PROBLEMA 2[ii]

Sia f la funzione definita, per $x > 0$, da $f(x) = x^2 - 2x + 30 - 24\ln(x)$.

1. Si provi che $f'(x) = \frac{2(x-4)(x+3)}{x}$ e si provi altresì che $f(x)$ assume solo valori positivi.
2. Un'azienda verifica che gli oggetti che essa produce hanno un costo unitario di $f(x)$ euro quando $1 \leq x \leq 10$ e x esprime le centinaia di oggetti prodotti. Per esempio: per 120 oggetti prodotti, il costo di produzione, per oggetto, arrotondato a meno di 10^{-2}, è $f(1{,}2) \approx 24{,}66$. Questo significa che l'azienda, per non lavorare in perdita, dovrà vendere ciascun oggetto prodotto a più di 24,66 euro. Si calcoli $f(2{,}2)$ arrotondato a meno di 10^{-2} e si interpreti il risultato seguendo l'esempio precedente. Si calcoli altresì $f(7{,}19)$ e $f(8)$.
3. Si mostri, illustrando il ragionamento seguito, che l'equazione $f(x) = 20$ ammette esattamente due soluzioni reali appartenenti all'intervallo [1;10] e se ne determini il valore arrotondato a meno di 10^{-2}
4. Dai risultati precedenti si deducano le informazioni relative all'attività dell'azienda per non lavorare in perdita nel caso essa decida di vendere gli oggetti prodotti a 20 euro ciascuno. Per quali quantità di oggetti prodotti l'azienda guadagna? Qual è il valore del guadagno massimo?

[1]La proposta è un tema elaborato per la maturità 2015 ma non assegnato. Trae spunto da un problema assegnato al baccalaureato francese degli anni scorsi. Contiene richieste di arrotondare dati numerici.

SOLUZIONE

Punto 1

$$f(x) = x^2 - 2x + 30 - 24\ln x$$

$$f'(x) = 2x - 2 - \frac{24}{x} = \frac{2x^2 - 2x - 24}{x} = \frac{2(x^2 - x - 12)}{x} = \frac{2(x-4)(x+3)}{x}$$

Punto 2

$f(2{,}2) \approx 11{,}52$
se l'azienda produce 220 oggetti dovrà vendere ciascun articolo a non meno di 11,52 €.

Studiando la derivata trovata al punto 1 è possibile verificare che la funzione ha un minimo per $x = 4$ che corrisponde a

$f(4) \approx 4{,}73$

è quindi possibile prevedere che per $x = 7{,}19$ e $x = 8$ il costo unitario sarà maggiore di 4,73, infatti

$f(7{,}19) \approx 19{,}97$

$f(8) \approx 28{,}09$

Punto 3

$$f(x) = 20 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x + 30 - 24\ln(x) = 20$$

Dopo aver separato la parte algebrica da quella trascendente

$x^2 - 2x + 10 = 24\ln(x) \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{5}{12} = \ln(x)$

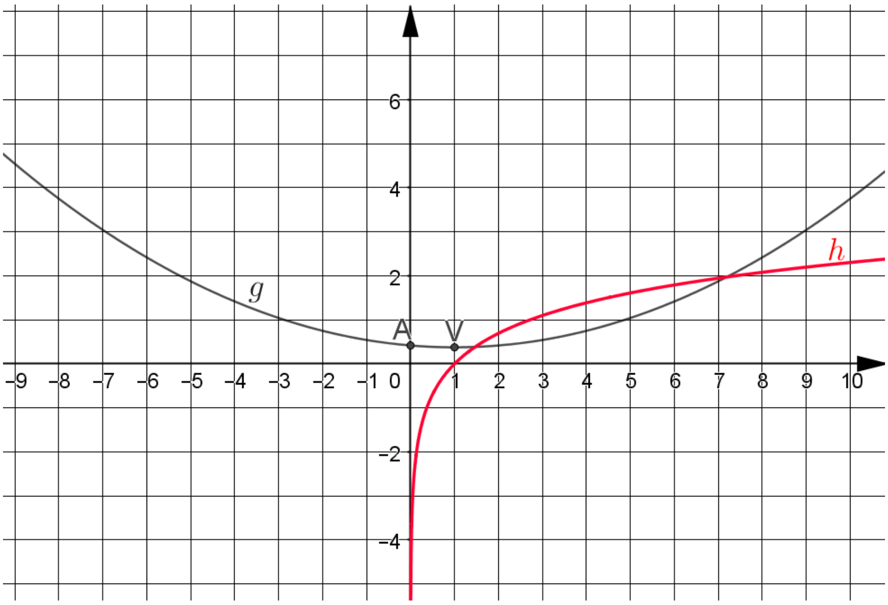
risolvo per via grafica

$g(x) = \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{5}{12}$

parabola con concavità rivolta verso l'alto, vertice $V\left(1;\ \frac{3}{8}\right)$, passa per $A\left(0;\ \frac{5}{12}\right)$, non interseca l'asse delle ascisse quindi $g(x) > 0 \quad \forall\, x \in R$

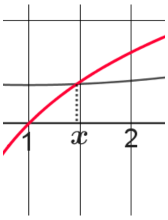
$h(x) = \ln(x)$

curva logaritmica crescente, positiva $\forall\, x > 1$



Le curve si incontrano in due punti le cui ascisse corrispondono alle soluzioni richieste

Mi limito a calcolare la prima radice.



È possibile delimitare l'intervallo sfruttando il teorema di esistenza degli zeri infatti, poiché $f(1) = 9$ e $f(2) \approx -6{,}64$ $\exists$ almeno un $1 < x < 2$ t.c. $f(x) = 0$.

Applico il metodo di bisezione

a	*f(a)*	*b*	*f(b)*	*(a+b)/2*	*f[(a+b)/2]*
1	9	2	-6,64	1,5	-0,48
1	9	1,5	-0,48	1,25	3,71
1,25	3,71	1,5	-0,48	1,375	1,50
1,375	1,50	1,5	-0,48	1,4375	0,48
1,4375	0,48	1,5	-0,48	1,46875	-0,006
1,4375	0,48	1,46875	-0,00615	1,453125	0,24
1,453125	0,23613	1,46875	-0,00615	1,4609375	0,11
1,4609375	0,1145829085	1,46875	-0,00615	1,46484375	0,05411
1,46484375	0,05411	1,46875	-0,00615	1,466796875	0,02395
1,466796875	0,02395	1,46875	-0,00615		

$1{,}466796875 < x < 1{,}46875 \qquad x \approx 1{,}47$ L'altra radice è 7,19 (trovata con calcolatrice)

Il costo unitario è di 20 € se si producono 147 oggetti oppure 719.

Punto 4

Ricordando che Guadagno unitario = Ricavo unitario – Costo unitario

$G(x) = 20 - \ (x^2 - 2x + 30 - 24\ln(x))$

$G(x) = -x^2 + 2x + 24\ln(x) - 10$ funzione guadagno unitario, definita $\forall\ x > 0$

Il guadagno è positivo per

$-x^2 + 2x + 24\ln(x) - 10 > 0$ per

$\ln(x) > \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{5}{12}$ verificata (vedi soluzione punto 3) per $1{,}47 < x < 7{,}19$

$G'(x) = -2x + 2 + \frac{24}{x}$ $G'(x) = 0$ $\rightarrow$ $-2x + 2 + \frac{24}{x} = 0$

$$\frac{-2x^2 + 2x + 24}{x} = 0$$

$$\frac{-2(x-4)(x+3)}{x} = 0$$

$G'(x) = 0$ per $x = 4$

$G'(x) > 0$ per $0 < x < 4$

$G'(x) < 0$ per $x > 4$

La quantità di oggetti che permetterà il massimo guadagno unitario è 400. Il guadagno massimo è

$G_{Max} = G(4) \cdot 100 = 1527{,}11$ €