Problema

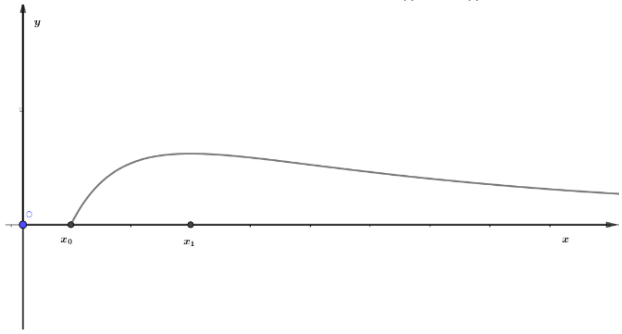
Proposto da **Adriana Lanza**

Il grafico disegnato in figura descrive l'andamento in funzione di x del valore, espresso in opportune unità di misura, di una forza F che agisce nella direzione e verso dell'asse x ed è applicata ad una particella libera di muoversi lungo lo stesso asse.

La funzione F(x), definita per x≥ $x_0 > 0, con\ \ F(x_0) = 0,$ è dotata di derivata prima e seconda, ha per asintoto l'asse x e ha un massimo relativo e assoluto in x_1 .

a) Si dica qual è il significato fisico dell'integrale definito $\int_h^k F(x)$ dx per ogni coppia di valori, h e k, appartenenti all'intervallo x≥ x_0 e se ne studi il segno.

b) Un possibile modello di $F(x)$ è un'opportuna restrizione della funzione $f(x) = \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}$ dove si suppone che le costanti numeriche abbiano le dimensioni adeguate.



Si determinino i valori di x_0, e di x_1 e si mostri che F (x) ammette un flesso nel punto di ascissa $x_2 = 4$.

c) Supponendo che la forza F sia conservativa si scriva una possibile espressione $U(x)$ per l'energia potenziale associata, illustrando il procedimento seguito. Si discuta il segno di $U(x)$.

d) Si confronti, per x>0, l'andamento di $F(x)$ con quello di una forza $F_1(x)$inversamente proporzionale al quadrato di x e tale $F_1(x_2) = F(x_2)$.

Si può affermare che $F_1(x)$ tende a 0 più rapidamente di F(x) al tendere di x a infinito?

Si giustifichi la risposta.

Soluzione

a) L'integrale definito $\int_h^k F(x)$ dx rappresenta il lavoro che compie la forza F quando sposta il suo punto di applicazione dal punto di ascissa h al punto di ascissa k.

Per lo studio del segno sfruttiamo la proprietà

$$\int_h^k F(x)\,dx = \int_{x_0}^k F(x)\,dx - \int_{x_0}^h F(x)\,dx$$

Inoltre, poiché Il grafico di $F(x)$ non attraversa l'asse x, la funzione integrale $\int_{x_0}^x F(t)\,dt$ è crescente.

Pertanto, $\int_h^k F(x)dx < 0\ \ se\ k < h$

La forza compie un lavoro negativo in quanto ha verso opposto a quello dello spostamento

$$\int_h^k F(x) = 0 \ \ se\ k = h$$

La forza compie un lavoro nullo se è nullo lo spostamento

$$\int_h^k F(x) > 0 \ \ se\ k > h$$

La forza compie un lavoro positivo in quanto ha verso uguale a quello dello spostamento

b) La funzione $f(x) = \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}$ è definita per $x \neq 0$
Risolvendo l'equazione $\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}$ =0 si trova che $x_0 = 2$

Osserviamo che, affinché il modello proposto per F(x) sia coerente col grafico in figura, si deve restringere il dominio di f(x) all'intervallo $x \geq x_0$

Per determinare il punto di massimo studiamo il segno della derivata prima e la monotonia di $F(x)$.

$$F'(x) = -\frac{16}{x^3} + \frac{48}{x^4} \geq 0 \rightarrow 2 \leq x \leq 3$$

2________3___________

$\nearrow$ $\searrow$

Per determinare il punto di flesso studiamo il segno della derivata seconda e la concavità o convessità di $F(x)$

$$F''(x) = \frac{48}{x^4} - \frac{192}{x^5} \geq 0 \rightarrow x \geq 4$$

2________4___________

∩ ∪

La funzione ha un massimo nel punto $M(3; \frac{8}{27})$ e un flesso nel punto $F(4; \frac{1}{4})$

c) L'energia potenziale è definita come una funzione U(x) tale che

$$L_{h,k} = -\Delta U$$

Cioè il lavoro compiuto dalla forza spostando il suo punto di applicazione da h a k, è uguale alla variazione, cambiata di segno, dell'energia potenziale.

$$\int_h^k F(x)\ dx = U(h) - U(k)$$

La definizione ha senso per le forze conservative per le quali il lavoro non dipende dalla traiettoria ma solo dal punto iniziale e dal punto finale.

La relazione tra forza e energia potenziale può essere espressa anche nella forma

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

La funzione U(x) è pertanto definita a meno di una costante additiva.

Per determinarne un'espressione analitica è necessario scegliere, in modo arbitrario, un valore $\bar{x}$ in cui l'energia potenziale sia considerata nulla. Con questa condizione si avrà

$$\int_{x}^{\bar{x}} F(z)\ \mathrm{dz} \ = U(x) — U(\bar{x}) = U(x) \text{ o anche}$$

$$U(x) = -\int_{\bar{x}}^{x} F(z)\ \mathrm{dz}$$

A) Se poniamo $U(2) = 0$ sarà

$$U(x) = \int_{x}^{2} F(z)\ \mathrm{dz} = \frac{8}{x} - \frac{8}{x^2} - 2 \ = \frac{-2(x-2)^2}{x^2}$$

In questo caso risulta $U(2) = 0 \ \ e \ U(x) < 0 \quad \forall x > 2$

Ritroviamo la proprietà: la forza compie lavoro negativo se la particella si sposta nel verso delle x decrescenti

B) Se poniamo $\lim_{x \to +\infty} U(x) = 0$ sarà

$$U(x) = \int_{x}^{+\infty} F(z)\ \mathrm{dz} = \frac{8}{x} - \frac{8}{x^2} = \frac{8(x-1)}{x^2}$$

In questo caso risulta $\lim_{x \to +\infty} U(x) = 0 \quad e \ U(x) > 0 \quad \forall x > 2$

Ritroviamo la proprietà: la forza compie lavoro positivo se la particella si sposta nel verso delle x crescenti

d) Una forza inversamente proporzionale al quadrato di x ha un'espressione del tipo

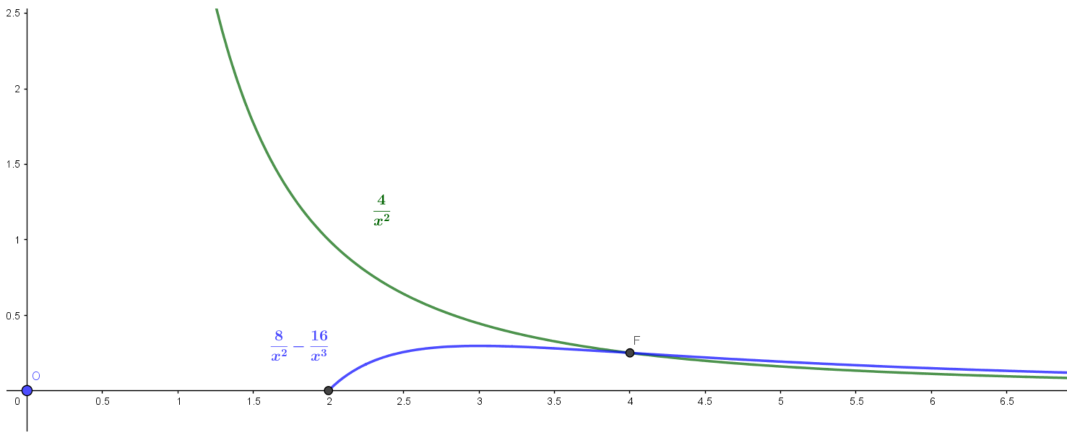
$$F_1(x) = \frac{A}{x^2}$$

dove A è una costante avente le dimensioni$[l^3, M, t^{-2}]$

$Imponendo\ F_1(4) = \frac{A}{16}$=$F(4) = \frac{1}{4}$ si determina il valore di A =4

Confronto tra le due forze

Soluzione di Adriana Lanza



$F(x)$ ha per asintoto l'asse delle x; $F_1(x)$ ha per asintoti sia l'asse delle x che l'asse delle y.

$F(x)$ è prima crescente, raggiunge un valore massimo e poi decresce; $F_1(x)$ è decrescente

$F(x)$ cambia concavità nel punto di flesso; $F_1(x)$ è sempre convessa

I due grafici si attraversano nel punto $F(4; \frac{1}{4})$

Per $x > 4$ è $F_1(x) < F(x)$

Le due funzioni sono entrambe infinitesime per $x \to +\infty$

Per confrontare gli ordini infinitesimi calcoliamo, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{F_1(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x} = 2$$

Poiché il limite del loro rapporto, al tendere di x a infinito tende a un limite finito, le due funzioni sono infinitesime dello stesso ordine, pertanto non si può affermare che $F_1(x)$ tende a 0 più rapidamente di F(x) al tendere di x a infinito.