mai quello che lo precede, le grandezze saranno incommensurabili".

La natura del continuo secondo Aristotele

- "Nel piccolo non si dà un minimo, ma sempre un più piccolo" si legge in un frammento di Anassagora. "Perché ciò che è, per quanto venga suddiviso, non può cessare di essere". Ne segue che il continuo non può essere composto di punti "separati l'uno dall'altro come se fossero tagliati con un'accetta".

La natura del continuo secondo Aristotele

- "Nel piccolo non si dà un minimo, ma sempre un più piccolo" si legge in un frammento di Anassagora. "Perché ciò che è, per quanto venga suddiviso, non può cessare di essere". Ne segue che il continuo non può essere composto di punti "separati l'uno dall'altro come se fossero tagliati con un'accetta".
- "L'infinito si manifesta in primo luogo nel continuo" afferma Aristotele del terzo libro della *Fisica*. La ragione, spiega lo Stagirita, risiede nel fatto che nel definire il continuo occorre servirsi del concetto di infinito, "perché è continuo ciò che è divisibile all'infinito".

La natura del continuo secondo Aristotele

- “Nel piccolo non si dà un minimo, ma sempre un più piccolo” si legge in un frammento di Anassagora. “Perché ciò che è, per quanto venga suddiviso, non può cessare di essere”. Ne segue che il continuo non può essere composto di punti “separati l'uno dall'altro come se fossero tagliati con un'accetta”.
- “L'infinito si manifesta in primo luogo nel continuo” afferma Aristotele del terzo libro della *Fisica*. La ragione, spiega lo Stagirita, risiede nel fatto che nel definire il continuo occorre servirsi del concetto di infinito, “perché è continuo ciò che è divisibile all'infinito”.
- La concezione aristotelica di ‘punto’ come indivisibile dotato di posizione implica che una collezione comunque grande di punti non possa dar luogo a qualcosa di divisibile come una linea. “La retta è continua e il punto è indivisibile” e dunque “è impossibile che qualcosa di continuo sia composto di indivisibili” dichiara Aristotele.

La natura del continuo

- "Una somma di punti non dà una linea" ripete ancora Hegel nella Nota III sull'infinito della *Scienza della logica* (1831).

La natura del continuo

- “Una somma di punti non dà una linea” ripete ancora Hegel nella Nota III sull’infinito della *Scienza della logica* (1831).
- Ne *La teoria generale delle funzioni* (1882) Paul du Bois Reymond sostiene che una concezione statica dello spazio (come quella di Dedekind e Cantor) “non può generare la nozione di una linea uniforme definita in maniera rigorosa da una successione comunque densa di punti, poiché dopo tutto i punti sono privi di dimensione e pertanto, comunque densa possa essere, la successione di punti non può mai diventare un intervallo, che dev’essere sempre considerato come la somma di intervalli tra punti”.

La natura del continuo

- "Una somma di punti non dà una linea" ripete ancora Hegel nella Nota III sull'infinito della *Scienza della logica* (1831).
- Ne *La teoria generale delle funzioni* (1882) Paul du Bois Reymond sostiene che una concezione statica dello spazio (come quella di Dedekind e Cantor) "non può generare la nozione di una linea uniforme definita in maniera rigorosa da una successione comunque densa di punti, poiché dopo tutto i punti sono privi di dimensione e pertanto, comunque densa possa essere, la successione di punti non può mai diventare un intervallo, che dev'essere sempre considerato come la somma di intervalli tra punti".
- Anche Veronese nei *Fondamenti della geometria* (1891) sostiene che "il punto non è parte del continuo rettilineo" e che "tutti i punti che si possono immaginare in esso, per quanti siano, non costituiscono uniti insieme il continuo". Come aveva detto Aristotele, siccome "un punto non può essere continuo con punto", una linea non può esser composta da punti.

La natura del continuo

- "Una somma di punti non dà una linea" ripete ancora Hegel nella Nota III sull'infinito della *Scienza della logica* (1831).
- Ne *La teoria generale delle funzioni* (1882) Paul du Bois Reymond sostiene che una concezione statica dello spazio (come quella di Dedekind e Cantor) "non può generare la nozione di una linea uniforme definita in maniera rigorosa da una successione comunque densa di punti, poiché dopo tutto i punti sono privi di dimensione e pertanto, comunque densa possa essere, la successione di punti non può mai diventare un intervallo, che dev'essere sempre considerato come la somma di intervalli tra punti".
- Anche Veronese nei *Fondamenti della geometria* (1891) sostiene che "il punto non è parte del continuo rettilineo" e che "tutti i punti che si possono immaginare in esso, per quanti siano, non costituiscono uniti insieme il continuo". Come aveva detto Aristotele, siccome "un punto non può essere continuo con punto", una linea non può esser composta da punti.
- Questa tesi trova largo seguito nei chierici medioevali, insieme alla confutazione dell'atomismo democriteo.

Doctores medioevali

- Nell'*Opus majus* del 1267 Ruggero Bacone afferma che un qualunque corpo è divisibile all'infinito, e "tuttavia non per questo il mondo sarà composto di infinite parti materiali, chiamate atomi, come hanno sostenuto Democrito e Leucippo". Se così fosse la diagonale e lato di un quadrato non solo sarebbero commensurabili ma risulterebbero addirittura uguali, come Bacone illustra con un disegno che tra diagonale e lato stabilisce una corrispondenza punto a punto.

Doctores medioevali

- Nell'*Opus majus* del 1267 Ruggero Bacone afferma che un qualunque corpo è divisibile all'infinito, e "tuttavia non per questo il mondo sarà composto di infinite parti materiali, chiamate atomi, come hanno sostenuto Democrito e Leucippo". Se così fosse la diagonale e lato di un quadrato non solo sarebbero commensurabili ma risulterebbero addirittura uguali, come Bacone illustra con un disegno che tra diagonale e lato stabilisce una corrispondenza punto a punto.
- Se così argomenta il *Doctor mirabilis* Bacone, non può certo esser da meno il *Doctor subtilis* Duns Scoto, che fornisce la stessa dimostrazione ricorrendo a due circonferenze concentriche: poste in corrispondenza biunivoca da raggi uscenti dal centro comune, esse risulterebbero addirittura uguali.

Doctores medioevali

- Nell'*Opus majus* del 1267 Ruggero Bacone afferma che un qualunque corpo è divisibile all'infinito, e "tuttavia non per questo il mondo sarà composto di infinite parti materiali, chiamate atomi, come hanno sostenuto Democrito e Leucippo". Se così fosse la diagonale e lato di un quadrato non solo sarebbero commensurabili ma risulterebbero addirittura uguali, come Bacone illustra con un disegno che tra diagonale e lato stabilisce una corrispondenza punto a punto.
- Se così argomenta il *Doctor mirabilis* Bacone, non può certo esser da meno il *Doctor subtilis* Duns Scoto, che fornisce la stessa dimostrazione ricorrendo a due circonferenze concentriche: poste in corrispondenza biunivoca da raggi uscenti dal centro comune, esse risulterebbero addirittura uguali.
- Conclusioni analoghe si ritrovano ancora nel *Labyrinthus sive de compositione continui* (1631), del teologo di Lovanio Libertus Fromondus (ovvero Libert Froidmond) indirizzato a filosofi, matematici, e teologi per combattere l'atomismo. Se spazio e tempo fossero composti di indivisibili estesi, neppure un cavallo alato riuscirebbe a raggiungere una tartaruga che parte con un certo vantaggio, sostiene Fromondus memore dell'Achille di Zenone.

Contro il movimento

- Un punto mobile su una retta non può andare da un punto A a un punto B perché dovrebbe raggiungere prima il punto medio C di AB, e poi il punto medio D di CB e così all'infinito.

Contro il movimento

- Un punto mobile su una retta non può andare da un punto A a un punto B perché dovrebbe raggiungere prima il punto medio C di AB, e poi il punto medio D di CB e così all'infinito.
- Lunghezza, tempo e in generale ogni continuo, spiega Aristotele, "vengono detti infiniti in due accezioni, infiniti per la divisione, o per gli estremi". Degli infiniti nella seconda accezione, ossia secondo la quantità "non certo possibile toccare i vari punti in un tempo finito", cosa possibile invece per gli infiniti secondo la divisione perch anche il tempo è infinito allo stesso modo.

Contro il movimento

- Un punto mobile su una retta non può andare da un punto A a un punto B perché dovrebbe raggiungere prima il punto medio C di AB, e poi il punto medio D di CB e così all'infinito.
- Lunghezza, tempo e in generale ogni continuo, spiega Aristotele, "vengono detti infiniti in due accezioni, infiniti per la divisione, o per gli estremi". Degli infiniti nella seconda accezione, ossia secondo la quantità "non certo possibile toccare i vari punti in un tempo finito", cosa possibile invece per gli infiniti secondo la divisione perch anche il tempo è infinito allo stesso modo.
- L'argomento della dicotomia ha dunque a che fare con uno spazio finito infinitamente divisibile, così come il tempo. Ne segue una corrispondenza tra spazio e tempo infiniti rispetto alla divisione, non essendo affatto assurdo – afferma Aristotele – che "in un tempo infinito si percorrano elementi o punti infiniti", giacché "l'infinito inerisce allo stesso modo alla lunghezza oltre che al tempo".

Ancora sulla natura del continuo

- Dice Aristotele che "se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due: infatti segna un inizio e una fine". L'inizio di una metà e la fine dell'altra.

Ancora sulla natura del continuo

- Dice Aristotele che "se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due: infatti segna un inizio e una fine". L'inizio di una metà e la fine dell'altra.
- Per Dedekind nel 1872 l''essenza' della continuità consiste nella proposizione (assioma) che esiste uno e un sol punto che produce una suddivisione della retta in due parti.

Ancora sulla natura del continuo

- Dice Aristotele che "se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due: infatti segna un inizio e una fine". L'inizio di una metà e la fine dell'altra.
- Per Dedekind nel 1872 l''essenza' della continuità consiste nella proposizione (assioma) che esiste uno e un sol punto che produce una suddivisione della retta in due parti.
- Hermann Weyl nel 1927 spiega che il continuo, o la variabile, è rappresentata da "una successione di scelte 'in divenire' (*werdende Wahlfolge*), creata *passo passo da scelte non condizionate e indipendenti l'una dall'altra*, e che rimane perci necessariamente *in statu nascenti*" mentre "una successione determinata *ad infinitum* da una legge rappresenta un singolo numero reale appartenente al continuo".

Ancora sulla natura del continuo

- Dice Aristotele che “se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due: infatti segna un inizio e una fine”. L’inizio di una metà e la fine dell’altra.
- Per Dedekind nel 1872 l’‘essenza’ della continuità consiste nella proposizione (assioma) che esiste uno e un sol punto che produce una suddivisione della retta in due parti.
- Hermann Weyl nel 1927 spiega che il continuo, o la variabile, è rappresentata da “una successione di scelte ‘in divenire’ (*werdende Wahlfolge*), creata *passo passo da scelte non condizionate e indipendenti l’una dall’altra*, e che rimane perci necessariamente *in statu nascenti*” mentre “una successione determinata *ad infinitum* da una legge rappresenta un singolo numero reale appartenente al continuo”.
- Secondo Brouwer il continuo non è composto di parti, sottolinea Weyl, aggiungendo che nella concezione intuizionista “trova una formulazione matematica precisa una vecchia verità espressa da Aristotele”.

La ruota di Aristotele

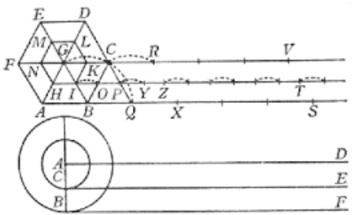


Figure: Galileo, *Discorsi e dimostrazioni...* (1638)

- “Salv. : Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?”

La ruota di Aristotele

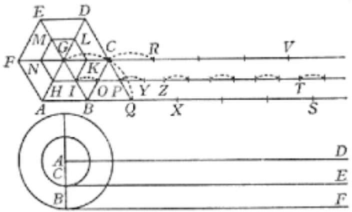


Figure: Galileo, *Discorsi e dimostrazioni...* (1638)

- "Salv. : Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?"
- "Sagr.: Il negozio è veramente molto intrigato..."

La ruota di Aristotele

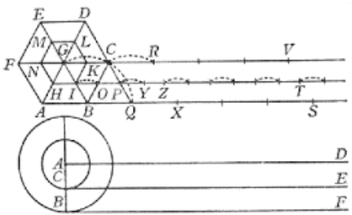


Figure: Galileo, *Discorsi e dimostrazioni...* (1638)

- "Salv. : Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?"
- "Sagr.: Il negozio è veramente molto intrigato..."
- "Sagr.: Ne' cerchi (che son poligoni di lati infiniti) la linea passata da gl'infiniti lati del cerchio grande [è] pareggiata in lunghezza dalla linea passata da gl'infiniti lati del minore . . . con l'interposizione d'altrettanti vacui (non quanti)".

La composizione del continuo

Nelle *Esercitazioni filosofiche* (1633) che il peripatetico padovano Antonio Rocco dedica a Urbano VIII, intervenendo in difesa della filosofia aristotelica giudica "difficile, inintelligibile e per avventura falso" il detto *sphera tangit planum in puncto*, che una sfera tangente a un piano in un punto, giacché ne seguirebbe (contro Aristotele) che la linea è composta di punti. Essendo vero che il continuo consta di parti sempre divisibili, afferma Galileo, "dico che è verissimo e necessario che la linea sia composta di punti e il continuo di indivisibili", e invita il suo interlocutore ad aprire gli occhi alla luce che è "stata forse celata fin qui", e in tal modo scorgere "chiaramente che il continuo è divisibile in parti sempre divisibili sol perché consta di indivisibili" dal momento che, se la suddivisione si deve poter continuare sempre, bisogna necessariamente che le parti siano infinite (altrimenti la suddivisione ad un certo punto si arresterebbe). E se sono infinite, necessariamente "bisogna che non sieno quante", spiega Galileo, "perché infiniti quanti compongono un quanto infinito".

Contro gli indivisibili

La condanna degli indivisibili da parte dei gesuiti viene definitivamente ribadita nel 1651 nell'*Ordinatio pro studiis superioribus*. Tra le 65 tesi filosofiche che vi sono condannate figurano proposizioni come "Il continuo delle successioni consta solo di indivisibili", o "L'infinito, in numero o grandezza, si può racchiudere tra due unità, o due punti".
Anche Spinoza nell'*Ethica more geometrico demonstrata* (1677) scrive che "altri, dopo aver finto che una linea sia composta da punti, sono bravi a trovare molti argomenti con cui mostrare che essa non si può dividere all'infinito; e, in effetti, non è meno assurdo sostenere che la sostanza corporea si componga di parti, ossia di corpi, di quanto lo sia che un corpo si componga di superfici, le superfici di linee, e queste, infine, di punti".

Una nuova "fantasticheria"

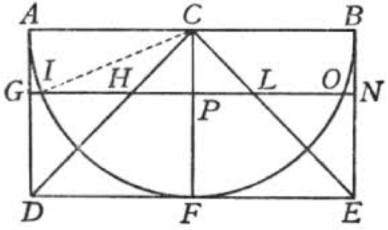


Figure: Galileo, *Discorsi e dimostrazioni...*

Il fascino dell'infinito è tale che "l'humano discorso non vuol rimanersi dall'aggirarsegli intorno". Dopo la ruota di Aristotele, Salviati presenta una nuova "fantasticheria" di natura paradossale. Prendendo a prestito un solido studiato a suo tempo da Luca Valerio, Salviati si chiede "come si possa mai capire, che un sol punto sia uguale a una linea?"
Ruotando la figura intorno all'asse CF si ottiene un cilindro, un cono e una semisfera. Poi, se si immagina di togliere la semisfera "quel che rimarr del cilindro", dice Salviati, è una figura simile a una "scodella".

Una nuova “fantasticheria”

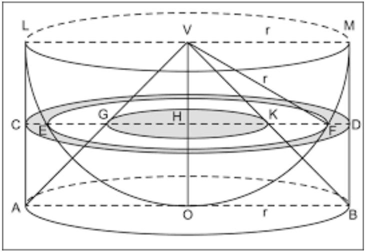


Figure: Galileo, *Discorsi e dimostrazioni...*

Se si taglia il solido con un piano GN parallelo alla base DE, le sezioni della scodella e del cono hanno aree uguali (e uguali sono anche il cono CHL e la parte superiore della scodella). Dunque, “alzando e alzando” il piano secante, alla fine le sezioni si ridurranno risp. a una circonferenza (“l’orlo supremo della scodella”) e a un punto (il vertice V del cono).
“Or mentre che nella diminuzione de i due solidi si va, sino all’ultimo, mantenendo sempre tra essi la egualità ben par conveniente il dire che gli altissimi ed ultimi termini di tali menomamenti restino tra di loro eguali, e non l’uno infinitamente maggior dell’altro”.

“Un pedantesco affronto”

Per Cavalieri, invece, quando si arriva agli “altissimi ed ultimi termini” non si hanno più piani e queste ultime “esinanitioni” come egli le chiama si possono dire uguali solo nel senso che siamo “noi arrivati al nullo piano tanto nel cono quanto nella scodella, non havendoci che far niente che in uno resti un punto e nell'altro una linea”, dal momento che “sia niun piano la linea come il ponto”.

Un argomento che Galileo liquida come “un pedantesco affronto” verso la sua “specolazione tanto gentile e peregrina”.

Oscuri, e dubbj sentieri, o più tosto laberinti

Si tratta di difficoltà che "derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti".
Osserva Salviati, "l'infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gl'indivisibili". Per immaginare che una linea continua sia composta di indivisibili "conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile".
Ma quando ci si avventura lungo gli "oscuri sentieri" o meglio i "laberinti" degli infiniti e infinitesimi, si presenta spontaneo un dubbio che Simplicio reputa insolubile: date due linee, per es. due segmenti, disuguali, si dirà che "l'infinit dei punti della linea maggiore eccederà l'infinità dei punti della minore"? ovvero che si può dare "un infinito maggior dell'infinito"?
Salviati a proposito di due lineee disuguali: "quando il Sig. Simplicio mi propone e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti". Infiniti sì, come dice Galileo, ma anche "altrettanti" nel senso che chiarirà Cantor oltre due secoli dopo.
L'argomento celebre dei numeri dei quadrati la conclusione di Galileo è che "gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate".

Labirinti inesplicabili

Kepler rigetta con decisione l'idea che l'universo sia infinito, e tratta con sarcasmo la "setta di filosofi" che non basano i propri ragionamenti sui sensi e "non accordano le cause delle cose con gli esperimenti" ma concepiscono "tra le pareti del proprio cervello una qualche opinione sulla costituzione del mondo" e poi "vi si attaccano coi denti" e adattano "ai propri assiomi" le cose che accadono "tirandole per i capelli".
Contro di essi si scaglia nel 1606 nel *De stella nova in pede Serpentarii* commentando l'apparizione di una "nuova stella". Con la loro infinità, che "proviene dalle antiche scuole dei filosofi pagani", i filosofi di quella setta che "abusa dell'autorità copernicana" si perdono per Kepler in "labirinti inesplicabili". Come avvenuto allo "sventurato Giordano Bruno", che "rende il mondo infinito in modo tale, che quante sono le stelle fisse, tanti sono i mondi". Basta solo il pensiero "di errare in questa immensità priva di limiti, centro e luoghi certi" a provocare in Kepler "non so qual occulto orrore".

Infiniti mondi

“Come è possibile che l’universo sia infinito?” chiede Elpino a Filoteo nel dialogo *De infinito universo e mondi*, da Bruno prudentemente stampato a Venezia nel 1584. “Come possibile che l’universo sia finito?” ribatte Filoteo. Non è certo attraverso i sensi che abbiamo nozione dell’infinito.
Bruno fa dire in conclusione a Filoteo che “uno è il loco generale, uno il spacio immenso che chiamar possiamo liberamente vacuo; in cui sono innumerabili e infiniti globi, come vi è questo in cui vivemo e vegetamo noi. Cotal spacio lo diciamo infinito, perché non è raggione, convenienza, possibilità, senso o natura che debba finirlo”.
Bruno spiega che nella sua opera “si magnifica l’eccellenza di Dio”, si manifesta “la grandezza de l’imperio suo” che “non si glorifica in uno, ma in soli innumerevoli: non in una terra, un mondo, ma in duecento mila, dico infatti in infiniti”. Sfortunatamente per Bruno, i reverendi padri dell’Inquisizione non dovettero crederci.

Interminati spazi

Per il Calvino Bruno è un "grande cosmologo visionario, che vede l'universo infinito e composto di mondi innumerevoli, ma non può dirlo 'totalmente infinito', che è prerogativa solo di Dio "perché tutto lui è in tutto il mondo, ed in ciascuna sua parte infinitamente e totalmente". Secondo Borges, per Bruno "la rottura delle volte stellari fu una liberazione". Bruno "cercò le parole per manifestare agli uomini lo spazio copernicano" e proclamò con esultanza che "possiamo affermare con certezza che l'universo è tutto esso centro, o che il centro dell'universo sta dappertutto e la sua circonferenza in nessun luogo". Così attribuendo allo spazio ciò che nello pseudo-ermetico *Liber XXIV philosophorum* – una compilazione anonima del XII secolo – è invece prerogativa, se non una delle definizioni, di Dio (*sphera infinita cuius centrum ubique, circumpherentia nullibi*). Per Kepler il cosmo ha forma sferica finita perché, come egli ripete in più luoghi, il mondo è l'immagine corporea di Dio (*mundus est imago Dei corporea*). Contrariamente a Kepler, Galileo non sostiene la finitezza dell'universo, ma neppure aderisce alle fantasie bruniane. Dice Salviati a Simplicio: "né voi né alcun altro ha mai provato che il mondo è finito e dotato di figura o infinito e interminato". Interminato come gli spazi di Leopardi.

Infinito silenzio

Anche Pascal afferma nei *Pensieri* che lo spazio (non Dio) è "una sfera infinita il cui centro sta dappertutto e la cui circonferenza in nessun luogo". Espressioni come questa non vanno prese in modo rigoroso, avverte Leibniz nel 1692. Sono "un po' come gl'immaginari in algebra", non rigorosi ma utili per la scoperta (*pour linvention*).

"Il silenzio eterno di quegli spazi infiniti mi atterrisce" dice Pascal per esprimerne il disorientamento di fronte all'idea che l'universo non sia chiuso dal cielo delle stelle fisse "come da una camicia o da una tunica", per dirla con Kepler. Caustico il commento di Borges: "Pascal menziona con disdegno 'l'opinione di Copernico' ma la sua opera riflette per noi la vertigine di un teologo, esiliato dall'orbe dell'Almagesto e smarrito nell'universo copernicano di Kepler e Bruno". E il suo smarrimento trova eco in "quello infinito silenzio" del poeta di Recanati.

Infinito e nulla

Nei *Pensieri* Pascal afferma che “non c’è geometra che non creda alla divisibilità all’infinito dello spazio” e tuttavia, al tempo stesso, “non c’è geometra che comprenda una divisione infinita”. Di modo che, continua Pascal, la potenza della natura ci circonda da ogni parte con una doppia infinità, “una infinità e un nulla di estensione, una infinità e un nulla di numero, una infinità e un nulla di movimento, una infinità e un nulla di tempo”. Ovvero, come dirà Nietzsche, “non andiamo forse errando in un nulla infinito?”
Ma per Leopardi “niente nella natura annuncia l’infinito, l’esistenza di alcuna cosa infinita. L’infinito è un parto della nostra immaginazione”.

Se per Leopardi l'infinito "è un'idea, un sogno, non una realtà: almeno niuna prova abbiamo dell'esistenza di esso, neppur per analogia, e possiam dire di essere a un'infinita distanza dalla cognizione e dalla dimostrazione di una tale esistenza", e anzi "si potrebbe anche disputare non poco se l'infinito sia possibile (cosa che alcuni moderni hanno ben negato) e se questa idea, figlia della nostra immaginazione, non sia contraddittoria in se stessa, cioè falsa in metafisica", per Edgar Allan Poe infinito "non è affatto l'espressione di un'idea, ma dello sforzo di arrivarci. Essa rappresenta lo sforzo possibile di arrivare a una concezione impossibile". Così in *Eureka*, un "poema in prosa" visionario e fantastico più che scientifico, che Poe scrive nel 1848, un anno prima della morte a soli 40 anni dedicandolo a Alexander von Humboldt. "Personalmente – continua Poe – mi si consentirà di dire che io NON POSSO concepire l'infinito, e sono convinto che nessun essere umano lo possa".

Nel 1702 Leibniz spiega a Varignon che “non c'è affatto bisogno di far dipendere l'analisi matematica dalle controversie metafisiche né di assicurare che esistono in natura delle linee infinitamente piccole, a rigore o rispetto alle nostre, né, per conseguenza, infinitamente pi grandi”. Se qualcuno non le ammette come cose reali, continua Leibniz, può servirsene come delle nozioni ideali per abbreviare i ragionamenti, simili alle radici immaginarie dell'algebra.
E ancora: “gli infiniti e gli infinitesimi sono talmente fondati che le cose accadono in geometria, e anche in natura, come se fossero delle perfette realtà, testimoni della nostra analisi geometrica”.
E a Fontenelle: “è vero che per me gli infiniti non sono delle totalità e gli infinitesimi non sono delle grandezze. La mia metafisica li bandisce dai suoi territori. Dà loro ricovero solo negli spazi immaginari del calcolo geometrico, dove queste nozioni sono appropriate solo come le cosiddette radici immaginarie”.
Altrove dirà che gli infinitesimi sono delle “finzioni ben fondate”.

Gli infiniti: una realtà matematica

Per secoli le dispute sulla natura dell'infinito hanno affaticato filosofi e teologi prima ancora che matematici. Cartesio riserva solo a Dio il nome di infinito, come fa Spinoza. Anche per Leibniz è un attributo di Dio, mentre per D'Alembert "la metafisica dell'infinito e degli infinitesimi" del tutto inutile al nuovo calcolo differenziale.
Con Cantor l'infinito, o meglio gli infiniti – scopre che sono almeno due, e da qui genera la successione degli ordinali e cardinali transfiniti – diventa una una realtà matematica.
Secondo Hilbert "è difficile trovare un'idea che, più dell'infinito, abbia stimolato l'intelletto in modo così fecondo; tuttavia nessun concetto, più dell'infinito, ha bisogno di una chiarificazione", convinto che "una chiarificazione definitiva della natura dell'infinito sia ormai diventata necessaria per l'onore stesso dellintelletto umano". La moderna analisi matematica "una sinfonia dellinfinito". Ma l'infinito di cui ci si occupa nel calcolo infinitesimale creato da Leibniz e Newton è l'infinito "in divenire", è l'infinito potenziale per parlare il linguaggio di Aristotele. "Non è l'infinito vero e proprio', che per Hilbert è l'infinito attuale e la teoria del transfinito di Cantor. Infinito attuale che, dopo Cantor, ha lasciato la filosofia e la teologia per entrare stabilmente a far parte della matematica.