Problema proposto come esempio per la seconda prova

Esame di Stato - Liceo Scientifico

Giugno 2019

Problema 2[(1)]

Sia f la funzione definita, per x>0, da $f(x) = x^2 - 2x + 30 - 24\ln(x)$.

1. Si provi che $f'(x) = \dfrac{2(x-4)(x+3)}{x}$ e si provi altresì che $f(x)$ assume solo valori positivi.
2. Un'azienda verifica che gli oggetti che essa produce hanno un costo unitario di $f(x)$ euro quando $1 \le x \le 10$ e x esprime le centinaia di oggetti prodotti. Per esempio: per 120 oggetti prodotti, il costo di produzione, per oggetto, arrotondato a meno di 10^{-2}, è $f(1,2) \approx 24,66$. Questo significa che l'azienda, per non lavorare in perdita, dovrà vendere ciascun oggetto prodotto a più di 24,66 euro. Si calcoli $f(2,2)$ arrotondato a meno di 10^{-2} e si interpreti il risultato seguendo l'esempio precedente. Si calcoli altresì $f(7,19)$ e $f(8)$.
3. Si mostri, illustrando il ragionamento seguito, che l'equazione $f(x)$=20 ammette esattamente due soluzioni reali appartenenti all'intervallo [1;10] e se ne determini il valore arrotondato a meno di 10^{-2}.
4. Dai risultati precedenti si deducano le informazioni relative all'attività dell'azienda per non lavorare in perdita nel caso essa decida di vendere gli oggetti prodotti a 20 euro ciascuno. Per quali quantità di oggetti prodotti l'azienda guadagna? Qual è il valore del guadagno massimo?

Commento generale

Il tema proposto rappresenta un'occasione concreta di collegamento tra lo studio dell'analisi matematica e il suo utilizzo reale nella programmazione produttiva di un'azienda al fine di determinare le quantità di oggetti che la stessa è opportuno che produca per realizzare un guadagno certo tenendo conto dei costi di produzione complessivi. Lo scopo principale di ogni azienda è esercitare la propria attività per trarre dal bilancio costi-benefici un utile netto e per questo è necessario che a monte ci siano uno studio di previsione sui costi di produzione del bene e quello dell'analisi di mercato che indichi non solo la richiesta o meno dei possibili fruitori del bene che si accinge a produrre ma anche il range entro cui può essere fissato il prezzo di vendita affinché il prodotto sia concorrenziale (in regime di libera concorrenza). Il bilancio costi-benefici è il punto cruciale da tenere sotto controllo affinché abbia senso esercitare l'attività nell'azienda.

Il problema presentato è certamente idoneo per saggiare le competenze conseguite nello studio della matematica negli istituti di istruzione il cui compito precipuo è fornire in uscita ai propri studenti competenze idonee a consentire loro di "navigare nel settore della produzione economica". I programmi sviluppati almeno negli ultimi 20 anni e le più recenti linee guida nazionali per lo studio della matematica nel Liceo Scientifico non hanno come obiettivo quello di una preparazione adeguata da spendere nel settore economico-produttivo, ciononostante non significa che i candidati all'Esame di Stato nel Liceo scientifico non debbano essere in grado di interpretare e risolvere il problema qui proposto come test finale per l'accertamento delle competenze maturate una volta che siano state fornite le informazioni opportune, che in verità sono presenti nel testo. Ciò premesso, ritengo che il presente problema (o problemi similari) rappresenta un buon esempio di prova conclusiva del percorso di studi liceali soprattutto per quelle che sono

[(1)] La proposta è un tema elaborato per la maturità 2015 ma non assegnato e trae spunto da un problema assegnato al baccalaureato francese negli anni scorsi.

le competenze matematiche che deve possedere chi si accinge a risolverlo, e che sono oggetto di studio nel percorso liceale come evidenzio nelle considerazioni specifiche che seguono.

Considerazioni specifiche

Primo punto

Il Candidato per risolverlo completamente deve innanzitutto sapere come si calcola la funzione derivata prima di un polinomio e di una funzione logaritmica. Per la struttura della funzione $f(x)$ è necessario conoscere il teorema sulla derivata della somma di due o più funzioni.

La richiesta successiva di dimostrare che la funzione $f(x)$ assume solo valori positivi è più impegnativa. A prima vista si potrebbe pensare che si debba ricorrere al confronto grafico tra i grafici della funzione $f_1(x)=x^2-2x+30$, luogo costituito da una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, e quello della funzione logaritmica $f_2(x)=24\ln(x)$. I due grafici sono stati utilizzati certamente nel corso di tutto il triennio liceale e non presentano alcuna difficoltà nel tracciarli separatamente. Se il candidato prendesse questa decisione potrebbe aiutarsi individuando alcuni punti della curva logaritmica [(2)]. Tuttavia, per rispondere alla richiesta specifica è più opportuno studiare il segno della funzione derivata prima, per **individuare le caratteristiche di monotonia della funzione $f(x)$**. Infatti, nel dominio di definizione della funzione $]0;+\infty[$ si riconosce che $f'(x)<0$ per $0<x<4$ e $f'(x)>0$ per $x>4$, risultando $f'(4)=0$; pertanto la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $]0;4[$, strettamente crescente nell'intervallo $]4;+\infty[$, quindi $x=4$ è punto di minimo assoluto. Con una calcolatrice si trova che $f(4)\approx 4{,}73>0$ e ciò consente di concludere che la funzione $f(x)$ assume solo valori positivi in tutto il dominio.

Secondo punto

L'interpretazione corretta del testo presentato è guidata opportunamente nell'esemplificazione che l'autore riporta:

<< Per esempio:per 120 oggetti prodotti, il costo di produzione, per oggetto, arrotondato a meno di 10^{-2}, è $f(1{,}2)\approx 24{,}66$. Questo significa che l'azienda, per non lavorare in perdita, dovrà vendere ciascun oggetto prodotto a più di 24,66 euro.>>

per cui ritengo che il candidato sia stato messo in condizioni di poter operare consapevolmente.

I calcoli richiesti per i valori $f(2{,}2)$, $f(7{,}19)$, $f(8)$, si eseguono con la calcolatrice e i valori arrotondati con la precisione richiesta sono $f(2{,}2)=11{,}52$; $f(7{,}19)=19{,}97$; $f(8)=28{,}09$. Per quanto concerne l'interpretazione del valore $f(2{,}2)=11{,}52$ il Candidato deve solo precisare che se l'azienda intende produrre un numero di oggetti pari a $n=2{,}2\cdot 100=220$ allora, poiché il costo unitario di produzione è di 11,52€, il prezzo al quale sarà messo in vendita l'oggetto deve essere superiore a 11,52€, per ottenere un utile effettivo dall'esercizio della produzione. Evidentemente analoghe indicazioni emergono dagli altri due valori $f(7{,}19)=19{,}97$; $f(8)=28{,}09$.

Terzo punto

[(2)] Qui si suppone che il Candidato non disponga di una calcolatrice grafica; nel caso detta calcolatrice fosse disponibile avrebbe immediatamente i grafici della parabola $y=x^2-2x+30$ e della curva logaritmica $y=24\ln(x)$ e ne vedrebbe la relativa posizione nel piano cartesiano concludendo immediatamente sulla positività della funzione $f(x)=x^2-2x+30-24\ln(x)$.

La richiesta contenuta in questo punto è senza dubbio quella che richiede al Candidato il tempo maggiore per lo svolgimento rispetto agli altri tre punti. Si tratta di risolvere l'equazione trascendente mista $f(x)=20$, equivalente all'equazione $\varphi(x)=x^2-2x+10-24\cdot ln(x)=0$ dimostrando non solo rigorosamente che questa ammette due radici reali e distinte ma determinandole in concreto fornendo per le stesse valori approssimati affetti da errore inferiore a 0,01.

Ebbene, se il Candidato ha seguito il procedimento qui suggerito nella risoluzione del primo punto, quindi ha già stabilito le caratteristiche di monotonia della funzione $f(x)$, allora non ha alcuna difficoltà a riconoscere che l'equazione suddetta ammette certamente solo due radici reali e distinte x_1, x_2, perché il grafico della funzione che $y=\varphi(x)$ è quello della funzione $y=f(x)$ traslato di 20 unità nel verso delle ordinate negative per cui il minimo assoluto della funzione $\varphi(x)$ è $\varphi(4)=f(4)-20=4{,}73-20=-15{,}27<0$. Riconosciuto ciò, poiché la funzione $\varphi(x)$ è continua e illimitata superiormente, come si evince dall'essere $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty$, nonché $\lim_{x\to +\infty}\varphi(x)=+\infty$, ed è definita in un intervallo, per il teorema di esistenza degli zeri delle funzioni continue si può affermare che il grafico $y=\varphi(x)$ taglia l'asse delle ascisse esattamente nei due punti x_1, x_2, i cui valori sono espressamente richiesti nel quesito.

La determinazione dei due punti x_1, x_2, si consegue applicando un metodo di ricerca operativa conosciuto. Poiché si devono determinare i valori con la condizione che l'errore di cui saranno affetti sia inferiore a 0,01, il metodo di bisezione risulta essere oltremodo comodo per il controllo della precisione che via via si va affinando. I due punti richiesti sono approssimativamente $x_1=1{,}46$, $x_2=7{,}20$.

Quarto punto

Questo punto del problema mira a definire le informazioni essenziali a disposizione dell'azienda produttrice del bene, relativamente alla quantità di oggetti da produrre in modo da avere un utile certo dall'attività espletata e quale sia il numero di oggetti da produrre per conseguire il massimo guadagno, atteso che l'azienda ha deciso di mettere sul mercato l'oggetto prodotto al costo di 20€ cadauno.

Ebbene, il costo di produzione dell'azienda deve essere inferiore al prezzo di vendita, quindi minore di 20€. Ciò si verifica per i valori di x tali che $f(x)<20$, quindi se $\varphi(x)<0$ e questa disuguaglianza è soddisfatta per $1{,}46<x<7{,}20$, quindi se il numero n di oggetti da produrre soddisfa la doppia disuguaglianza $146<n<720$.

Osserviamo che il costo di produzione minimo si ha per $x=4$, quindi se si producono 400 oggetti, ed è $f(4)=4{,}729$€ il costo di produzione per ogni oggetto. In questa ipotesi il costo complessivo di produzione è C(400)=400·4,729€=1891,60€ mentre il ricavo è R(400)= 400·20€=8000€. L'azienda realizza il massimo guadagno quando minimizza il costo di produzione. Per quanto precede il massimo guadagno è G(400)=R(400)-C(400)=(8000-1891,60)€=6108,4€.

Luigi Lecci