PROBLEMA 1

a) Per convertire la velocità da km/h a m/s teniamo presente che un km equivale a $1000m$ e $1h$ equivale a $3600s$. Pertanto

$$108\frac{km}{h} = 108\frac{1000}{3600}m/s = 30m/s$$

b) L'accelerazione è data dalla formula $a(t) = -6t^2 - t$, essendo l'accelerazione la derivata della velocità rispetto al tempo, pertanto possiamo ottenere la legge oraria della velocità con un'integrazione definita. Pertanto, sottintendendo le unità di misura nei coefficienti numerici

$$v(t) - 30 = \int_0^t (-6\tau^2 - \tau)\, d\tau = -2t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

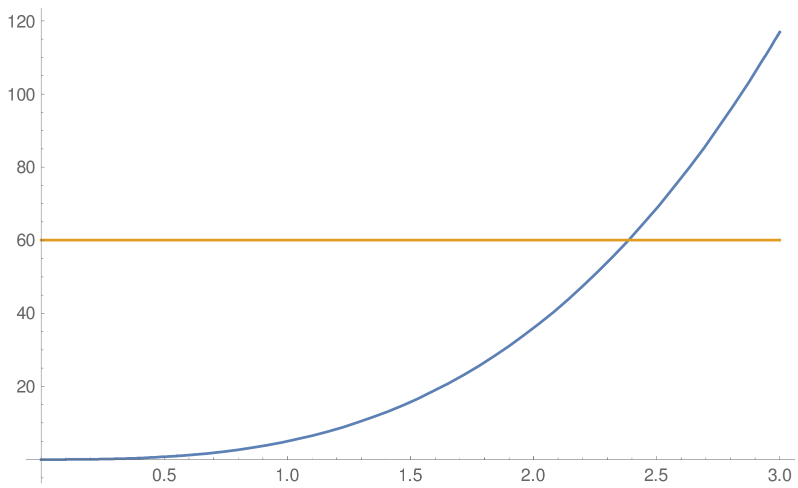
Nell'istante t_F in cui la macchina si ferma, la velocità è nulla, pertanto t_F è dato dall'equazione

$$-30 = -2{t_F}^3 - \frac{1}{2}{t_F}^2 \Leftrightarrow 4{t_F}^3 + {t_F}^2 - 60 = 0$$

I divisori di 6 e le frazioni con numeratore divisore di 6 e denominatore divisore di 4 non risolvono l'equazione, pertanto le soluzioni sono tutte irrazionali. Dato che la richiesta è comunque di una soluzione arrotondata conviene proseguire per via grafica. Riscriviamo quindi l'equazione nella forma

$$\begin{cases} y = 4{t_F}^3 + {t_F}^2 \\ y = 60 \end{cases}$$

Studiando il polinomio otteniamo il seguente grafico di intersezione per $t_F > 0$



La soluzione è molto vicina a 2 quindi usando un metodo di soluzione numerica (bisezione, tangenti o secanti) o procedendo per tentativi con la calcolatrice si ottiene il valore $t_F \approx 2.39s$.

c) La velocità media nei primi due secondi di frenata è data dall'integrale

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(30 - 2t^3 - \frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t = \frac{76}{3}$$

La funzione integranda è continua nell'intervallo di integrazione quindi, per il teorema della media (o applicando opportunamente il teorema di Lagrange) esiste un valore di t_m interno all'intervallo di integrazione in cui la funzione integranda assume esattamente il valore della media.

Dato che l'accelerazione è sempre negativa per t positivo allora la velocità è una funzione decrescente. Pertanto, per individuare in quale intervallo è situato il valore di t in cui v assume il valore della propria media, è sufficiente calcolare il valore di v in 1.

$$v(1) = 30 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{55}{2}$$

Dato che $\frac{55}{2} > \frac{76}{3}$ allora v, essendo decrescente, assume il valore $\frac{76}{3}$ per un valore di t maggiore di 1, quindi appartenente all'intervallo $]1,2[$.

d) Dalla legge oraria della velocità $v(t) = 30 - 2t^3 - \frac{1}{2}t^2$ possiamo ottener quella della posizione con un'altra integrazione definita. Ponendo $x = 0$ nella posizione in cui si trova l'auto al momento in cui inizia a frenare, abbiamo

$$x(t) = \int_0^t \left(30 - 2\tau^3 - \frac{1}{2}\tau^2\right) \mathrm{d}\tau = 30t - \frac{1}{2}\tau^4 - \frac{1}{6}t^3$$

In corrispondenza di $t_F \approx 2.39s$ la posizione (ottenuta sostituendo $2.39s$ nell'espressione della legge oraria ottenuta prima) è $x(t_F) \approx 53.1$, quindi l'auto di Marco si ferma prima di raggiungere l'ostacolo.

OSSERVAZIONI

La prova mi sembra ben equilibrata, tuttavia per essere proposta come prova mista sarebbe meglio rispettare meglio le convenzioni scientifiche sperimentali riguardo alle grandezze fisiche. In particolare sarebbe necessario fornire le formule per le grandezze che non "mescolino" valori numeri (tra l'altro privi di unità di misura) con lettere che invece rappresentano variabili fisiche. Inoltre le grandezze fisiche dovrebbero essere fornite con lo stesso numero di cifre significative. Ad esempio la formula per l'accelerazione, anziché essere fornita nella forma $a(t) = -6t^2 - t$, dovrebbe essere scritta, ad esempio, nella forma $a(t) = -qt^2 - pt$ con $q = 6.00m/s^4$ e $p = 1.00m/s^3$.

Il problema richiede la soluzione numerica di un'equazione, argomento non presente nei qdr.

PROBLEMA 2

a) La potenza dissipata da una resistenza R è, in generale, data dall'espressione $P = RI^2$. Dato che il generatore applica la sua fem alla serie di r e R allora la corrente che eroga è $I = \frac{f}{r+R}$, quindi

$$P = R\left(\frac{f}{r+R}\right)^2 = \frac{f^2 R}{(r+R)^2}$$

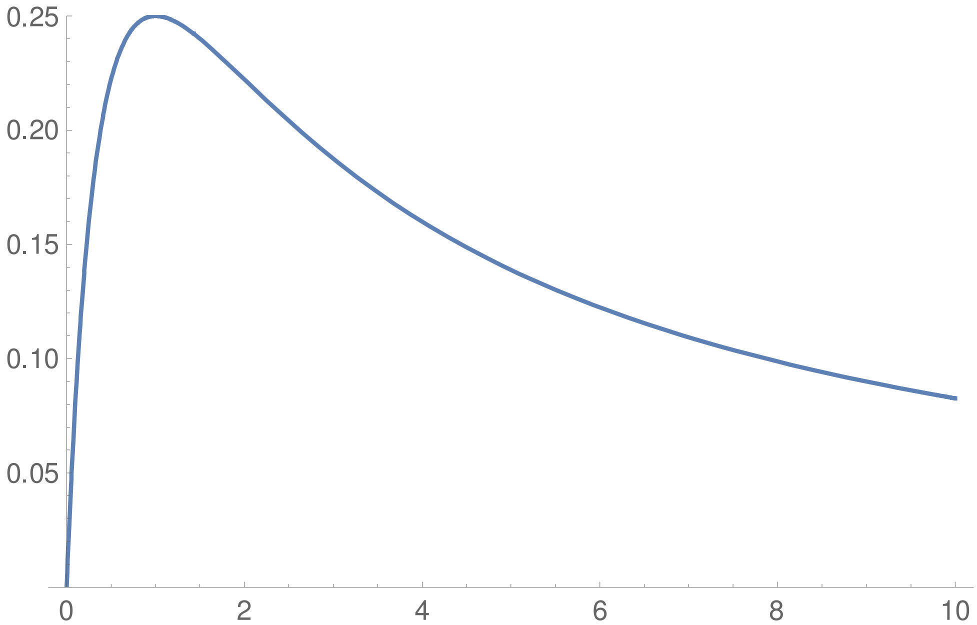
b) f è una forza elettromotrice, cioè una differenza di potenziale, quindi si misura in Volt (V). R ed r sono resistenze, si misurano in Ohm (Ω). P è una potenza, quindi si misura in Watt (W).

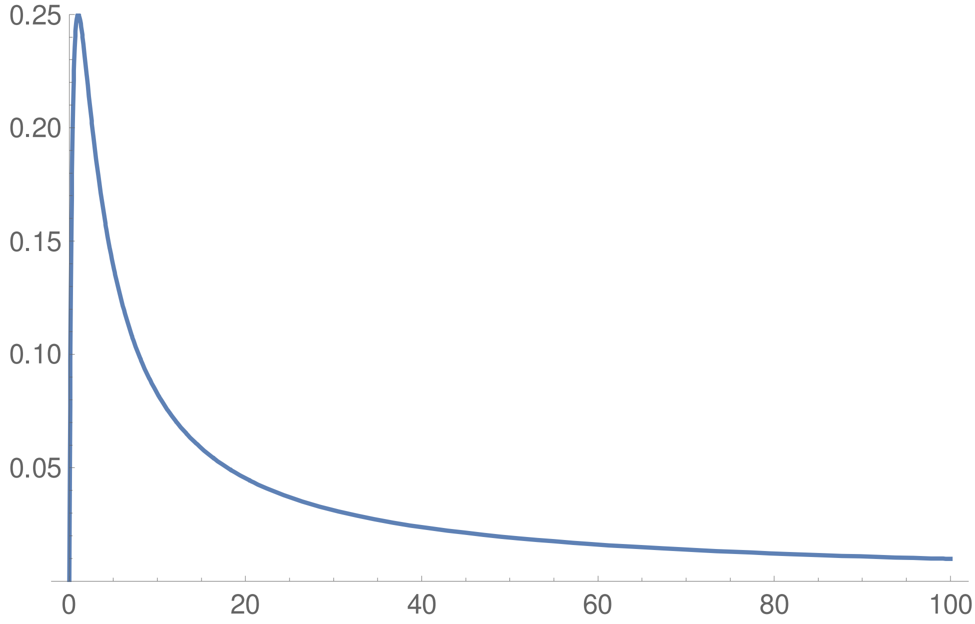
c) Per poter rappresentare più agevolmente la funzione richiesta, riscriviamola nella forma

$$P(R) = \frac{f^2}{r}\frac{R/r}{(1+R/r)^2}$$

Studiamo quindi la funzione $p(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$, il grafico di tale funzione rappresenta anche il grafico di $P(R)$ interpretando i valori delle ascisse come multipli di r e quelli delle ordinate come multipli di $\frac{f^2}{r}$.

Con gli usuali passaggi per lo studio di una funzione perveniamo al grafico (per $x > 0$). Ne diamo due versioni: una su un intervallo breve, che permette di apprezzare il massimo e un'altra su un intervallo più lungo che permette di apprezzare l'asintoto orizzontale coincidente con l'asse delle ascisse.





Il massimo è naturalmente l'unico zero positivo della derivata, che si presenta per $R = r$.

d) Se r è trascurabile rispetto ad R allora praticamente tutta la fem f erogata dal generatore agisce direttamente su R e quindi la corrente erogata dal generatore viene ad essere inversamente proporzionale ad R come anche la potenza, come si può verificare dalle espressioni ricavate precedentemente ponendo $r = 0$.

OSSERVAZIONI

Il problema è di per sé assolutamente fattibile ed equilibrato nei punti 1 e 3 (a e c), mentre forse è un po' troppo facile nei punti 2 e 4 (b e d) rispetto al problema 1. L'unica difficoltà che trovo potrebbe essere "fastidiosa" anche per gli studenti più bravi, è che il primo punto richiede di ricordare la formula della potenza dissipata da una resistenza che è attualmente programma di quarta. Per quanto sia in linea con le nuove richieste, ricordare questi dettagli potrebbe essere difficile anche per gli eccellenti.

QUESTIONARIO

1) $P(x) = x^2 + bx + c$, quindi $P(1) = 1 + b + c$ e $P(2) = 4 + 2b + c$. Questi due numeri sono zeri di $P(x)$, quindi, per il teorema fondamentale dell'algebra

$$P(x) = [x - P(1)][x - P(2)] = x^2 - \big(P(1) + P(2)\big)x + P(1)P(2)$$

Pertanto, usando il principio di identità dei polinomi, deve risultare

$$\begin{cases} b = -P(1) - P(2) \Rightarrow 2b + 2c = 5 \\ c = P(1)P(2) \Rightarrow 2b^2 + c^2 + 3bc + 6b + 4c + 4 = 0 \end{cases}$$

che risolto dà $b = -\frac{9}{2}$ e $c = 7$.

OSSERVAZIONI

Onestamente questo lo trovo abbastanza machiavellico per un liceo, anche se non escludo che ragazzi brillanti sappiano trovare la strada

OSSERVAZIONI SUI QUESITI 2) e 3): le soluzioni di questi quesiti sono abbastanza standard e in linea con quanto gli studenti apprendono nel corso del quinquennio anche se coinvolgono in maniera non banale le conoscenze dei rispettivi ambiti di applicazione.

4) Data la definizione di g, la funzione f risulta essere la derivata di g (teorema di Torricelli-Barrow), pertanto g ha un minimo in 4 perché in tal punto la derivata f si annulla passando dal valore negativo (g decrescente) a quello positivo (g crescente).

OSSERVAZIONI

Questo quesito è molto interessante e assolutamente in linea con la valutazione di un uso critico e non meccanico della matematica

5) Conoscendo la legge oraria della posizione di un oggetto l'accelerazione è data dalla derivata seconda rispetto al tempo, per cui essendo $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$, allora la velocità è data da $v(t) = s'(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = 20\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$ e l'accelerazione da $a(t) = v'(t) = 20\left(-e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 10e^{-\frac{t}{2}}$. Pertanto l'accelerazione richiesta è $a(4) = 10e^{-\frac{4}{2}} = 10e^{-2} \approx 1.35$.

OSSERVAZIONI: un quesito non difficile e alla portata sostanzialmente di tutti gli studenti che abbiano una preparazione quanto meno sufficiente per un liceo scientifico e che abbiano un minimo di comprensione degli argomenti studiati che vada oltre l'applicazione meccanica delle procedure. Resta l'osservazione già fatta altrove riguardo alle unità di misura, aspetto che in una prova mista di matematica e fisica non dovrebbe essere trascurato.

6) Se 0.3 è la probabilità di colpire un bersaglio, allora $1 - 0.3 = 0.7$ è la probabilità di non colpirlo. Quindi la probabilità di non colpirlo mai in n spari consecutivi è $(0.7)^n$. La probabilità di colpirlo almeno una volta è la probabilità complementare a quella di non colpirlo mai quindi tale probabilità è $1 - (0.7)^n$ che è maggiore di 0.99 per il minimo valore di n che risolve la disequazione $1 - (0.7)^n \geq 0.99 \Rightarrow n \geq \frac{2\log 10}{\log 10 - \log 7} \approx 13$.

OSSERVAZIONI SUL QUESITO 7): altro quesito non banale anche se non coinvolge altro che conoscenze elementari (in questo caso di geometria piana e solida)

OSSERVAZIONI SUL QUESITO 8): questo, secondo me, è completamente fuori portata.