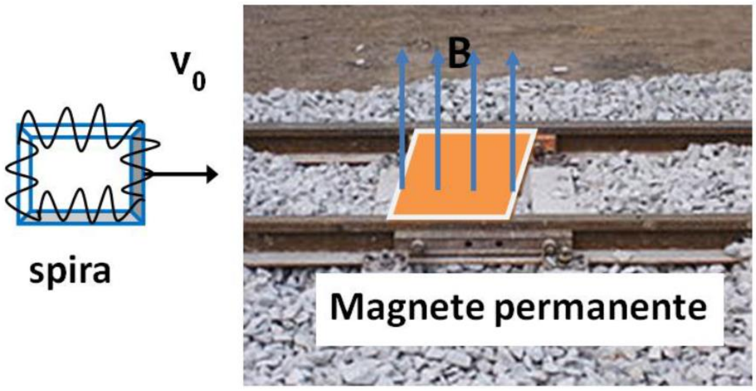
Soluzione di Adriana Lanza

PROBLEMA 1

Hai giocato con il tuo fratellino con un trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo, più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato $L = 5{,}0 cm$ fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica $R = 0{,}020 \Omega$. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



1. Spiega qualitativamente l'origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra al magnete.

2. Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico $B = 0{,}85 T$ uniforme, perpendicolare al magnete stesso (e quindi anche alla spira) e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l'equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{R}v$$

dove $m = 50 g$ è la massa del vagone.

3. Verifica che l'equazione del moto ha come soluzione $v = v_0 e^{-t/\tau}$ dove v_0 è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante τ in termini delle altre grandezze presenti nell'equazione del moto e calcolandone il valore numerico.

4. Assumendo per la velocità iniziale il valore $v_0 = 0{,}20 \, {}^{m}/_{s}$, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.

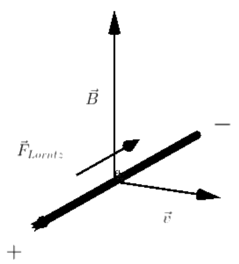
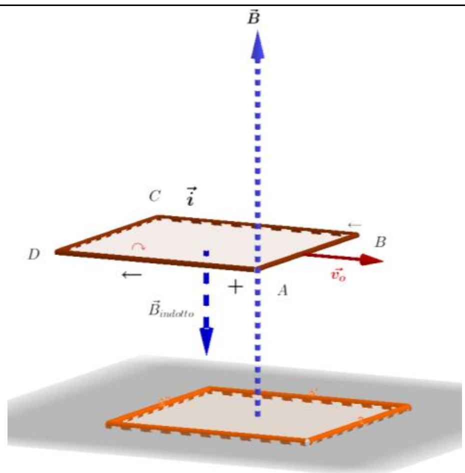
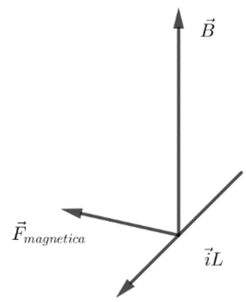
5. Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco insormontabile per il vagone. Determina il valore numerico della velocità limite.

Soluzione di Adriana Lanza

Quadri di riferimento

Nuclei tematici fondamentali	
Fisica	**Matematica**
SPAZIO, TEMPO E MOTO Grandezze cinematiche **FORZE E CAMPI** **Rappresentazione di forze mediante il concetto di campo** **Induzione elettromagnetica**	**INSIEMI E FUNZIONI** **Proprietà delle funzioni** **Calcolo differenziale** **Calcolo integrale**
Obiettivi	
Fisica	**Matematica**
Discutere il moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza **Studio del moto di un punto materiale** **Descrivere l'azione delle forze elettriche e magnetiche mediante il concetto di campo** **Descrivere e interpretare fenomeni di induzione elettromagnetica e ricavare correnti e forze elettromotrici indotte**	**Determinare la derivata di una funzione** **Applicare l'integrale definito al calcolo di aree**

1. **L'azione frenante** sulla spira è dovuta al fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

		
Forza di Lorentz	Campo magnetico indotto	Forza magnetica

Non appena il lato AB penetra nella regione in cui è presente il campo magnetico, gli elettroni di conduzione, in moto e in presenza del campo magnetico, sono soggetti alla forza di Lorentz, di modulo $F_{Lorentz} = evB$, e si sposteranno verso un estremo, mentre nell'altro estremo comparirà una carica positiva, come in figura.

All'interno del conduttore AB un campo elettrico di intensità vB si oppone alla separazione delle cariche e compie lavoro per unità di carica pari a vBL, essendo L la lunghezza di AB

Si genera, fra l'estremo positivo e l'estremo negativo della barretta, una differenza di potenziale $\Delta V = vBL$ e nel circuito circola una corrente di intensità $i = \frac{BLv}{R}$ il cui verso è orario nella faccia superiore della spira, antiorario in quella inferiore.

La spira, pertanto, equivale a una lamina magnetica la cui faccia superiore corrisponde al sud e la faccia inferiore al Nord e di conseguenza subirà un'azione di repulsione da parte del magnete.

Se la spira riesce, prima di fermarsi, a percorrere uno spazio pari a L e a cominciare a uscire dal campo, nella fase di uscita si inverte il verso della corrente; la forza magnetica diventa attrattiva ma sempre diretta in verso opposto alla velocità (moto decelerato).

2. Per la presenza della corrente indotta agirà sul lato AB e sulle porzioni dei lati BC e AD che, durante il moto, restano immersi nel campo magnetico**, una forza magnetica** $\vec{F} = \vec{i}\, \boldsymbol{l} \times \vec{B}$ dove l è la lunghezza del corrispondente tratto di filo.

   È facile verificare che le forze agenti sui due tratti paralleli, percorsi da correnti di uguale intensità ma verso differente, hanno risultante nulla.

   Sulla spira agisce, pertanto la forza relativa al lato AB, di intensità $F=\frac{B^2L^2v}{R}$

(Nella fase di uscita, sarà ovviamente il lato CD a rimanere immerso nel campo e a subire la forza deceleratrice)

Per il secondo principio della dinamica potremo scrivere l'equazione del moto.

$$ma = -\frac{B^2L^2v}{R} \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{R}$$

3. **Verifica della soluzione proposta dal testo** $v = v_o e^{-\frac{t}{\tau}}$

Dovendo l'esponente essere adimensionale, τ ha le dimensioni di un tempo (costante di tempo).

Sostituendo il valore $\frac{dv}{dt} = -\frac{v_o}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ si ottiene

$$-m\frac{v_o}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{B^2L^2}{R}v_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'equazione è soddisfatta se $-\frac{m}{\tau} = -\frac{B^2L^2}{R} \rightarrow \tau = \frac{mR}{B^2L^2}$

Sostituendo i valori numerici con riferimento, per le misure delle grandezze, al S.I.

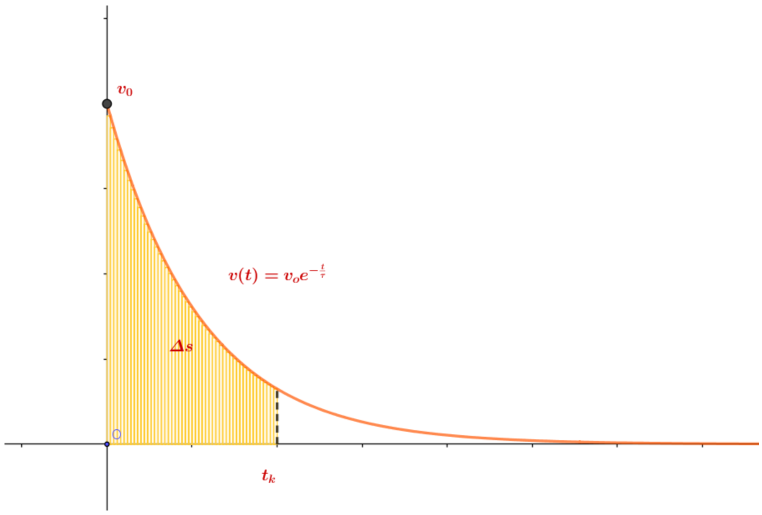
$$\tau = \frac{mR}{B^2L^2} = \left(\frac{50 \cdot 20}{0{,}85^2 \cdot 25}\ 10^{-3}10^{-3}10^4 \approx 0{,}55\right)s$$

I passaggi seguenti giustificano la misura in secondi

$$\frac{kg\frac{V}{A}}{\left(\frac{V\cdot s}{m^2}\right)^2 m^2} \rightarrow \frac{kg\cdot m^2}{V\cdot A\cdot s^2} \rightarrow \frac{N\cdot m}{\frac{J}{s}} \rightarrow s$$

4. **Lo spazio percorso dalla spira** dall'istante iniziale a un istante t_k corrisponde all'area sottesa dal grafico della funzione $v(t)$ nell'intervallo considerato, cioè

$$\Delta s = \int_0^{t_k} v(t)dt$$



Per uscire completamente dal campo magnetico la spira deve percorrere uno spazio pari a 2L
Imponendo

$$\int_0^{t_k} v(t)dt = 2L \rightarrow$$

$$\int_0^{t_k} v_o e^{-\frac{t}{\tau}} \, dt = -v_o\tau \left[e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t_k} = -v_o\tau\left(e^{-\frac{t_k}{\tau}} - 1 =\right) = v_o\tau\left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau}}\right) = 2L$$

Da cui

$$\frac{v_o\tau - 2L}{v_o\tau} = e^{-\frac{t_k}{\tau}} \rightarrow -\frac{t_k}{\tau} = \ln\frac{v_o\tau - 2L}{v_o\tau} \rightarrow t_k = \tau\ln\frac{v_o\tau}{v_o\tau - 2L}$$

Sostituendo i valori numerici si trova

$$t_k = (0.55\ln\frac{0.55\cdot 0.20}{0.55\cdot 0.20 - 2\cdot 0{,}05} = \frac{11}{20}\ln 11 \approx 1{,}32)\ s$$

Il corrispondente valore della velocità è $v(t_k) = v_o e^{-\ln 11} = \frac{1}{11}\ v_o \approx 0{,}02\ \frac{m}{s}$

5. L'area sottesa dal grafico di $v(t)\ con\ \ 0 \leq t < +\infty$ rappresenta lo spazio che può percorrere la spira prima di fermarsi (teoricamente in un tempo infinito)
   Questo spazio, in funzione della velocità iniziale è uguale a $\lim_{t_k \to +\infty} v_o\tau\left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau}}\right) = v_o\tau$

   Imponendo $v_o\tau > 2L$ si trova $v_o > \frac{2L}{\tau} \approx 0.18\ \frac{m}{s}$

Va notato che, in pratica, ogni fenomeno transitorio con legge esponenziale si arresta dopo circa 5 costanti di tempo. Si può pertanto imporre $v_o\tau\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = v_o\tau(1 - e^{-5}) > 2L$

Essendo $\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) \approx 1{,}007$

$$v_o > \frac{2L}{\tau(1 - e^{-5})} \approx 0{,}182\,\frac{m}{s}$$ valore non molto lontano dal precedente $\frac{2L}{\tau} \approx 0.183\,\frac{m}{s}$