Mathesis
Società Italiana di Scienze
Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

UNIVERSITAS STUDIORUM MEDIOLANENSIS

FETTE PERFETTE

I volumi dei solidi per accumulo di superfici

un Laboratorio di Matematica
di
Giulia Bini

DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

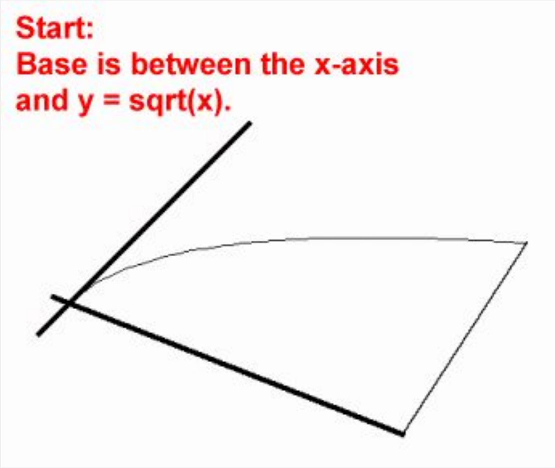
Dipartimento di Matematica Giuseppe Peano, Unito
LSS Leonardo da Vinci, Milano

Chi sono

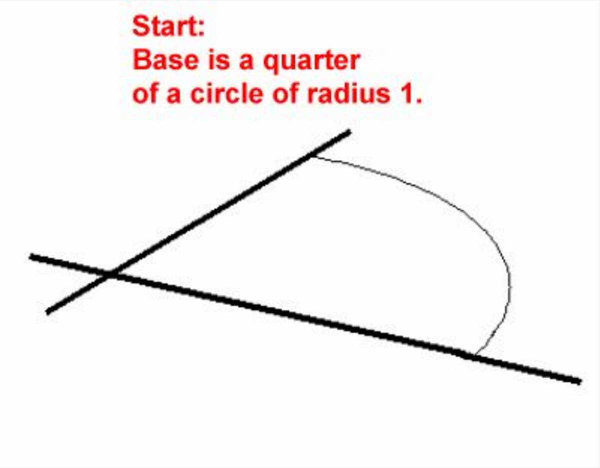
Mi chiamo GIULIA BINI, mi sono laureata in Matematica all'Università Statale di Milano nel 1988 e negli ultimi 25 anni ho lavorato come insegnante di Matematica e Fisica, principalmente al Liceo Scientifico.

Nel 2008/09 ho seguito il Corso di perfezionamento in “Tecniche e Didattica laboratoriale” dell’Università Statale degli Studi di Milano, dal 2013 al 2015 ho frequentato il Master DOL sulle Tecnologie nella Didattica del Politecnico di Milano e dal 2017 sono dottoranda in Didattica della Matematica all’Università degli Studi di Torino.

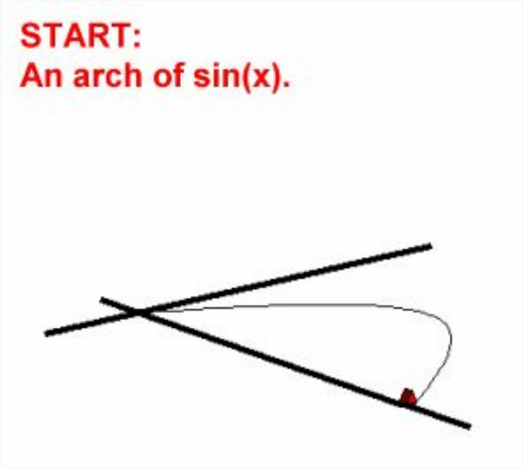
Di cosa stiamo parlando?
Non di pasticceria, purtroppo…



Sezioni semicircolari

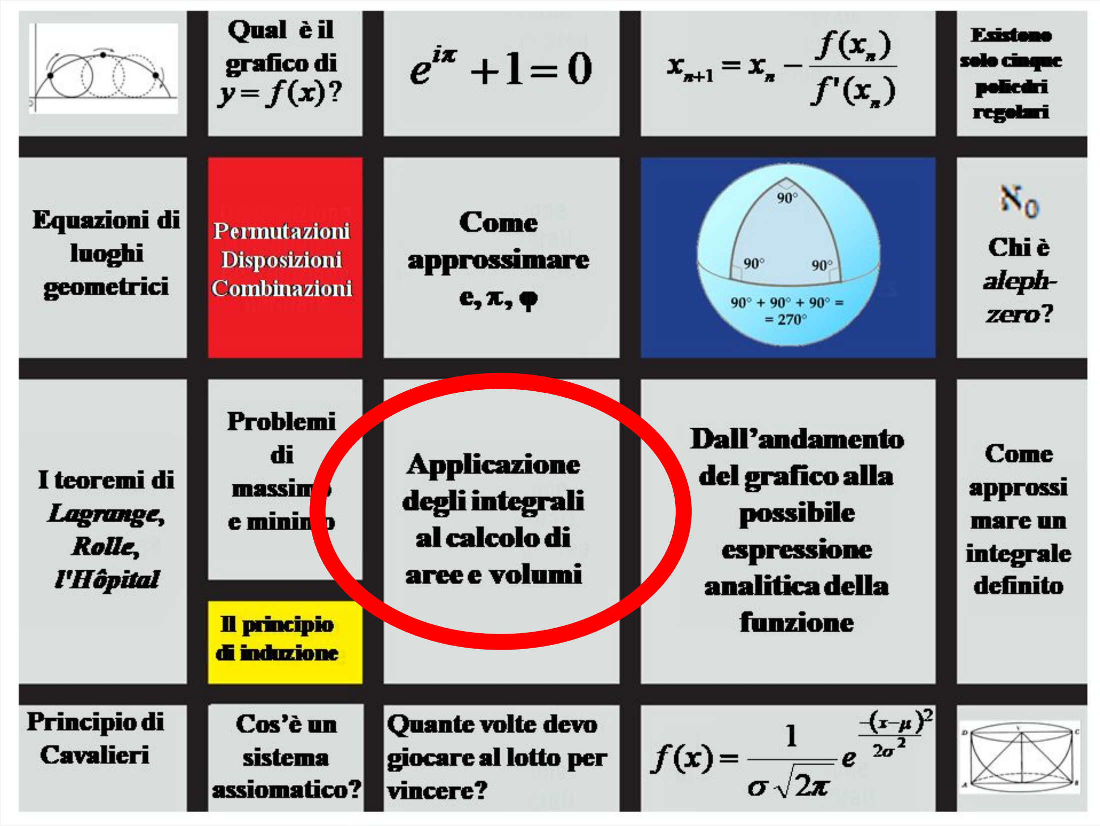


Sezioni quadrate

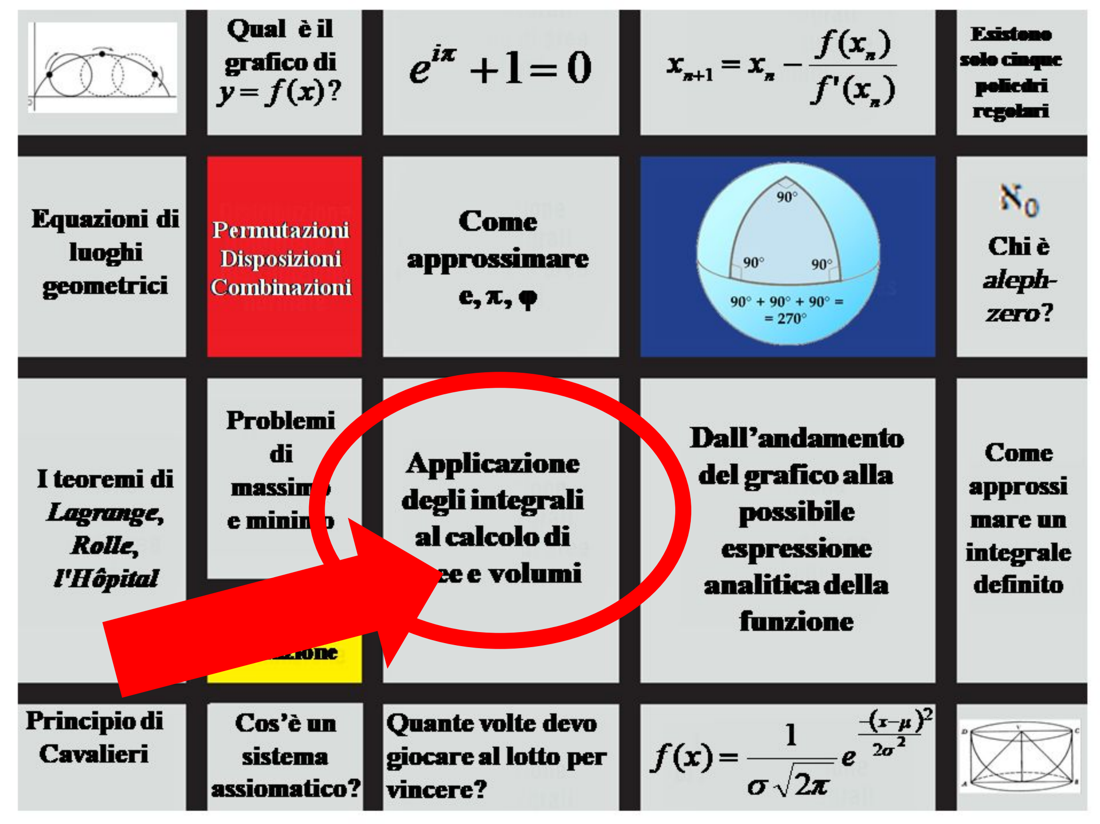


Sezioni triangolari

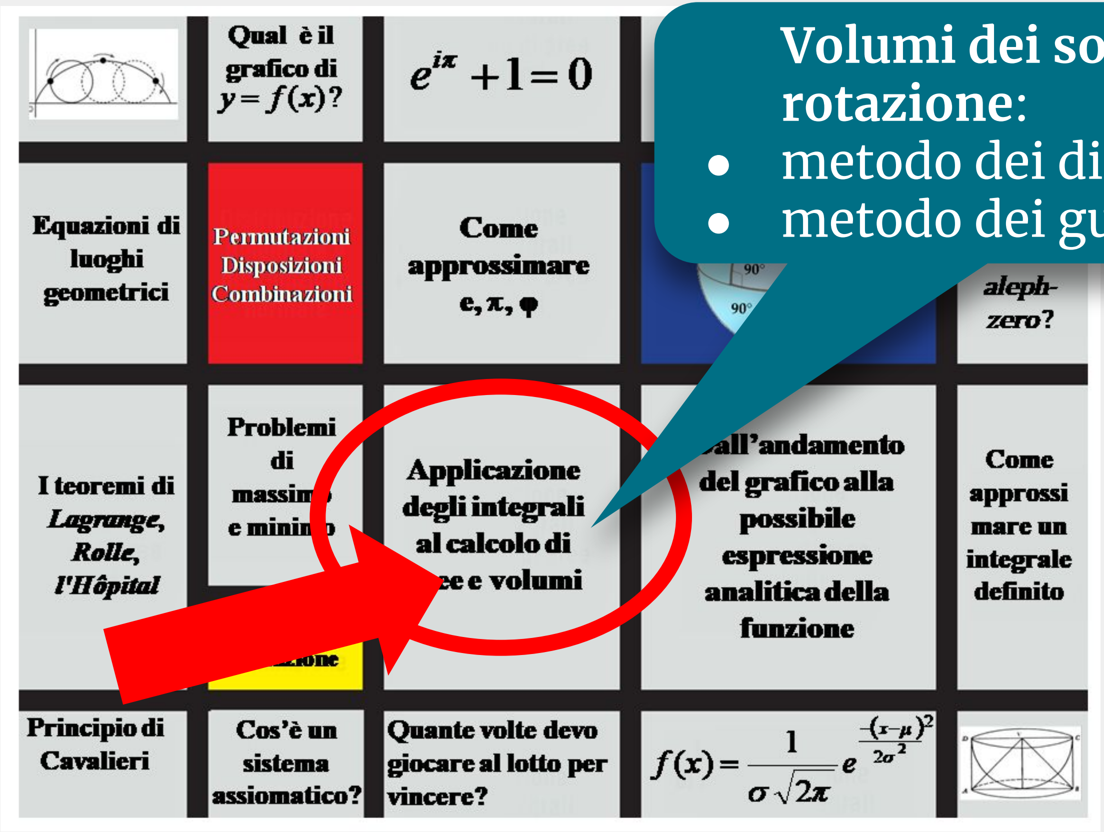
Dove siamo: la tavola degli apprendimenti



Dove siamo: la tavola degli apprendimenti



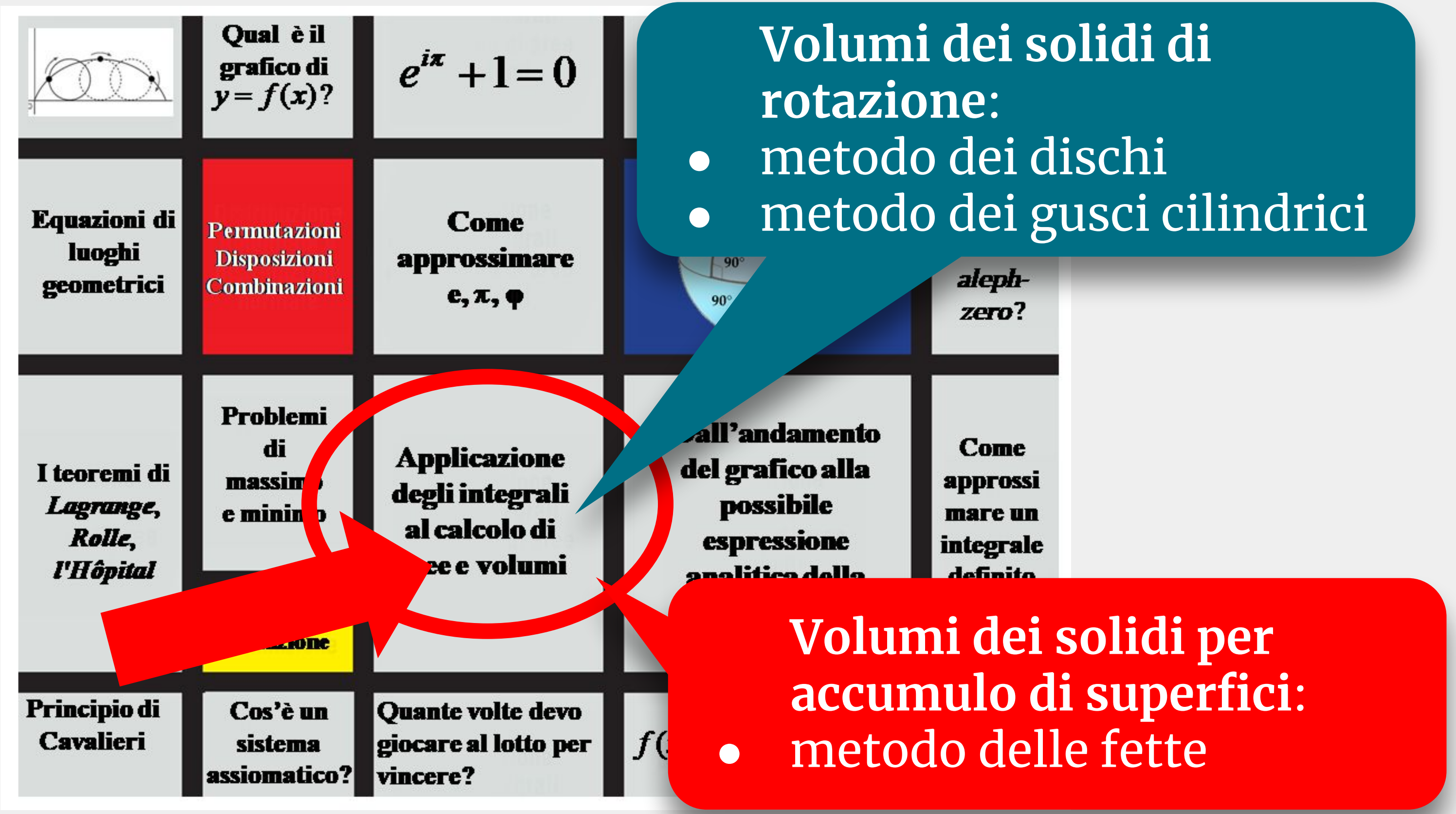
Dove siamo: la tavola degli apprendimenti



Volumi dei solidi di rotazione:

- metodo dei dischi
- metodo dei gusci cilindrici

Dove siamo: la tavola degli apprendimenti



degli apprendimenti

ABILITÀ VISUO-SPAZIALI: la forma del solido generato è abbastanza semplice da immaginare

ABILITÀ PROCEDURALI: la formula che esprime il volume del solido è sempre la stessa ed è sufficiente inserire i dati dell'esercizio (estremi ed espressione analitica della funzione)

Volumi dei solidi di rotazione:
- metodo dei dischi
- metodo dei gusci cilindrici

Volumi dei solidi per accumulo di superfici:
- metodo delle fette

degli apprendimenti

ABILITÀ VISUO-SPAZIALI: la forma del solido generato è abbastanza semplice da immaginare

ABILITÀ PROCEDURALI: la formula che esprime il volume del solido è sempre la stessa ed è sufficiente inserire i dati dell'esercizio (estremi ed espressione analitica della funzione)

Volumi dei solidi di rotazione:

- metodo dei dischi
- metodo dei gusci cilindrici

↑ **ABILITÀ VISUO-SPAZIALI:** la forma del solido generato **non è semplice** da immaginare

↑ **ABILITÀ PROCEDURALI:** la formula che esprime il volume del solido **va costruita in base alla consegna dell'esercizio**

Volumi dei solidi per accumulo di superfici:

- metodo delle fette

Le richieste nella seconda prova dell'Esame di Stato

Sessione ordinaria 2009
Seconda prova scritta

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

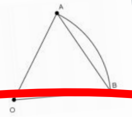
Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri e radianti*).



1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\operatorname{sen}x)$ con $x\in[0,\ 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r=1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r=2$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

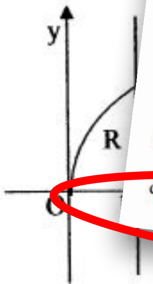
DI LICEO SCIENTI

DINAMENTO

TEMATICA

QUES

1. La regione R delimitata dal grafico di $y=2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x = 1 (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



Sessione ordinaria 2008
Seconda prova scritta

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

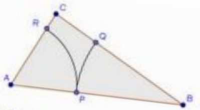
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B=\frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.

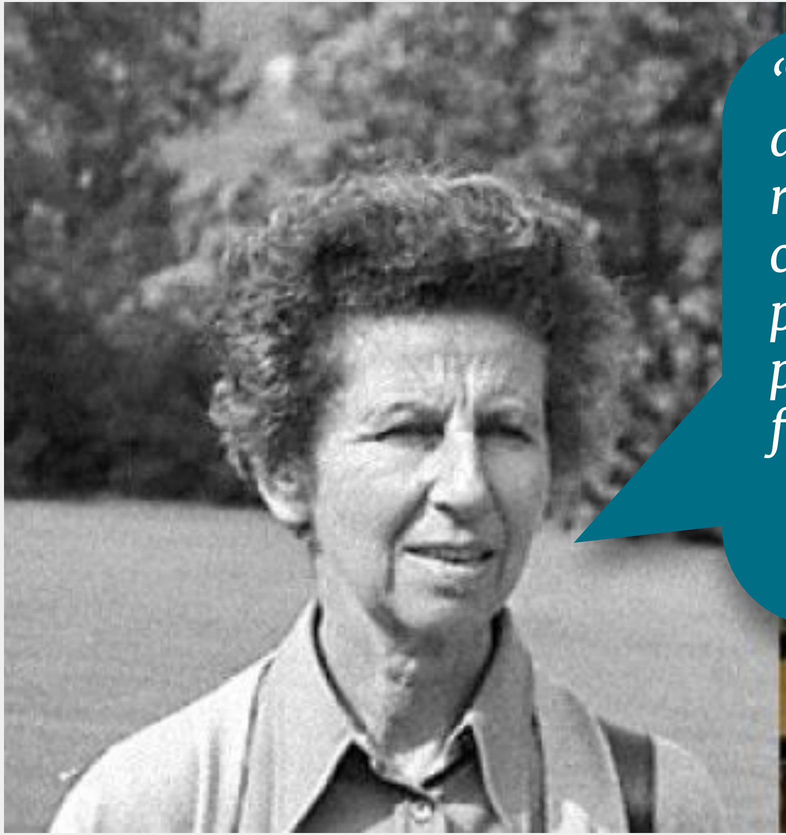


b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

Come facciamo? Prendiamo esempio!



“Ritengo senz’altro che si possa affermare che quanto più tempo i nostri ragazzi avranno dato allo studio del concreto, quanto più tempo avranno perduto nell’osservare, tanto meglio passeranno dopo alla comprensione delle forme astratte“

Emma Castelnuovo,
Didattica della Matematica 1963

La proposta didattica

Livello scolare: quinta Liceo Scientifico

Materiali: 3 fotocopie formato A3 (base del solido) + 3 fotocopie formato A4 (schede di lavoro), cartoncino colorato, forbici e colla (portati dai ragazzi)

Prerequisiti: formule per il calcolo delle aree piane, integrali indefiniti e integrale di Riemann, formula fondamentale del calcolo

Tempi: 1h di lezione

La proposta didattica: il valore aggiunto

Livello scolare: ...

Materiali: 3 ... del solido) + 3 ... lavoro), cartonci... ... (portati dai ragazzi)

Prerequisiti: formule per il calcolo ... piane, integrali indefiniti e integrale ... formula fondamentale del calcolo

Tempi: 1h di lezione

Domani portate cartoncino colorato, forbici e colla!

La proposta didattica: il valore aggiunto

Livello scolare: quinta Liceo Scientifico

Materiali: 3 fotocopie formato A4 (base del solido) + 3 fotocopie formato A3 (schede di lavoro), cartoncino colorato, forbici e colla (portati dai ragazzi)

Prerequisiti: formul... o delle aree piane, integrali inde... di Riemann, formula fondament...

Tempi: 1h di lezione

La proposta didattica

<u>Approccio didattico:</u> **costruttivista**, i ragazzi, attraverso un'esperienza embodied in cui fabbricano gli oggetti matematici, **arrivano da soli a comprendere e formalizzare** il concetto matematico sottostante

<u>Valore aggiunto:</u> la costruzione materiale dei modelli facilita la concettualizzazione di strutture tridimensionali difficili da rappresentare altrimenti

<u>Fonti</u>: ispirata ai lavori di Dickson e Peterson, completamento *hands-on* della lezione della prof.ssa Fico alla scuola estiva 2014 della Mathesis Nazionale

Una riflessione metodologica: il valore del laboratorio di Matematica

UMI - CIIM 2001

- Il laboratorio di matematica **non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività** volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici.
- L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della **bottega rinascimentale**, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.
- La **costruzione di significati,** nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività.
- È necessario ricordare che **uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale**, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, **incorpora idee**.

Una riflessione metodologica:
il valore del laboratorio di Matematica

Commissione Italiana per
l'Insegnamento della Matematica
Commissione Permanente
dell'Unione Matematica Italiana

UMI - CIIM

UMI - CIIM 2001

- Il laboratorio di matematica **non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività** volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici.
- L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della **bottega rinascimentale**, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.
- La **costruzione di significati,** nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività.
- È necessario ricordare che **uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale**, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, **incorpora idee**.

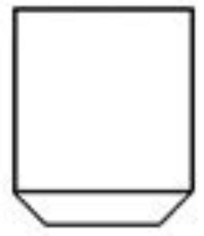
Le idee matematiche: dagli indivisibili di volume di Cavalieri all'integrale di Riemann

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x)dx$$

un volume è composto da aree piane come un libro da pagine

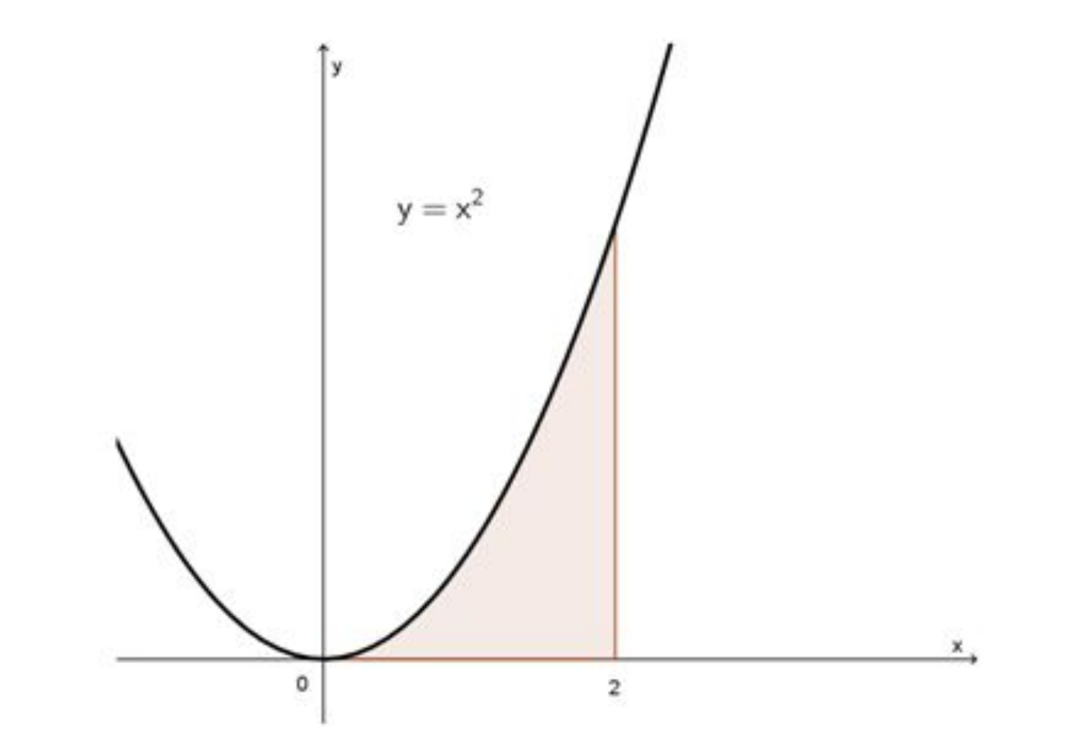
La proposta didattica

<u>Metodologia</u>: si divide la classe in **<u>3 gruppi</u>** e ad ogni gruppo si assegna una specifica sezione piana (quadrato, triangolo equilatero e semicerchio)

La proposta didattica: il trapezoide base

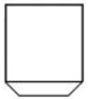
Si consegna quindi una stampa A3 del piano cartesiano in cui è evidenziato il trapezoide sotteso da $y=x^2$ tra 0 e 2, base del solido.



La proposta didattica: la scheda di lavoro

GRUPPO 1

Del solido S si sa che: la sua **base** è il trapezoide sotteso dalla parabola $y=x^2$ nell'intervallo tra 0 e 2 (vedi foglio)
le sue **sezioni** con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono **quadrati**



GRUPPO 2

Del solido S si sa che: la sua **base** è il trapezoide sotteso dalla parabola $y=x^2$ nell'intervallo tra 0 e 2 (vedi foglio)
le sue **sezioni** con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono **triangoli equilateri**

GRUPPO 3

Del solido S si sa che: la sua **base** è il trapezoide sotteso dalla parabola $y=x^2$ nell'intervallo tra 0 e 2 (vedi foglio)
le sue **sezioni** con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono **semicerchi**

A partire dalle informazioni ricevute, ciascun gruppo deve:

- costruire con la carta colorata **almeno una decina di sezioni del solido S** e incollarle sul foglio (si consiglia di lasciare un piccolo eccesso di carta alla base delle sezioni come nelle figure per facilitare l'operazione di incollatura)
- rispondere alle domande qui sotto e **trascrivere le risposte sul foglio** con il modello del solido

Domande	Trapezoide base sotteso da una generica funzione $y=f(x)$ in un intervallo $[a,b]$	Trapezoide base sotteso dalla funzione $y=x^2$ nell'intervallo $[0,2]$
1. Qual è l'espressione dell'area della generica sezione ortogonale del solido S?		
2. Quale potrebbe essere la formula che permette di calcolare il volume del solido S?		
3. Quanto vale il volume del solido S?		

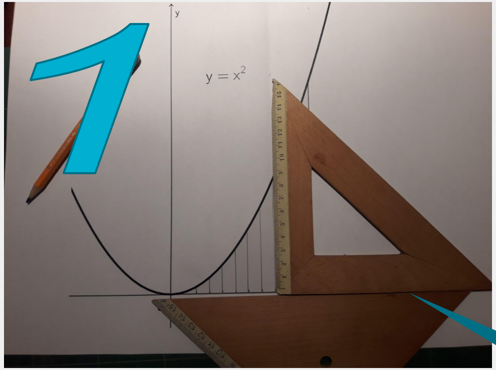
La proposta didattica: le istruzioni operative

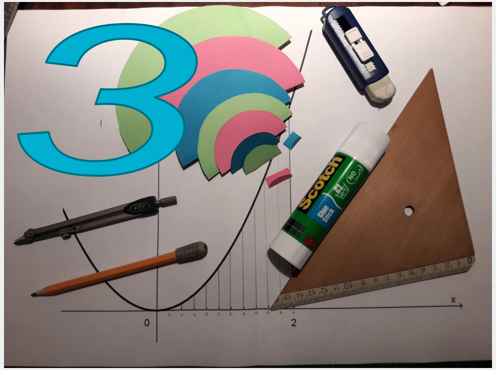
- Costruire con la carta colorata **almeno una decina di sezioni del solido S e incollarle sul foglio** (si consiglia di lasciare un piccolo eccesso di carta alla base delle sezioni come nelle figure per facilitare l'operazione di incollatura)
- **Rispondere alle domande** qui sotto e **trascrivere le risposte sul foglio** con il modello del solido

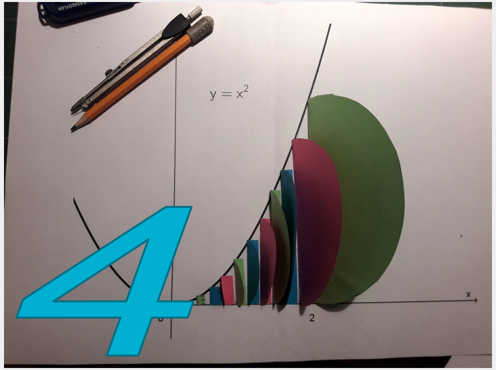
La proposta didattica: le domande per far riflettere

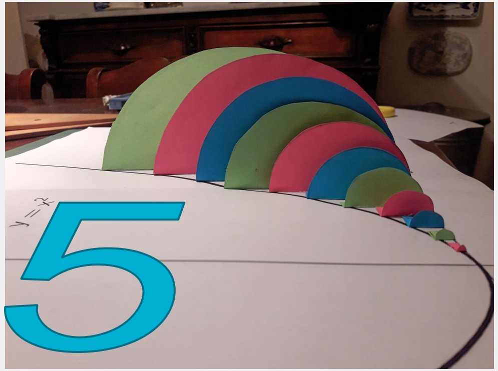
Domande	Trapezoide base sotteso da una generica funzione y=f(x) in un intervallo [a,b]	Trapezoide base sotteso dalla funzione $y=x^2$ nell'intervallo [0,2]
1. Qual è l'espressione dell'area della generica sezione del solido S?		
2. Quale potrebbe essere la formula che permette di calcolare il volume del solido S?	dal generale al particolare	
3. Quanto vale il volume del solido S?		

Al lavoro: la costruzione dei modelli



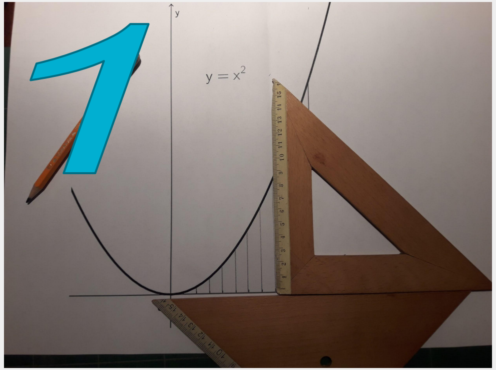


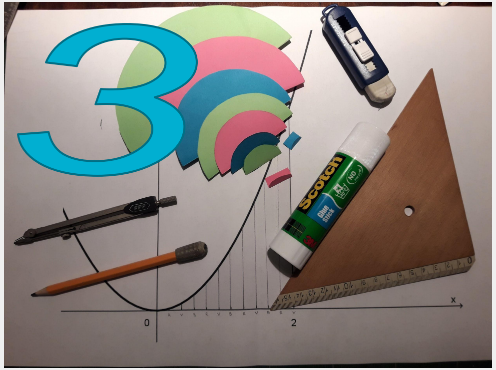


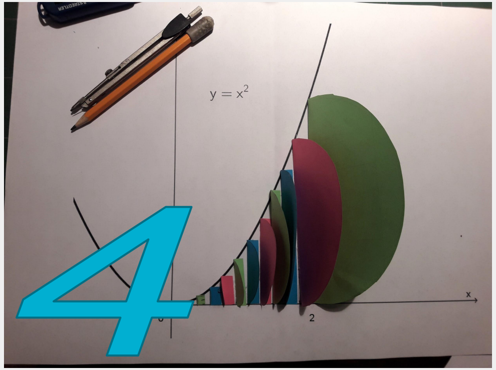


Prendiamo le misure

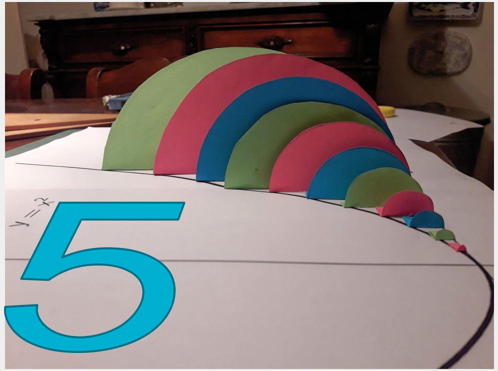
Al lavoro: la costruzione dei modelli



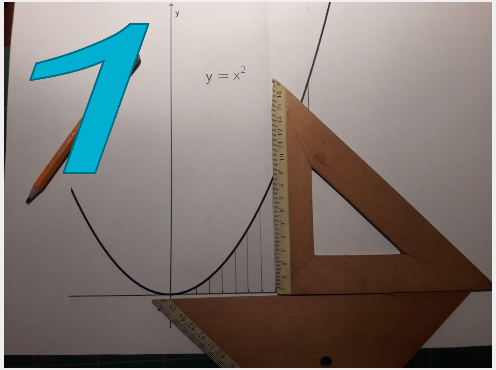


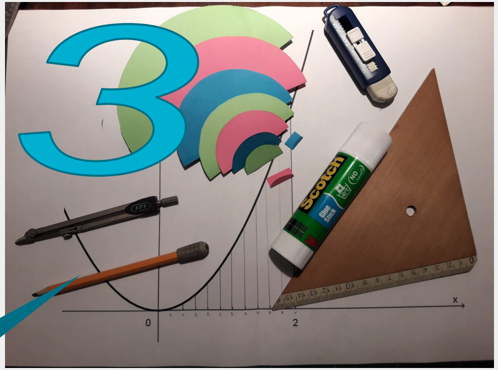


Disegniamo le sezioni

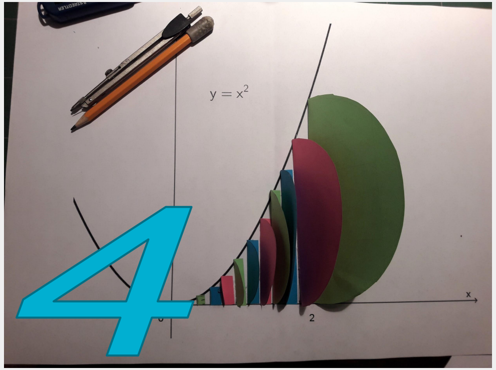


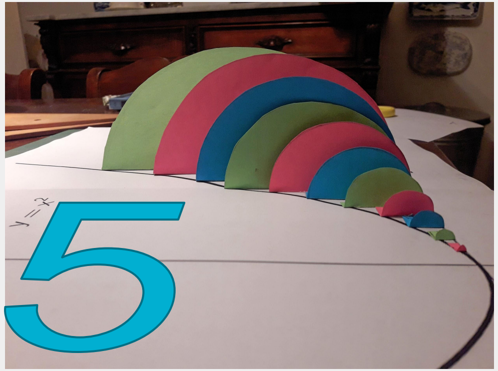
Al lavoro: la costruzione dei modelli



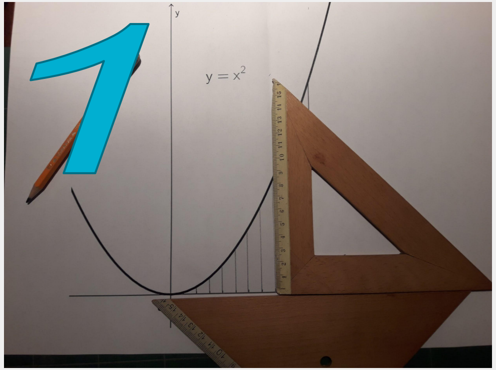


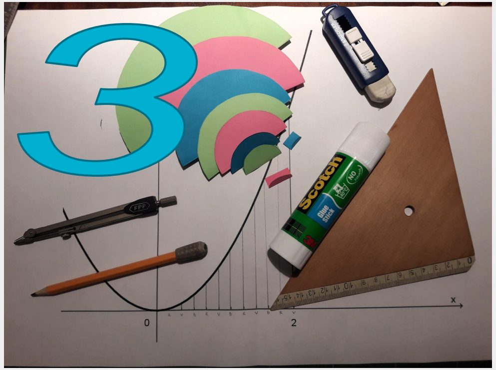
Ritagliamo le sezioni

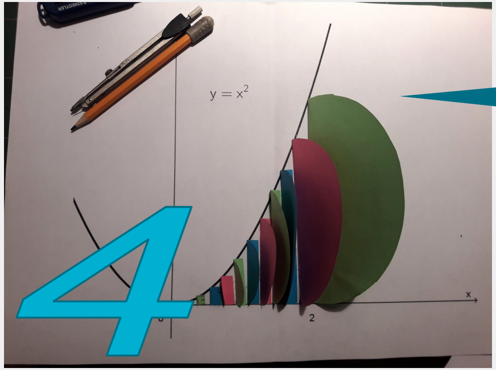




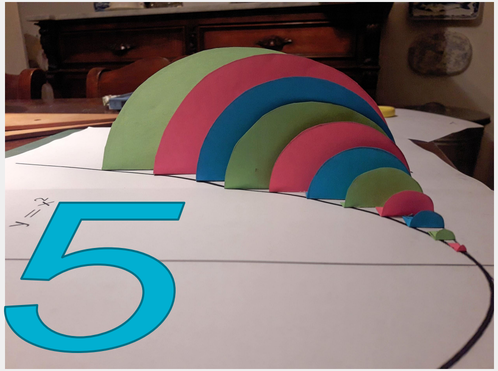
Al lavoro: la costruzione dei modelli



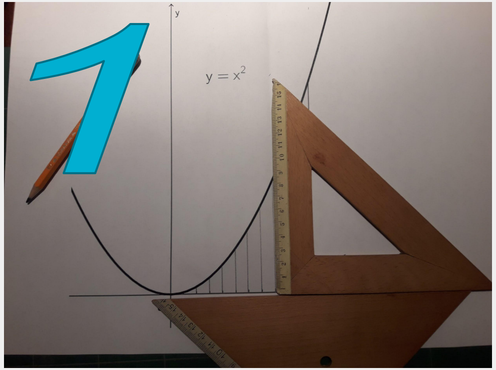


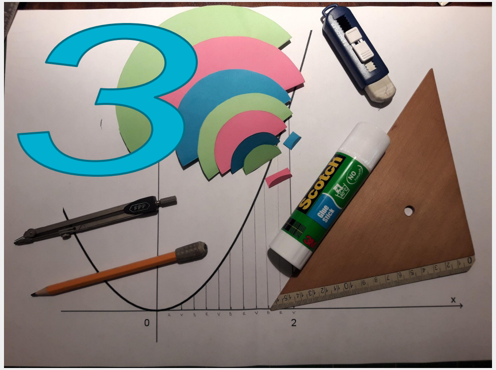


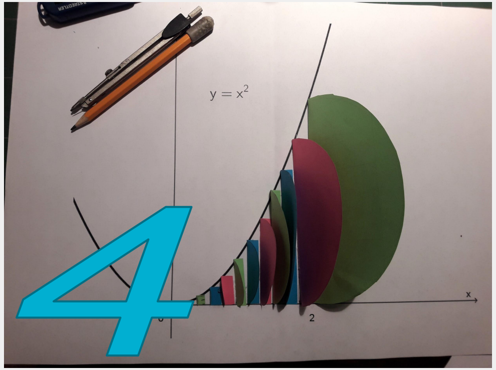
Incolliamo le sezioni



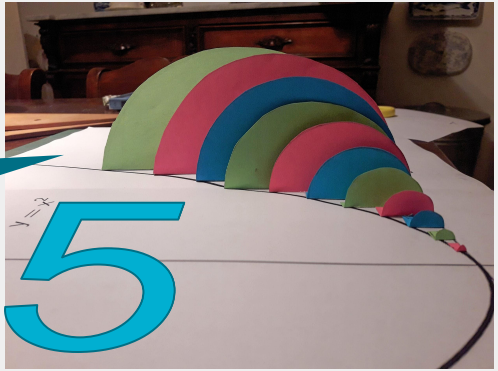
Al lavoro: la costruzione dei modelli



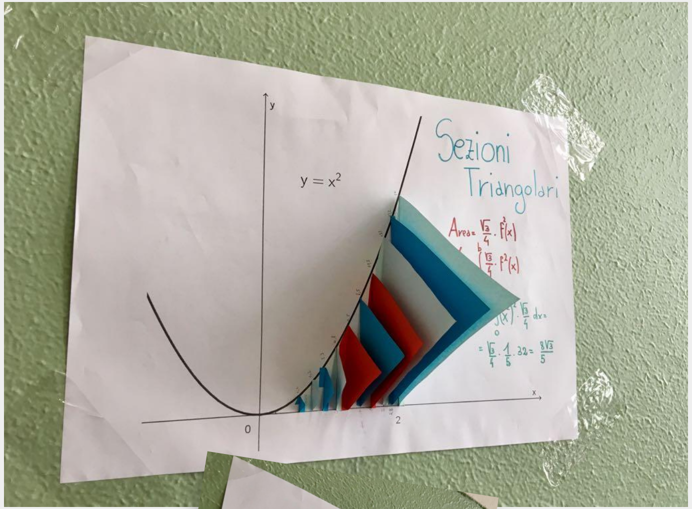


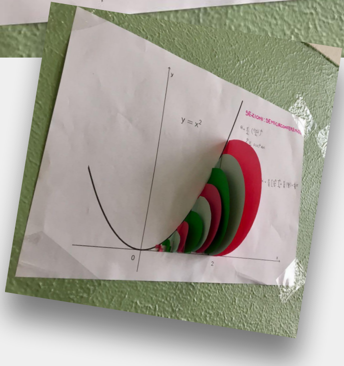


Rispondiamo alle domande

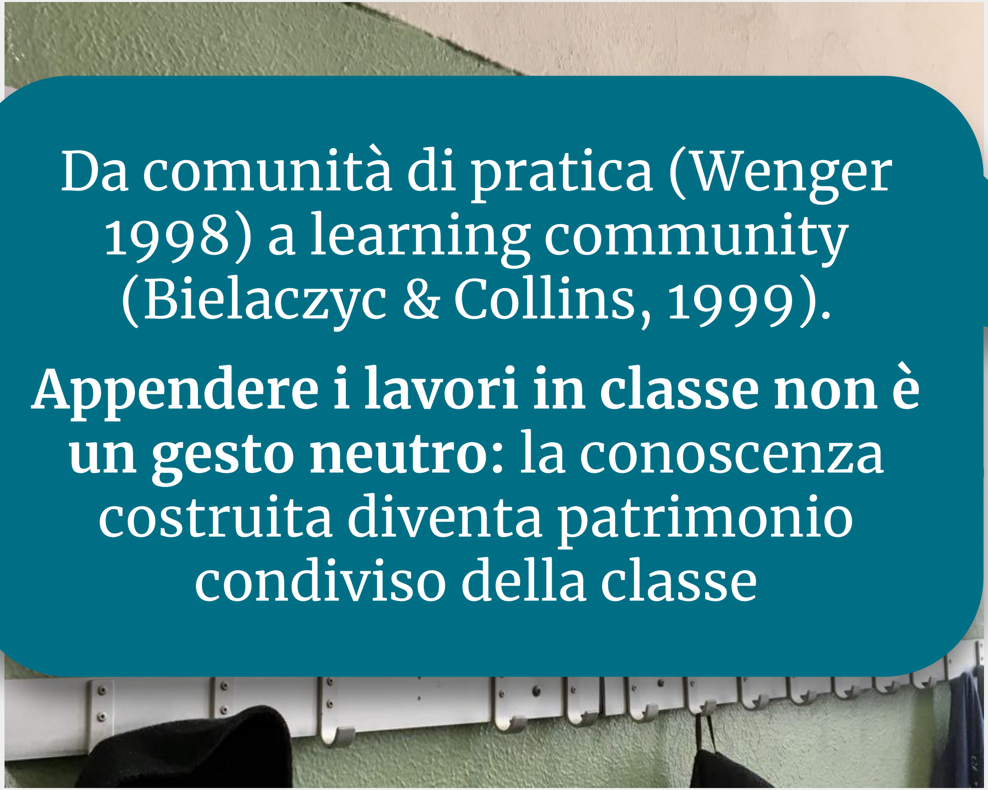


Al lavoro: i modelli finiti



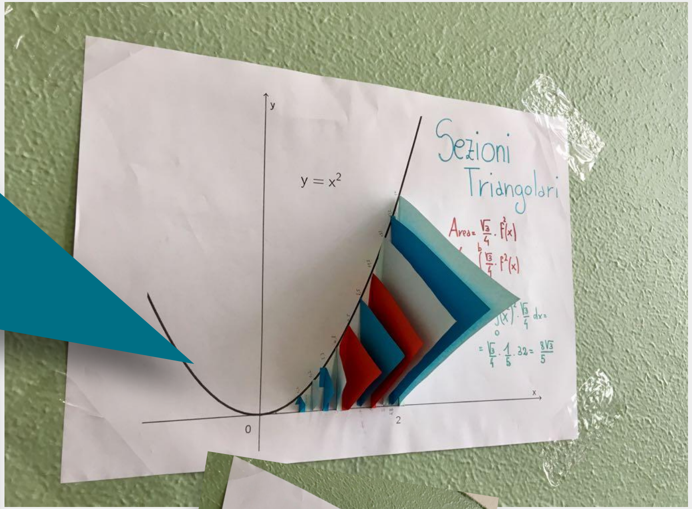


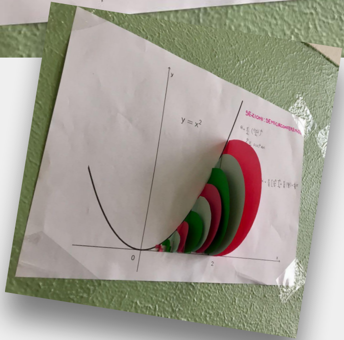
Al lavoro: i modelli finiti



Da comunità di pratica (Wenger 1998) a learning community (Bielaczyc & Collins, 1999).

Appendere i lavori in classe non è un gesto neutro: la conoscenza costruita diventa patrimonio condiviso della classe

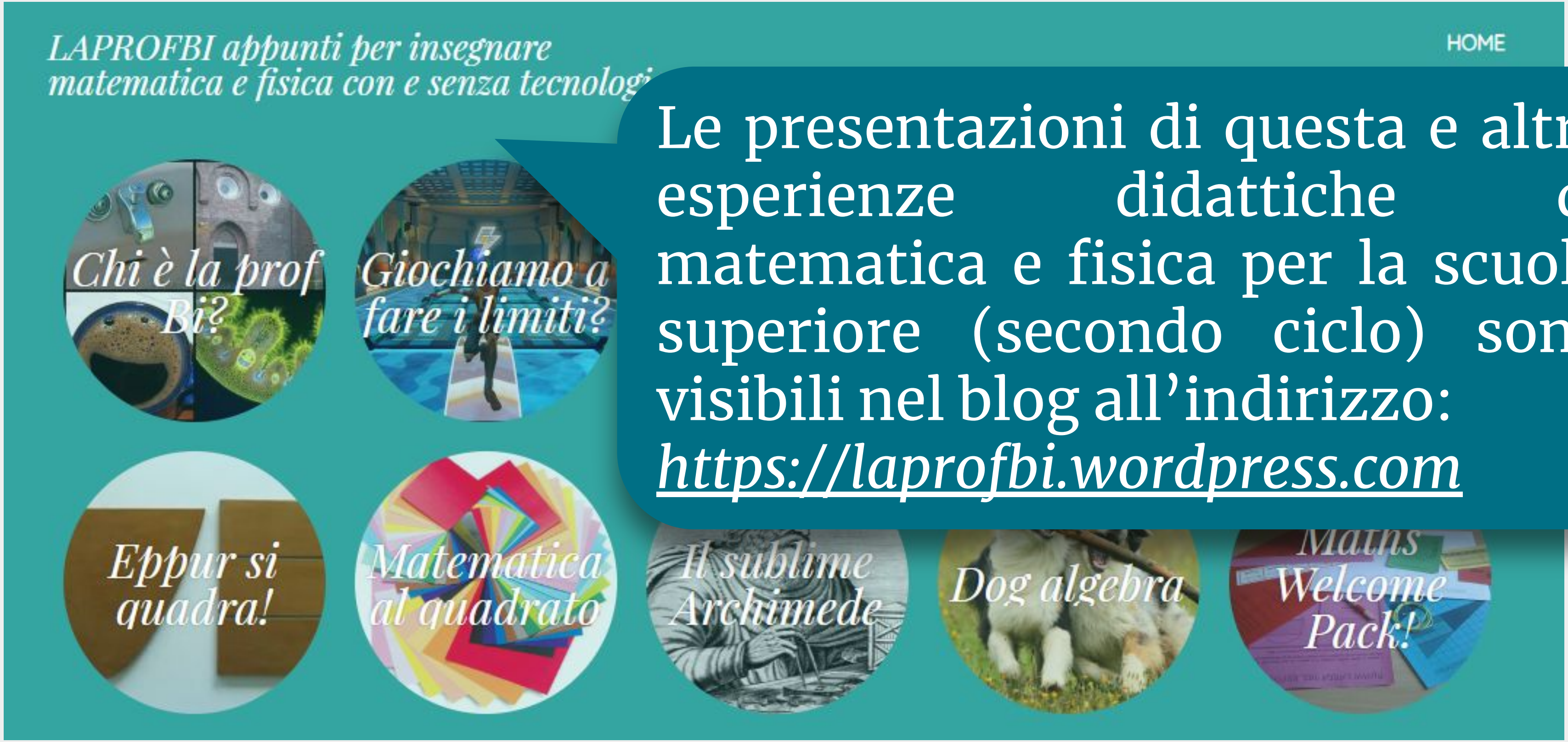




Riferimenti

Il Padlet con le risorse didattiche utilizzate nell’attività è visibile inquadrando il QRcode o all’indirizzo: *https://docentitrepuntozero.padlet.org/topaina/solidiafette*

Riferimenti



Le presentazioni di questa e altre esperienze didattiche di matematica e fisica per la scuola superiore (secondo ciclo) sono visibili nel blog all'indirizzo: https://laprofbi.wordpress.com

gbini@unito.it
giulia.bini@liceoleonardomi.gov.it

THANK YOU!

https://laprofbi.wordpress.com