Problema proposto come esempio per la seconda prova

Esame di Stato - Liceo Scientifico

Giugno 2019

Problema 2[(1)]

Sia f la funzione definita, per $x>0$, da $f(x)=x^2-2x+30-24\ln(x)$.

1. Si provi che $f'(x)=\dfrac{2(x-4)(x+3)}{x}$ e si provi altresì che $f(x)$ assume solo valori positivi.
2. Un'azienda verifica che gli oggetti che essa produce hanno un costo unitario di $f(x)$ euro quando $1\le x\le 10$ e x esprime le centinaia di oggetti prodotti. Per esempio: per 120 oggetti prodotti, il costo di produzione, per oggetto, arrotondato a meno di 10^{-2}, è $f(1{,}2)\approx 24{,}66$. Questo significa che l'azienda, per non lavorare in perdita, dovrà vendere ciascun oggetto prodotto a più di 24,66 euro. Si calcoli $f(2{,}2)$ arrotondato a meno di 10^{-2} e si interpreti il risultato seguendo l'esempio precedente. Si calcoli altresì $f(7{,}19)$ e $f(8)$.
3. Si mostri, illustrando il ragionamento seguito, che l'equazione $f(x)=20$ ammette esattamente due soluzioni reali appartenenti all'intervallo $[1;10]$ e se ne determini il valore arrotondato a meno di 10^{-2}.
4. Dai risultati precedenti si deducano le informazioni relative all'attività dell'azienda per non lavorare in perdita nel caso essa decida di vendere gli oggetti prodotti a 20 euro ciascuno. Per quali quantità di oggetti prodotti l'azienda guadagna? Qual è il valore del guadagno massimo?

Risoluzione

1. La funzione in esame è trascendente mista, formata dalla somma di un polinomio con una funzione logaritmica;il suo dominio di definizione è l'intervallo $]0;+\infty[$, perché l'argomento del logaritmo deve essere positivo. La funzione è continua e dotata di derivate di qualsiasi ordine in tutto il dominio.

   1.1 L'espressione della funzione derivata prima è

$$f'(x)=2x-2-\frac{24}{x}=2\left(x-1-\frac{12}{x}\right)=\frac{2\left(x^2-x-12\right)}{x}$$

Per scomporre il trinomio al numeratore determiniamo i suoi zeri. Risolviamo l'equazione

$x^2-x-12=0\rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{1\pm 7}{2}$, da cui $x_1=-3, x_2=4$ e perciò sussistono le uguaglianze $x^2-x-12=(x-x_1)(x-x_2)=(x+3)(x-4)$. La funzione derivata prima si può porre nella forma $f'(x)=\dfrac{2(x+3)(x-4)}{x}$, che è quella indicata nel testo del quesito.

   1.2 Segno della funzione $f(x)$

(1) La proposta è un tema elaborato per la maturità 2015 ma non assegnato e trae spunto da un problema assegnato al baccalaureato francese negli anni scorsi.

Per riconoscere il segno della funzione in oggetto è opportuno sfruttare le sue caratteristiche relativamente alla monotonia e per questo dobbiamo conoscere il segno e gli zeri della derivata prima.

Nel dominio di definizione della funzione $]0;+\infty[$ si riconosce che $f'(x)<0$ per $0<x<4$ e $f'(x)>0$ per $x>4$, risultando $f'(4)=0$; pertanto la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $]0;4[$, strettamente crescente nell'intervallo $]4;+\infty[$, quindi **x=4 è punto di minimo assoluto**. Con una calcolatrice si trova che $f(4)\approx 4{,}73>0$. Dal **significato di minimo assoluto** di una funzione si deduce che per ogni punto del dominio risulta $f(x) \geq f(4)>0$ perciò la funzione $f(x)$ assume solo valori positivi in tutto il dominio.

2. E' necessario calcolare $f(2{,}2)$ arrotondato a meno di 0,01 e interpretare il risultato in virtù di quanto riportato nella esplicitazione del testo relativamente all'esempio addotto.

Risulta

$$f(2{,}2) = 2{,}2^2 - 2\cdot 2{,}2 + 30 - 24\ln(2{,}2) \approx 11{,}51702... \approx 11{,}52$$

Il risultato ottenuto ha il seguente significato: se l'azienda produce un numero di oggetti n=2,2·100=220 allora il costo unitario di produzione (costo globale per produrre un oggetto) è pari 11,52€ e dunque se intende mettere sul mercato detti oggetti il prezzo di vendita per ogni oggetto deve essere maggiore o uguale a 11,52€, diversamente l'azienda va in perdita.

Gli altri due valori richiesti sono:

$$f(7{,}19) = 7{,}19^2 - 2\cdot 7{,}19 + 30 - 24\ln(7{,}19) \approx 19{,}97151... \approx 19{,}97\,;$$

$$f(8) = 8^2 - 2\cdot 8 + 30 - 24\ln(8) \approx 28{,}0934... \approx 28{,}09$$

Lasciamo come esercizio al lettore le relative interpretazioni economiche dei risultati.

3. Si tratta di risolvere l'equazione trascendente mista $f(x)=20$ che possiamo scrivere nella forma equivalente $x^2-2x+10-24\cdot ln(x)=0$. Poniamo per brevità

$\varphi(x)=x^2-2x+10-24\cdot ln(x)$.

Occorre dimostrare rigorosamente che questa ammette due radici reali e distinte e determinarne i valori approssimati con errore inferiore a 0,01.

Ebbene, in virtù delle caratteristiche per la monotonia che ha la funzione $f(x)$, precisate nella risoluzione del precedente quesito 1. deduciamo agevolmente che la suddetta equazione ammette certamente solo due radici reali e distinte x_1, x_2, perché il grafico della funzione che $y=\varphi(x)$ è quello della funzione $y=f(x)$ traslato di 20 unità nel verso delle ordinate negative per cui il minimo assoluto della funzione $\varphi(x)$ è $\varphi(4)=f(4)-20=4{,}73-20=-15{,}27<0$. Ciò detto, poiché la funzione $\varphi(x)$ è continua e illimitata superiormente, come si evince dall'essere $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty$, nonché $\lim_{x\to +\infty}\varphi(x)=+\infty$, ed è definita in un intervallo, per il teorema di esistenza degli zeri delle funzioni continue si può affermare che il grafico $y=\varphi(x)$ taglia l'asse delle ascisse esattamente in due punti che indichiamo con x_1, x_2, dei quali si devono determinare i valori approssimati con errore inferiore a 0,01. Per la determinazione dei due punti x_1, x_2, conviene applicare il metodo di bisezione che risulta essere comodo non solo per la velocità di esecuzione ma anche perché permette di controllare la precisione di ciascun valore ad ogni passo dell'algoritmo di ricerca. Supponiamo che sia $x_1 < x_2$.

Ricerca del punto x_1

Per quanto premesso sappiamo che la funzione $\varphi(x)$ assume valori negativi internamente all'intervallo $]x_1; x_2[$ e positivi nei punti del dominio di definizione della $f(x)$ esterni dello stesso intervallo. Aiutandoci con una calcolatrice (della tipologia ammessa in sede d'esame) cerchiamo di individuare un intervallo $]a;b[$ in cui è certamente compreso x_1. Si tratta di individuare un punto a tale che $\varphi(a)>0$ e un punto b tale che $\varphi(b)<0$ quindi avviare l'algoritmo di ricerca.

Osserviamo che $\varphi(1)=9>0$ e $\varphi(2)=10-24\cdot ln(2)=-6,6355\ldots<0$; quindi possiamo affermare che sussiste la doppia disuguaglianza: $1< x_1<2$.

L'algoritmo di ricerca dell'approssimazione desiderata per x_1 si sostanzia nei seguenti passi.

1) Determinare il punto medio $x_m=(a+b)/2$

2) Determinare la semiampiezza dell'intervallo $]a;b[$; $\delta=(b-a)/2$. Se risulta $0<\delta<0,01$ assumere come x_1 il punto medio dell'intervallo $]a;b[$, $x_m=(a+b)/2$; questo valore avrà la caratteristica desiderata per la precisione. **La ricerca finisce**. In caso contrario procedere con le operazioni indicate nel successivo punto 3).

3) Calcolare $\varphi(x_m)$ e osservare il segno.

3.1) Se $\varphi(x_m)>0$ allora il punto x_1 è interno all'intervallo $]x_m;b[$, quindi si aggiorna l'estremo sinistro dell'intervallo $]a;b[$ ponendo $a = x_m$, altrimenti sarà $\varphi(x_m)<0$ e quindi x_1 è interno all'intervallo $]a; x_m[$ e si aggiorna l'estremo destro dell'intervallo di ricerca ponendo $b = x_m$.

3.2) Tornare al punto 1)

L'implementazione dell'algoritmo descritto in un foglio elettronico permette di conseguire l'obiettivo molto velocemente.

A margine riportiamo una tabella ottenuta con Excel dove sono indicati alcuni valori approssimati del primo punto x_1 in cui la funzione φ si annulla e sono riportati nella quarta colonna. Infatti, si assume come valore dell'estremo x_1 quello del punto medio dell'intervallo corrente in cui il punto ricade. Il valore che soddisfa il quesito è $x_1=1,460937\ldots\approx1,46$. In corrispondenza di questo valore si può leggere nell'ultima colonna il

Ricerca del valore approssimato di x_1 con il metodo di bisezione

$$\boxed{\varphi(x)=x^2-2x+10-24\cdot\ln(x)}$$

	a=1	b=2	$x_1 = x_m$		
n	x'_1	x'_2	$x_m=(x'_1+x'_2)/2$	$f(x_m)$	$\delta/2=(x_2-x_1)/2$
0	1,0000000	2,0000000	1,5000000	-0,481163	0,5000000
1	1,0000000	1,5000000	1,2500000	3,707055	0,2500000
2	1,2500000	1,5000000	1,3750000	1,497735	0,1250000
3	1,3750000	1,5000000	1,4375000	0,481674	0,0625000
4	1,4375000	1,5000000	1,4687500	-0,006154	0,0312500
5	1,4375000	1,4687500	1,4531250	0,236128	0,0156250
6	1,4531250	1,4687500	1,4609375	0,114583	0,0078125
7	1,4609375	1,4687500	1,4648438	0,054114	0,0039063
8	1,4648438	1,4687500	1,4667969	0,023955	0,0019531
9	1,4667969	1,4687500	1,4677734	0,008894	0,0009766
10	1,4677734	1,4687500	1,4682617	0,001368	0,0004883

valore 0,0078125 il cui significato è: assumendo $x_1 = x_m = 1,4609375$ l'errore di cui questo valore è affetto, se considerato come punto in cui si annulla la funzione, è minore della semiampiezza dell'intervallo $[x'_1; x'_2]$ in cui è contenuto.

Ricerca del punto x_2

Una ricerca analoga a quella messa in atto per determinare il punto x_1 permetterà di ricavare il secondo punto x_2 in cui il grafico della funzione $y=\varphi(x)$ interseca l'asse delle ascisse. Evidentemente si deve prima determinare un intervallo iniziale che contenga tale punto e ci si servirà della calcolatrice.

Possiamo riconoscere che $7 < x_2 < 8$. Infatti risulta:

$\varphi(7) = 45 - 24 \cdot \ln(7) \approx -1,7 < 0$ e $\varphi(8) = f(8) - 20 \; 28,09 - 20 = 8,09 > 0$

Avviamo la ricerca ancora con il metodo di bisezione.

Si costruisce la tabella di dati riportata a margine dalla quale si evince che $x_2 = 7,1953\ldots \approx 7,20$

Ricerca del valore approssimato di x_2 con il metodo di bisezione

$\boxed{\varphi(x) = x^2 - 2x + 10 - 24 \cdot \ln(x)}$

	$a=7$	$b=8$	$x_2 = x_m$		
n	x'_1	x'_2	$x_m=(x'_1+x'_2)/2$	$f(x_m)$	$\delta/2=(x_2-x_1)/2$
0	7,0000000	8,0000000	7,5000000	2,892328	0,5000000
1	7,0000000	7,5000000	7,2500000	0,518465	0,2500000
2	7,0000000	7,2500000	7,1250000	-0,611008	0,1250000
3	7,1250000	7,2500000	7,1875000	-0,051085	0,0625000
4	7,1875000	7,2500000	7,2187500	0,232488	0,0312500
5	7,1875000	7,2187500	7,2031250	0,090401	0,0156250
6	7,1875000	7,2031250	7,1953125	0,019582	0,0078125
7	7,1875000	7,1953125	7,1914063	-0,015770	0,0039063
8	7,1914063	7,1953125	7,1933594	0,001901	0,0019531
9	7,1914063	7,1933594	7,1923828	-0,006936	0,0009766

4. Se l'azienda intende mettere sul mercato i propri prodotti al prezzo di 20€ per ogni oggetto evidentemente il costo di produzione unitario deve essere stato minore di 20€, quindi, poiché x sono le centinaia di oggetti prodotti, deve essere soddisfatta la disequazione $f(x)<20$, cioè $\varphi(x)< 0$. Nella risoluzione del precedente punto 3. è stato precisato che la disequazione $\varphi(x)< 0$ è soddisfatta solo se $x_1<x<x_2$, quindi se $1,46 < x < 7,20$, cioè se l'azienda produce un numero **n** di pezzi tale che **146< n <720**. Pertanto, per poter vendere il prodotto a 20€ al pezzo, l'azienda deve realizzare un numero di pezzi compreso tra 146 e 720, un valore diverso la farebbe andare in perdita. Abbiamo altresì appurato che il costo di produzione minimo si ha per x=4; a questo valore corrispondono 400 unità prodotte e, poiché il costo unitario di produzione è $f(4)\approx 4,7289$€ (2) , il costo complessivo di produzione è C(400)=400· 4,7289€=1891,56€. Il ricavo dalla vendita di tutti i pezzi prodotti è R(400)= 400· 20€=8000€ e dunque il **guadagno massimo** che può realizzare l'azienda è G(400)=R(400)-C(400)=(8000 - 1891,56)€ =**6108,44€.**

Luigi Lecci

(2) Il valore minimo del costo di produzione unitario indicato nella risoluzione del quesito 1. era stato arrotondato a 4,73€. Quello indicato qui è più preciso.