Premessa alla proposta di una simulazione di II prova scritta di Matematica-Fisica per il Liceo Scientifico

Richiamiamo per punti le ragioni della nostra proposta di petizione dell'11 gennaio 2019, che ad oggi ha raggiunto 18669 firme.

1. Forte preoccupazione dei docenti di Matematica e Fisica ed esperti di didattica dopo aver visto le simulazioni proposte recentemente dal MIUR.
2. Le simulazioni di matematica-fisica e di fisica proposte dal MIUR (non solo quelle più recenti, ma anche tutte quelle passate) appaiono di fatto, tarate sostanzialmente sulla fisica, di difficoltà non proporzionata né al monte ore di fisica né alla prassi didattica (cfr libri di testo più diffusi).
3. L'importanza di tenere conto della raccomandazione di proporre una prova d'esame sui temi sviluppati solo nell'ultimo anno di corso (senza tuttavia escludere il ricorso necessario a quanto appreso negli anni precedenti).
4. L'importanza di tenere conto della raccomandazione che i problemi oggetto della seconda prova debbano essere suddivisi in domande di difficoltà graduale, cercando di fare in modo che quanto richiesto in ogni domanda non richieda, necessariamente, di avere esplicitamente risposto alle precedenti domande.
5. I QdR di Matematica e di Fisica hanno sollevato qualche perplessità così come la genericità delle griglie di correzione/valutazione delle prove.
6. Il MIUR non ha ritenuto necessario elaborare un QdR della prova integrata di Matematica e Fisica, assumendo implicitamente la prospettiva, assai poco fondata sul piano epistemologico, che tale prova integrata sia da costruirsi sulla semplice "giustapposizione" dei contenuti delle due distinte discipline.
7. Le simulazioni prodotte dal MIUR il 20.12.2018 appaiono ben distanti dai QdR di Matematica e di Fisica.

La petizione conteneva anche una parte propositiva che ora esplicitiamo in questa proposta.

A seguito delle precedenti osservazioni, il gruppo promotore della petizione con il sostegno dei docenti della lista Mathnews ha elaborato una serie di documenti che possono essere utili per la formulazione della II prova d'esame:

a) Proposta di Struttura della prova: 2 problemi di matematica+fisica (prova integrata), 4 quesiti di matematica, 4 quesiti di fisica. Pur ritenendo che questa struttura non sia la scelta migliore per affrontare una prova di Matematica e Fisica si è voluto restare il più possibile nelle linee indicate dal MIUR con le proposte di simulazione del 20 Dicembre.
b) Proposta di QdR di Matematica e Fisica (prova integrata).
c) Proposta di Griglia di correzione/valutazione di Matematica e Fisica (prova integrata).
d) Proposta di Esempio di prova: 2 problemi di matematica+fisica (prova integrata), 4 quesiti di matematica, 4 quesiti di fisica.

Il gruppo intende precisare di aver scelto di non intervenire sui documenti già pubblicati da parte del MIUR ritenendo che ulteriori cambiamenti a questo punto dell'anno potrebbero creare ancora maggiore confusione e disorientamento tra docenti, studenti e genitori. Ha quindi cercato di avanzare una proposta nell'attuale contesto auspicando che la richiesta di collaborazione con docenti e associazioni porti per il prossimo anno scolastico ad una riflessione più approfondita sulla struttura della prova e a un serio ripensamento delle scelte operate per questo anno scolastico.

Il gruppo che ha elaborato i sopracitati documenti:

Ivan Cervesato, Daniela Gambi, Giovanna Mayer, Domingo Paola, Luisa Prodi, Ida Spagnuolo.

Ivan Cervesato, docente di matematica e fisica nei Licei dal 1993, attualmente in servizio presso il Liceo Scientifico "A. Einstein" di Milano.

Daniela Gambi, docente di matematica e fisica nei Licei dal 1991, attualmente in servizio presso il Liceo "L. Ariosto" di Ferrara. Si è occupata di formazione dei docenti nell'ambito di diversi progetti: M@t.abel, Emergenza Matematica USR-ER, Agorà Matematica - Ferrara, e, attualmente, Mathesis Sezione di Ferrara.

Giovanna Mayer, docente di matematica Liceo Scientifico Aristotele di Roma in sezioni PNI e 2.0, di ruolo dal 1984 e prima ricercatore del gruppo Laboratorio Didattico del Prof. L. Radice. Si è sempre occupata di formazione dei docenti in vari contesti (Lab.Didattico, SSIS, PON nelle Regioni Obiettivo Convergenza, USR, PQM….). Ha collaborato a diversi corsi PLS con l'Università di Roma3. Autrice di diverse attività per i progetti PQM e M@tabel, Consulente Indire per i PdM.

Domingo Paola, docente di matematica e fisica Liceo "G. Bruno" di Albenga, vicepresidente della CIEAEM (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques) dal 2006 al 2012; membro della CIIM (Commissione Italiana Insegnamento della Matematica), dal 2008 al 2018 membro del Comitato scientifico per il miglioramento della qualità dell'insegnamento della matematica istituito con DM n.74 del 12 settembre 2007.

Luisa Prodi, insegnante di matematica e fisica nel liceo scientifico.

Ida Spagnuolo, già docente di matematica e fisica. Dal 1999 si è sempre occupata di formazione dei docenti in vari contesti (SSIS,TFA, M@tabel, PON nelle Regioni Obiettivo Convergenza, USR,...). Membro del Gruppo di lavoro Nazionale per il PLS, ha collaborato a diversi corsi PLS con le Università di Roma1 e Roma2. Collabora con INVALSI come Autore e Valutatore Esterno (NEV).

LICEO SCIENTIFICO - PROVA DI MATEMATICA E FISICA

PROPOSTA QUADRO DI RIFERIMENTO DI MATEMATICA E FISICA

Premessa

Presentiamo qui una proposta di quadro di riferimento per la prova scritta di Matematica e Fisica, che non è stato presentato dal MIUR il 26 novembre 2018. A nostro parere non può semplicemente essere la somma del quadro di riferimento di Matematica e di quello di Fisica, perché i contenuti sarebbero troppi. Ci siamo quindi sforzati di effettuare una scelta, che a noi sembra equilibrata e sensata, di temi di Matematica e di Fisica, desumendoli dai QdR pubblicati il 26 novembre 2018 e dalle *Indicazioni Nazionali* per gli indirizzi di Liceo Scientifico.

DISCIPLINE: MATEMATICA E FISICA

Caratteristiche della prova d'esame

La prova consiste nella risoluzione di un problema a scelta del candidato tra due proposte e nella risposta a quattro quesiti tra otto proposte.

Essa è finalizzata ad accertare l'acquisizione dei principali concetti e metodi della matematica e della fisica di base, anche in una prospettiva storico-critica, in relazione ai contenuti previsti dalle vigenti Indicazioni Nazionali per il percorso di studio del liceo scientifico, tenendo in considerazione anche il differente monte orario delle due discipline nei cinque anni.

In particolare la prova, che prevede una integrazione tra le differenti discipline, mira a rilevare:

a) la comprensione dei concetti fondamentali delle due discipline;
b) la comprensione e la padronanza delle tecniche fondamentali utilizzate nelle due discipline per la risoluzione di problemi e la costruzione di modelli;
c) la capacità di utilizzare semplici strumenti matematici del calcolo differenziale e integrale e correlarli a situazioni fisiche;
d) la capacità di argomentare utilizzando ipotesi, leggi, teoremi e di giustificare le strategie risolutive adottate.

I problemi potranno avere carattere astratto, applicativo o anche contenere riferimenti a testi classici o a momenti storici significativi della matematica e della fisica. Il ruolo dei calcoli sarà limitato a situazioni semplici e non artificiose.

La traccia sarà predisposta in modo da proporre temi, argomenti e situazioni problematiche che consentano, in modo integrato, di accertare conoscenze, abilità e competenze riferite ai nuclei tematici fondamentali richiamati dal successivo QdR. In particolare i problemi potranno avviarsi sia da una situazione fisica sia da un contesto matematico; uno dei due problemi proporrà una situazione nel contesto della fisica classica, riguardante le nozioni fondamentali dell'elettromagnetismo, l'altro proporrà una situazione riferentesi al contesto della fisica moderna (per esempio relatività ristretta, corpo nero, effetto fotoelettrico, leggi di decadimento radioattivo).

Degli otto quesiti, quattro saranno di contenuto matematico e quattro di contenuto fisico e potranno riguardare qualunque argomento previsto dal quadro di riferimento di matematica e fisica di seguito proposto.

Durata della prova: da quattro a sei ore

Il seguente quadro di riferimento, pur non essendo esaustivo dei contenuti matematici e fisici presenti nelle Indicazioni Nazionali, vuole costituire una guida per la formulazione della prova di esame.

Quadro di riferimento di matematica e fisica

Nuclei tematici fondamentali	
Matematica	**Fisica**
ARITMETICA E ALGEBRA Equazioni, disequazioni e sistemi **GEOMETRIA** Principali proprietà delle figure del piano e dello spazio Sistemi cartesiani di riferimento, luoghi geometrici con particolare riferimento alle rette e alle coniche Trigonometria: risoluzione dei triangoli Geometria analitica nello spazio: piani, rette e sfere **RELAZIONI E FUNZIONI** Funzioni e successioni elementari Calcolo differenziale Calcolo integrale e funzioni integrali **DATI E PREVISIONI** Probabilità totale Probabilità composta Dipendenza e indipendenza di eventi	**SPAZIO TEMPO E MOTO** Sistemi di riferimento e trasformazioni Moto di un punto materiale Cinematica classica e relativistica **ENERGIA E MATERIA** Lavoro ed energia Conservazione dell'energia Trasformazione dell'energia Emissione, assorbimento e trasporto di energia Equivalenza massa-energia Fissione e fusione nucleare **ONDE E PARTICELLE** Onde elettromagnetiche Dualismo onda-particella Effetto fotoelettrico (ipotesi di Planck e Einstein) **FORZE E CAMPI** Rappresentazione di forze mediante il concetto di campo Campo elettromagnetico Induzione elettromagnetica

Obiettivi della prova

Con riferimento ai Nuclei Tematici fondamentali, la prova intende accertare che il candidato sia in grado di:

- Risolvere, anche per via grafica, equazioni, disequazioni e sistemi algebrici fino al 2° grado ed equazioni o disequazioni riconducibili al 2° grado.
- Scegliere opportuni sistemi di riferimento per l'analisi di un problema.
- Determinare luoghi geometrici a partire da proprietà assegnate.
- Studiare rette, piani, superfici sferiche e loro intersezioni nello spazio, utilizzando le coordinate cartesiane.
- Analizzare le proprietà di invertibilità di funzioni reali di variabile reale. Riconoscere ed applicare la composizione di funzioni.
- Analizzare le proprietà di parità, monotonia, periodicità di funzioni definite sull'insieme dei numeri reali o su un suo sottoinsieme.
- Individuare le caratteristiche fondamentali e i parametri caratteristici delle progressioni aritmetiche e geometriche e delle funzioni polinomiali, lineari a tratti, razionali fratte, circolari, esponenziali e logaritmiche, modulo e loro composizioni semplici.
- A partire dall'espressione analitica di una funzione, individuare le caratteristiche salienti del suo grafico e viceversa; a partire dal grafico di una funzione, tracciare i grafici di funzioni correlate: l'inversa (se esiste), la reciproca, il modulo, o altre funzioni ottenute con trasformazioni geometriche (isometrie e dilatazioni)
- Riconoscere le caratteristiche di continuità e derivabilità di una funzione e applicare i principali teoremi riguardanti la continuità e la derivabilità.
- Determinare la derivata di una funzione ed interpretarne geometricamente il significato.
- Applicare il calcolo differenziale a problemi di massimo e minimo, sapendo utilizzare modelli matematici opportuni: le funzioni circolari per esprimere relazioni tra gli elementi di una data configurazione geometrica; i risultati principali della geometria euclidea, in particolare la geometria del triangolo e del cerchio, le proprietà dei parallelogrammi, la similitudine, gli elementi fondamentali della geometria solida; rette e coniche e loro intersezioni nel piano.
- Analizzare le caratteristiche della funzione integrale di una funzione continua e applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
- A partire dal grafico di una funzione, tracciare i grafici della sua derivata e di una sua funzione integrale.
- Determinare primitive di funzioni utilizzando integrali immediati, semplici integrazione per sostituzione o per parti.
- Interpretare geometricamente l'integrale definito e applicarlo al calcolo di aree e volumi.
- Determinare la probabilità di un evento utilizzando i teoremi fondamentali della probabilità e il calcolo combinatorio.
- Valutare la dipendenza o l'indipendenza di eventi casuali.
- Rappresentare e interpretare, tramite un grafico, la relazione tra due grandezze fisiche.

- Determinare e discutere il moto di punti materiali sotto l'azione di forze.
- Utilizzare le trasformazioni di Galileo o di Lorentz per esprimere i valori di grandezze cinematiche e dinamiche in diversi sistemi di riferimento.
- Determinare e discutere il moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza costante o di una forza di Lorentz.
- Applicare le relazioni relativistiche sulla dilatazione dei tempi e sulla contrazione delle lunghezze e individuare in quali casi si applica il limite non relativistico.
- Determinare l'energia cinetica di un punto materiale in moto e l'energia potenziale di un punto materiale sottoposto a forze conservative.
- Mettere in relazione la variazione di energia cinetica, di energia potenziale e di energia meccanica con il lavoro fatto dalle forze agenti.
- Utilizzare la conservazione dell'energia nello studio del moto di un punto materiale.
- Determinare la densità di energia di campi elettrici e magnetici e applicare il concetto di trasporto di energia da parte di un'onda elettromagnetica.
- Applicare l'equivalenza massa-energia in situazioni concrete tratte da esempi di decadimenti radioattivi, reazioni di fissione o di fusione nucleare.
- Interpretare lo spettro di emissione del corpo nero utilizzando la legge di distribuzione di Planck.
- Determinare le frequenze emesse per transizione tra i livelli energetici dell'atomo di Bohr.
- Determinare la lunghezza d'onda, la frequenza, il periodo, la fase e la velocità di un'onda armonica e le relazioni tra queste grandezze.
- Applicare l'equazione di Einstein dell'effetto fotoelettrico.
- Descrivere l'azione delle forze elettromagnetiche mediante il concetto di campo.
- Utilizzare il teorema di Gauss per determinare le caratteristiche di campi elettrici generati da distribuzioni simmetriche di cariche e per discutere il comportamento delle cariche elettriche nei metalli.
- Utilizzare il teorema di Ampère per determinare le caratteristiche di un campo magnetico generato da un filo percorso da corrente e da un solenoide ideale.
- Descrivere e interpretare fenomeni di induzione elettromagnetica e ricavare correnti e forze elettromotrici indotte.
- Determinare la forza agente su un filo di lunghezza infinita percorso da corrente in presenza di un campo magnetico, la forza tra due fili di lunghezza infinita paralleli percorsi da corrente e la forza che agisce su un ramo di un circuito in moto in un campo magnetico per effetto della corrente indotta.
- Determinare il momento delle forze magnetiche agenti su una spira percorsa da corrente in presenza di un campo magnetico uniforme.

L. S. «……………………………» - ESAME DI STATO 2019 – COMMISSIONE………………

GRIGLIA DI VALUTAZIONE SECONDA PROVA – MATEMATICA E FISICA

Candidato ………………………………………………………….. Classe ………………..

Viene assegnato un punteggio grezzo *massimo* pari a 80 per il problema e a 20 per ciascun quesito.

		Problema n.					Quesiti n.			
INDICATORI	punti	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**				
Analizzare	0									
	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
Sviluppare il processo risolutivo	0									
	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati	0									
	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
Argomentare	0									
	1									
	2									
	3									
	4									
Pesi punti problema		0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1	1	1	1
Subtotali										

Corrispondenza	
153-160	20
144-152	19
134-143	18
124-133	17
115-123	16
106-114	15
97-105	14
88-96	13
80-87	**12**
73-79	11
66-72	10
59-65	9
52-58	8
45-51	7
38-44	6
31-37	5
24-30	4
16-23	3
9-15	2
<9	1

VALUTAZIONE

PROVA

……………../20

Totale	

N.B.: la somma dei pesi – nell'ipotesi proposta - assegnati ai sottopunti del problema deve dare 4. Il livello di sufficienza corrisponde ai punteggi con sfondo in colore. I descrittori per ogni indicatore sono sul retro della presente scheda di valutazione.

Il presidente della Commissione: ……………………………………..

I commissari:

Prof.		Prof.	
Prof.		Prof.	
Prof.		Prof.	

INDICATORI	DESCRITTORI	Punti
Analizzare Esaminare la situazione problematica individuandone gli aspetti significativi e formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli, analogie o leggi.	Punto non affrontato	0
	Non comprende o comprende in modo parziale e inadeguato la situazione problematica proposta, senza riuscire ad individuarne gli aspetti significativi. Non colloca la situazione problematica nel pertinente quadro concettuale.	1
	Mostra una comprensione solo parziale della situazione problematica proposta, di cui individua alcuni aspetti significativi e che solo in parte riconduce al pertinente quadro concettuale.	2
	Riesce ad individuare con sufficiente precisione gli aspetti concettualmente salienti della situazione problematica proposta, che viene ricondotta al pertinente quadro concettuale. Formula ipotesi esplicative nella sostanza corrette, pur non riuscendo ad applicare pienamente e con il corretto grado di dettaglio le necessarie leggi.	3
	Individua con buona precisione quasi tutti gli aspetti concettualmente salienti della situazione problematica proposta, che viene ricondotta al pertinente quadro concettuale. Formula ipotesi esplicative corrette, facendo riferimento alle necessarie leggi.	4
	Individua con precisione tutti gli aspetti concettualmente salienti della situazione problematica proposta, che viene ricondotta ad un ben definito quadro concettuale. Formula ipotesi esplicative corrette e precise, nell'ambito del pertinente modello interpretativo.	5
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.	Punto non affrontato.	0
	Formalizza la situazione problematica in modo molto frammentario e del tutto inadeguato. Non riconosce il formalismo matematico necessario alla risoluzione, senza pervenire a risultati o pervenendo a risultati sostanzialmente scorretti.	1
	Formalizza la situazione problematica in modo parziale e inadeguato. Utilizza in modo impreciso o incoerente il formalismo matematico, senza giungere a risultati corretti.	2
	Formalizza la situazione problematica in modo parziale. Utilizza in modo spesso impreciso il formalismo matematico, giungendo a risultati solo in parte corretti.	3
	Riesce a formalizzare la situazione problematica con sufficiente completezza. Applica il formalismo matematico in modo sostanzialmente corretto, anche se non sempre pienamente coerente o comunque con imprecisioni, giungendo a risultati globalmente accettabili.	4
	Riesce a formalizzare la situazione problematica in modo completo. Applica correttamente il formalismo matematico, pur con qualche imprecisione, giungendo a risultati esatti.	5
	Riesce a formalizzare la situazione problematica in modo completo, preciso, elegante. Individua con sicurezza il pertinente il formalismo matematico, che applica con padronanza e che utilizza per giungere a risultati esatti.	6
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare o elaborare i dati proposti o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici, leggi, principi e regole.	Punto non affrontato.	0
	Non interpreta correttamente i dati, di cui riesce a fornire elaborazione solo parziale e frammentaria, senza ricondurli al pertinente ambito di modellizzazione.	1
	Interpreta in modo parzialmente corretto i dati, di cui fornisce elaborazione viziata da imprecisioni, riconducendoli solo in parte al pertinente ambito di modellizzazione.	2
	Interpreta con un sufficiente grado di precisione i dati, di cui fornisce un'elaborazione accettabile seppur talora viziata da imprecisioni, riconducendoli al pertinente ambito di modellizzazione.	3
	Interpreta con un buon grado di precisione i dati, di cui fornisce un'elaborazione nel complesso completa, riconducendoli al pertinente ambito di modellizzazione.	4
	Interpreta in modo pienamente coerente i dati, di cui fornisce un'elaborazione completa e precisa, riconducendoli al pertinente ambito di modellizzazione.	5
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta e utilizzando i linguaggi specifici disciplinari.	Punto non affrontato.	0
	Non argomenta o argomenta in modo insufficiente o errato la strategia/procedura risolutiva e la fase di verifica, utilizzando un linguaggio non appropriato o molto impreciso.	1
	Argomenta in maniera sintetica e sostanzialmente coerente la strategia/procedura esecutiva o la fase di verifica. Utilizza un linguaggio per lo più appropriato, anche se non sempre rigoroso.	2
	Argomenta in modo coerente, anche se talora non pienamente completo, la procedura risolutiva, di cui fornisce commento e adeguata giustificazione in termini formali nel complesso corretti e pertinenti.	3
	Argomenta sempre in modo coerente, preciso, accurato e completo tanto le strategie adottate quanto le soluzioni ottenute. Dimostra un'ottima padronanza nell'utilizzo del linguaggio disciplinare.	4

Il livello di sufficienza corrisponde alle caselle con sfondo in colore.

Esempio di simulazione della prova (versione con risoluzioni e commenti)

ESAME DI LICEO SCIENTIFICO 2019

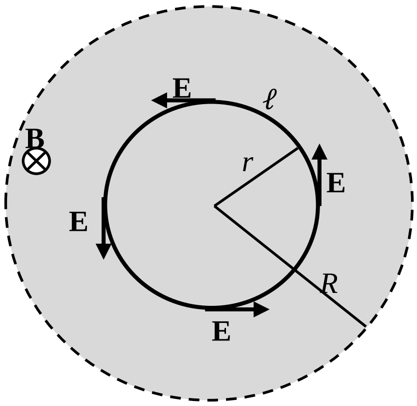
ESEMPIO DI PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Febbraio 2019

PROBLEMA N° 1

(ispirato al testo universitario di Halliday-Resnick, Fisica, edizione italiana 1970, pag. 260)

Con riferimento alla figura a fianco, si consideri la regione piana circolare di raggio R, sede di un campo magnetico $\vec{B}$ le cui linee di campo sono perpendicolari al piano del foglio e in esso entranti. Al di fuori della regione di raggio R si supponga che il campo sia trascurabile.



Il campo $\vec{B}$ ha intensità $B = B(t)$, funzione che dipende solo dal tempo e che è strettamente crescente sul suo dominio.

Si consideri ora una spira circolare ℓ conduttrice di raggio r, concentrica e complanare alla regione di raggio R.

a) Si presentino e si discutano gli aspetti fondamentali del fenomeno fisico in base al quale nella spira piana circola una corrente elettrica.

b) Si mostri, utilizzando l'equazione di Maxwell relativa alla circuitazione del campo elettrico, che il modulo E_I del campo elettrico indotto è espresso dalla seguente funzione:

$$E_I(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} r \dfrac{dB(t)}{dt}, \text{ per } 0 \le r \le R \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{R^2}{r} \dfrac{dB(t)}{dt}, \text{ per } r > R \end{cases}$$

c) Dopo avere dato la definizione di funzione continua in un punto x_0 del suo insieme di definizione, si stabilisca, giustificando adeguatamente la risposta, se la funzione $E_I(r)$ è continua sul suo insieme di definizione.

d) Si assuma che $R = 0{,}4$ m e che il modulo del campo magnetico vari secondo la legge $B(t) = \alpha t + \beta$, dove t è espresso in secondi, $\alpha = 2$ Ts^{-1} e $\beta = 1$ T. Si tracci il grafico della funzione

$$E_I(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} r \dfrac{dB(t)}{dt}, \text{ per } 0 \le r \le R \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{R^2}{r} \dfrac{dB(t)}{dt}, \text{ per } r > R \end{cases}$$

individuandone il massimo.

e) Si dica, giustificando adeguatamente la risposta, se nel punto di massimo della funzione $E_I(r)$ la sua derivata prima si annulla.

Risoluzione

a) Nella spira circola una corrente. Infatti il campo magnetico di intensità variabile $B = B(t)$ produce una variazione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie piana delimitata dalla spira e, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, si genera una forza elettromotrice indotta che produce, a sua volta, una corrente elettrica indotta nella spira. Il verso della corrente indotta è tale da creare un campo magnetico che si oppone alla variazione del campo magnetico che l'ha generata (legge di Lenz, conseguenza del principio di conservazione dell'energia).

b) L'equazione di Maxwell, relativa alle relazioni tra circuitazione C_L del campo elettrico $\vec{E}$ lungo una linea chiusa L e flusso $\phi_S\left(\vec{B}\right)$ del campo magnetico attraverso una superficie S che ha L come contorno, afferma che $C_L\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{d\phi_S\left(\vec{B}\right)}{dt}$. In questo caso L è una circonferenza di raggio r e come superficie S prendiamo il cerchio che ha L come contorno. Abbiamo quindi:

se $0 \le r \le R$, $C_L\left(\vec{E}\right)=2\pi rE$ e $\phi\left(\vec{B}\right)=\pi r^2 B$.

Si ha pertanto $-\dfrac{d\phi\left(\vec{B}\right)}{dt}=-\pi r^2\dfrac{dB}{dt}$.

Possiamo quindi scrivere che se $0 \le r \le R$, allora $E = -\dfrac{\pi r^2}{2\pi r}\dfrac{dB}{dt}=-\dfrac{1}{2}r\dfrac{dB}{dt}$.

Invece, se $r > R$, allora il flusso del campo magnetico attraverso la superficie piana individuata dalla spira è $\pi R^2 B$. Abbiamo quindi $2\pi rE=-\pi R^2\dfrac{dB}{dt}$, da cui

$$E=-\frac{1}{2}\frac{R^2}{r}\frac{dB}{dt}$$

In definitiva, il modulo E_I del campo elettrico indotto in funzione di r è dato da:

$$E_I(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}r\dfrac{dB(t)}{dt}, & \text{per } 0\le r\le R\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2}{r}\dfrac{dB(t)}{dt}, & \text{per } r>R\end{cases}.$$

c) Una funzione f definita in un punto x_0 del suo dominio si dice continua in x_0 se e solo se $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

La funzione $E_I(r)$ è continua nel suo insieme di definizione ($r \ge 0$) se e solo se è continua in $r = R$, cioè se e solo se $\lim_{r\to R^-} E_I(r)=\lim_{r\to R^+} E_I(r)=E_I(R)$

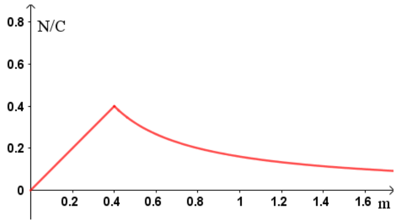
Abbiamo che:

$$\lim_{r\to R^-} E_I(r)=E_I(R)=\frac{1}{2}R\frac{dB(t)}{dt}$$

$$\lim_{r\to R^+} E_I(r) = \lim_{r\to R^+} \frac{1}{2}\frac{R^2}{r}\frac{dB(t)}{dt} = \frac{1}{2}R\frac{dB(t)}{dt}.$$

Possiamo quindi affermare che è verificata la condizione necessaria e sufficiente di continuità in $r = R$ e, quindi, che la funzione $E_I(r)$ è continua nel suo insieme di definizione, cioè per $r \geq 0$.

d) $$E_I(r) = \begin{cases} r\ , \text{ per } 0 \leq r \leq 0{,}4 \\ \dfrac{1{,}6\cdot 10^{-1}}{r}\ , \text{ per } r > 0{,}4 \end{cases}$$



Il massimo della funzione si ha per r = 0,4 m e vale 0,4 N/C.

e) La funzione $E_I(r)$ possiede un punto angoloso in $r = R$. Infatti la sua derivata sinistra vale 1 N/(Cs), mentre quella destra vale -1 N(Cs). La funzione non è quindi derivabile nel punto di massimo e la sua derivata non può quindi essere nulla in quel punto.

Breve commento al problema 1.

Il problema coinvolge argomenti di analisi matematica e di elettromagnetismo oggetto di trattazione nell'ultimo anno di corso. Le domande richiedono l'uso della matematica e della fisica e cercano di guidare al fenomeno considerato suggerendo implicitamente possibili strade per arrivare alla risposta.

La prima domanda di questo problema è finalizzata a verificare la conoscenza della legge di Faraday-Neumann, di cui si chiede l'applicazione in un contesto usuale, legato alla prassi didattica.

La seconda domanda ha carattere più tecnico. Richiede l'utilizzazione dell'equazione di Maxwell relativa alle relazioni tra la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa L e il flusso del campo magnetico attraverso una superficie che ha L come contorno. Lo studente deve applicare l'equazione alla situazione considerata, scegliendo opportunamente la superficie S e dimostrando, attraverso l'uso del calcolo differenziale, che la funzione che esprime il modulo del campo elettrico indotto può essere scritta con l'espressione fornita nella domanda.

La terza domanda è di carattere prettamente matematico e usuale nella prassi didattica. Verifica la conoscenza del concetto di continuità di una funzione definita a tratti su un intervallo e la definizione di continuità in un punto, richiedendone l'applicazione al caso considerato.

La quarta domanda richiede lo studio di una funzione definita a tratti su un intervallo. Si tratta di una richiesta usuale nella prassi didattica.

La quinta domanda richiede la conoscenza della definizione di derivabilità di una funzione in un punto. Anche in questo caso si tratta di una domanda usuale nella prassi didattica.

ESAME DI LICEO SCIENTIFICO 2019

ESEMPIO DI PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Febbraio 2019

PROBLEMA N°2

(ispirato al testo universitario Halliday Resnick, Fisica, edizione italiana 1970, pag 159-160)

La forza F tra due atomi in una molecola biatomica è conservativa e può essere espressa, approssimativamente, dalla legge $F(x)=\frac{12a}{x^{13}}-\frac{6b}{x^7}$ dove a e b sono costanti positive e x è la distanza tra i due atomi.

a) Si studi la funzione $F(x)$ per $x > 0$ e se ne disegni l'andamento del suo grafico.
b) A partire dal grafico di $F = F(x)$ si descrivano le caratteristiche del grafico dell'energia potenziale $U=U(x)$ relativa alla forza F tra i due atomi. Si giustifichi la risposta fornita.
c) Si determini un'espressione per $U=U(x)$ imponendo che $\lim_{x\to+\infty} U(x)=0$.
d) Si dice energia di dissociazione della molecola l'energia necessaria a rompere il legame tra gli atomi, portandoli a distanza tale che essi non risentano più di alcuna reciproca interazione. Si calcoli l'energia di dissociazione per il sistema formato dai due atomi.

Risoluzione

a) F è definita per $x > 0$. Zeri di F: $\frac{12a}{x^{13}}-\frac{6b}{x^7}=0 \Rightarrow 12a-6bx^6=0 \Rightarrow x=\sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$. Segno di F:

positiva per $0 < x < \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$ negativa per $x > \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$.

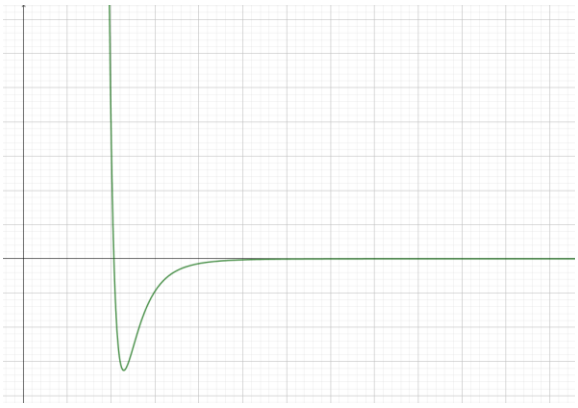
$\lim_{x\to0^+}\frac{12a}{x^{13}}-\frac{6b}{x^7}=\lim_{x\to0^+}\frac{12a}{x^{13}}=+\infty$. Quindi $x = 0$ è asintoto verticale per la funzione F.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{12a}{x^{13}}-\frac{6b}{x^7}\right)=0$. Quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per F.

$F'(x) = -\frac{156a}{x^{14}}+\frac{42b}{x^8}\geq 0 \Rightarrow x^6 \geq \frac{26a}{7b} \Rightarrow x \geq \sqrt[6]{\frac{26a}{7b}}$. Quindi F decresce per $0 < x < \sqrt[6]{\frac{26a}{7b}}$ e cresce per $x > \sqrt[6]{\frac{26a}{7b}}$. In $x = \sqrt[6]{\frac{26a}{7b}}$ F presenta un minimo.

$F''(x) = \frac{2184a}{x^{15}}-\frac{336b}{x^9}\geq 0 \Rightarrow x^6 \leq \frac{13a}{2b} \Rightarrow 0 < x \leq \sqrt[6]{\frac{13a}{2b}}$. Quindi F è convessa per $0 < x \leq \sqrt[6]{\frac{13a}{2b}}$ e concava per $x > \sqrt[6]{\frac{13a}{2b}}$. In $x = \sqrt[6]{\frac{13a}{2b}}$ esiste quindi un punto di flesso.

Grafico di F



b) Cenno di risoluzione. Poiché $F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$, è possibile risalire alla monotonia e alla concavità grafico di $-U$ osservando rispettivamente il segno e la monotonia di F. Dal grafico di $-U(x)$ si risale poi al grafico di $U(x)$.

c) Poiché $F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$, abbiamo che $U(x)$ è una funzione primitiva di $-F(x)$. L'insieme delle primitive di $-F(x)$ è dato da $\int -F(x)dx = \int -\left(\frac{12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7}\right)dx = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} + c$.

Poiché deve essere $\lim_{x \to +\infty} U(x) = 0$, allora $c = 0$, quindi $U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$.

d) È sufficiente calcolare $\lim_{x \to +\infty} U(x) - U\left(\sqrt[6]{\frac{2a}{b}}\right)$.

Breve commento al problema 2.

Il secondo problema presenta una situazione meno usuale per la prassi didattica. Soprattutto può presentare alcune difficoltà per gli studenti che non abbiano affrontato con la dovuta attenzione i concetti di campo conservativo, energia potenziale e lavoro. Il contesto è formalmente di fisica atomica, ma la trattazione richiede conoscenze che spesso vengono al termine del quarto anno con lo studio del campo elettrostatico. Sono però coinvolti concetti di fondamentale importanza nel percorso di fisica e che fanno parte del QdR di fisica (e del QdR da noi proposto per la matematica e la fisica).

La prima domanda richiede lo studio di una funzione parametrica, che però, grazie all'assunzione di positività dei parametri e la particolare forma della funzione, non richiede competenze che vadano molto al di là di quelle richieste per lo studio di una funzione non parametrica.

La seconda domanda consente di verificare la conoscenza, da parte degli studenti, delle relazioni tra una funzione e le sue funzioni primitive, relative ai concetti di segno-monotonia e monotonia-concavità.

La terza domanda richiede il calcolo di un "integrale immediato", con l'imposizione di una condizione che consente di determinare, fra le infinite primitive della funzione data, quella che soddisfa la condizione fornita.

L'ultima domanda richiede di comprendere, a partire dalla definizione data nel testo stesso, come si calcola l'energia di dissociazione di un sistema di due atomi.

ESAME DI LICEO SCIENTIFICO 2019

ESEMPIO DI PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Febbraio 2019

QUESTIONARIO

QUESITI DI FISICA

1. Dopo avere spiegato in che cosa consiste il fenomeno della *dilatazione del tempo* nella relatività ristretta, si dia la definizione di tempo proprio (durata propria) $\Delta\tau$. Si chiarisca quindi che cosa si intende con Δt e con v nella relazione relativistica

$$\Delta t = \gamma\, \Delta\tau \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Posto $\beta = v/c$ si studi, con riferimento a un opportuno sistema di assi cartesiani, la funzione $\gamma = \gamma(\beta)$. Si interpreti dal punto di vista fisico l'andamento di tale funzione, presentando le ragioni per le quali la velocità della luce nel vuoto in relatività ristretta assume carattere di velocità limite.

Cenno di risoluzione

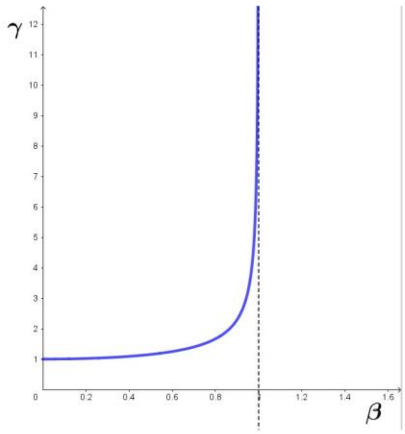
La risposta alle prime domande sarà legata al modo in cui le questioni sono affrontate sui libri di testo su cui hanno studiato gli studenti. In ogni caso, per quanto riguarda il fenomeno della dilatazione del tempo, ci si attende che lo studente accenni al fatto che la misura dell'intervallo di tempo fra due eventi dipende dal sistema di riferimento inerziale considerato. Per quel che riguarda la definizione di tempo proprio, ci si attende che lo studente lo caratterizzi come durata fra due eventi misurata in un sistema di riferimento inerziale S da un osservatore solidale con S e che quindi vede i due eventi in uno stesso punto dello spazio.

Infine ecco una possibile soluzione per quel che riguarda l'ultimo punto:

la condizione di realtà del fattore di Lorentz, $1-\beta^2 > 0$, comporta due immediate conseguenze:

a) la velocità v è strettamente inferiore alla velocità della luce nel vuoto ($v < c$), che assume il carattere di velocità limite;
b) risulta $\gamma \geq 1$ ($\gamma = 1$ se e solo se $v = 0$), dunque $\Delta t \geq \Delta\tau$.

Tali caratteristiche possono essere agevolmente riconosciute nell'andamento della funzione $\gamma = \gamma(\beta)$. In particolare, per velocità "basse" ($v \ll c$) si ha $\gamma \approx 1$ e $\Delta t \approx \Delta\tau$. Si ritrovano quindi i risultati della fisica galileiana "classica", che rappresenta un caso limite della fisica relativistica einsteiniana.



Breve commento al quesito 1 di fisica.

Il quesito propone la trattazione di un tema basilare nell'ambito della trattazione della relatività ristretta, richiedendo anche un breve confronto, alla luce dello studio della funzione $\gamma = \gamma(\beta)$, tra cinematica galileiana e relativistica.

2. Un campione di materiale radioattivo contiene, all'istante $t = 0$, un numero N_0 di nuclei instabili, che possono dare luogo a decadimento radioattivo, trasformandosi in nuclei diversi che qui supponiamo stabili. Il numero di nuclei instabili ancora presenti nel campione all'istante generico t è espresso dalla legge $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ dove λ è una costante positiva, che dipende dal tipo di isotopo.
   Il radon-222 è un isotopo instabile del gas radon. Ha un tempo di dimezzamento di 3,82 giorni, il che vuol dire che, mediamente, ogni 3,82 giorni la quantità di radon-222 si dimezza. Si calcoli la costante λ per il radon-222, precisandone il significato e scrivendola in notazione scientifica con due sole cifre significative in unità del SI.

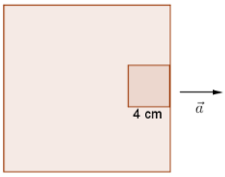
Risoluzione

$$N_0 e^{-\lambda(3.82 \cdot 3600 \cdot 24)} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow e^{-\lambda(3,82 \cdot 3600 \cdot 24)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{3,82 \cdot 3600 \cdot 24} \approx 2,1 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Breve commento al quesito 2 di fisica.

Il quesito propone una situazione tipica della prassi didattica relativa al decadimento radioattivo. Nel testo sono contenute tutte le informazioni necessarie per calcolare la costante di decadimento che si richiede di esprimere in notazione scientifica, con due cifre significative.

3. Una spira metallica, quadrata di lato $l = 4{,}0 \times 10^{-2}$ m e resistenza R = 10 Ω, viene estratta, a partire dall'istante t = 0, dalla regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, con accelerazione $\vec{a}$ costante, di modulo $5{,}0 \times 10^{-3}$ m/s^2, diretta parallelamente al lato orizzontale della spira, come indicato in figura.
Il campo magnetico ha intensità $3{,}0 \times 10^{-2}$T, è diretto perpendicolarmente al piano individuato dalla spira ed è uscente da esso. La regione in cui è presente il campo $\vec{B}$ è rappresentata in figura da un quadrato colorato. Al di fuori di essa il campo è trascurabile.
All'istante t = 0 la spira si trova completamente immersa nella regione in cui è presente il campo $\vec{B}$, nella posizione indicata in figura, cioè con un bordo della spira sovrapposto a parte della linea che delimita il campo e con velocità iniziale trascurabile.



Si spieghi, qualitativamente, perché nella spira si genera una corrente, a partire dall'istante t=0 fino all'istante t_1, quando la spira esce definitivamente dalla regione in cui è presente il campo $\vec{B}$.
Si calcoli l'istante t_1 e, infine, si determini un'espressione della corrente indotta nella spira in funzione del tempo t.

Risoluzione

a) All'istante iniziale il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito è $4{,}8 \cdot 10^{-5}$ Wb. Successivamente il flusso inizia a diminuire fino ad arrivare a 0 quando la spira è completamente uscita dalla regione in cui regna il campo. Quindi, per la legge di F-N-L mentre la spira sta uscendo dalla regione in cui regna il campo si genera una f.e.m. indotta che genera una corrente indotta, in quanto la spira è un circuito chiuso. La spira percorre uno spazio $x(t)$ dato dall'espressione $\frac{1}{2}at^2$. Per uscire completamente dal campo deve essere trascinata di 4,0 cm, quindi $4{,}0\times 10^{-2}$ m = $\frac{5}{2}\times 10^{-3}t^2$ Quindi t_1 = 4,0 s.
Per la legge di F-N-L $f.e.m. = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$, quindi $i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$. Per calcolare la corrente indotta, dobbiamo calcolare il flusso del campo $\vec{B}$ in funzione del tempo. Detto l il tato del quadrato, abbiamo che $\phi(\vec{B}) = Bl(l - \frac{1}{2}at^2)$. Quindi $-\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = Blat$. Infine
$i(t) = \frac{Blat}{R} = 6{,}0\times 10^{-7}t$ A.

Breve commento al quesito 3 di fisica.

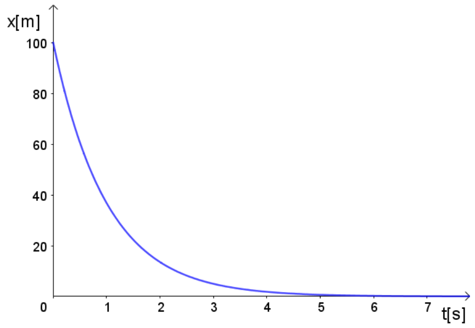
Il quesito riguarda l'applicazione della legge di Faraday-Neumann in un contesto tipico della prassi didattica se si eccettua, forse, il fatto che la spira si muove rispetto a una regione in cui è presente un campo magnetico con accelerazione costante e non con velocità costante.

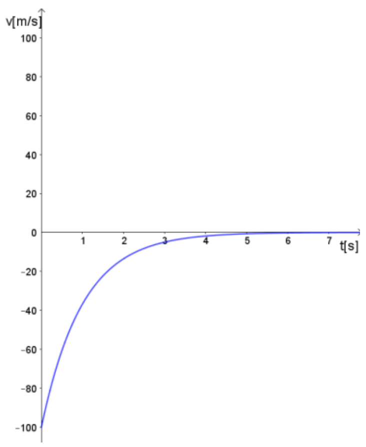
4. In un moto rettilineo di un punto *P*, la funzione $x(t) = 100 \cdot e^{-kt}$ rappresenta la legge oraria del moto, dove t è il tempo in secondi, k = 1 s^{-1} e $x(t)$ è la posizione del punto *P*.
   a) Si calcoli la velocità media di *P* tra l'istante *t*=0 s e l'istante *t*= 2 s (si approssimi il risultato ai m/s).
   b) Si calcoli la velocità istantanea di *P* nell'istante *t*=0 s.
   c) Si disegni la funzione *x* =*x*(*t*) e la funzione *v* = *v*(*t*) in due opportuni sistemi di riferimento.

Risoluzione

Velocità media: $\dfrac{x(2)-x(0)}{2-0} = \dfrac{100 \cdot e^{-2} - 100}{2} \approx -43 \text{ m/s}$

Velocità istantanea: $\dfrac{dx(t)}{dt} = -100e^{-t}$. Quindi *v*(0) = – 100 m/s





Breve commento al quesito 4 di fisica.

Si tratta di un quesito di cinematica pura che, interpretando la velocità istantanea come derivata della posizione in funzione del tempo, viene ricondotto a un quesito di calcolo di una derivata e di studio di una funzione elementare. Anche questo è un tema tipico della prassi didattica. È legato alle *Indicazioni Nazionali* che, nell'ultimo anno, parlano di *equazione del moto* che richiede, ovviamente, la conoscenza delle relazioni tra posizione, velocità e accelerazione.

QUESITI DI MATEMATICA

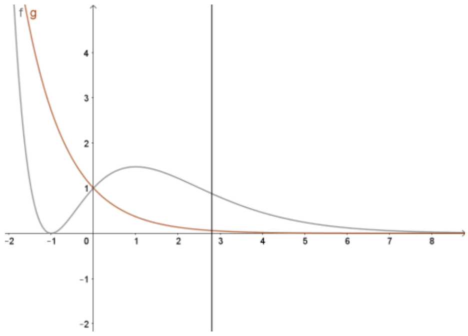
1. (ispirato a un problema assegnato alle maturità nelle scuole europee nel 2001)

   Si considerino le funzioni f e g definite su R da

   $$f(x) = (x+1)^2 e^{-x} \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-x}$$ di rispettivi grafici F e G.

   Si calcoli l'area A(α), α ≥ 0, della parte di piano limitata da F, G e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = \alpha$. Infine si calcoli il $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.

   Cenno di risoluzione



$$\int_0^{\alpha} \left((x+1)^2 e^{-x} - e^{-x}\right)dx = \int_0^{\alpha} x^2 e^{-x} dx + \int_0^{\alpha} 2xe^{-x} dx$$. Utilizzando due volte il metodo di integrazione per parti si ottiene: $\int_0^{\alpha} x^2 e^{-x} dx = \left[-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^{\alpha}$.

Invece, utilizzando una volta l'integrazione per parti abbiamo $\int_0^{\alpha} 2xe^{-x} dx = \left[-2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^{\alpha}$

Quindi

$$\int_0^{\alpha} \left((x+1)^2 e^{-x} - e^{-x}\right)dx = \left[-x^2 e^{-x} - 4xe^{-x} - 4e^{-x}\right]_0^{\alpha} = -\alpha^2 e^{-\alpha} - 4\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha} + 4 .$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} A(\alpha) = 4$$

Breve commento al quesito 1 di matematica.

Il quesito richiede di interpretare l'area della regione di piano individuata dai grafici di due funzioni e da due rette verticali come integrale definito. Inoltre richiede il calcolo di un limite che rappresenta l'area individuata da una regione di piano non limitata. L'argomento è tipico del quinto anno di corso.

2. Si consideri l'equazione $e^{1+x} + 3x^2 - 3 = 0$ e si stabilisca, con adeguate motivazioni, se ammette soluzioni nell'intervallo $[-1; 1]$. In caso affermativo si determini il numero delle soluzioni.

Cenno di risoluzione.

Il teorema di esistenza degli zeri non consente di fare affermazioni perché $f(-1)$ e $f(1)$ sono entrambe positive. Però un accurato disegno dei i grafici $f(x) = e^{1+x}$ e $g(x) = -3x^2 + 3$ (unito a considerazioni sulla monotonia delle funzioni) suggerisce che possano esserci due intersezioni. In effetti se si considera la funzione $d(x) = e^{1+x} + 3x^2 - 3$ si ha che $d(-1) > 0$, mentre $d(-0.5) < 0$. Quindi per il teorema degli zeri esiste almeno una soluzione nell'intervallo $[-1, -0.5]$. Infine vediamo che $d(1) > 0$, quindi esiste almeno una soluzione anche nell'intervallo $[-0.5, 1]$. Si può dimostrare l'unicità (nei due intervalli prima considerati) delle soluzioni con considerazioni sulla monotonia di f e g oppure considerando la derivata prima della funzione $d(x)$.

Breve commento al quesito 2 di matematica.

Il quesito richiede l'applicazione del teorema degli zeri in un contesto non del tutto usuale. Infatti nell'intervallo assegnato dal testo il teorema degli zeri non consente di fornire la risposta, che può invece essere ottenuta interpretando graficamente l'equazione considerata e applicando successivamente il teorema degli zeri a due intervalli contenuti nell'intervallo fornito dal testo. L'argomento è tipico del quinto anno di corso.

3. Si consideri la superficie sferica S di centro C(2; –1; 3) e raggio *r*=3. Si stabilisca se la sfera S ha punti di intersezione con la retta di equazioni $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

   In caso affermativo si calcolino le coordinate dei punti di intersezione.

Cenno di risoluzione

Una possibilità è mettere a sistema l'equazione della sfera con quelle della retta e vedere le soluzioni (se ci sono e quante); si trovano i punti A(4; –2;1) e B(2; –1;0).

Breve commento al quesito 3 di matematica.

Si tratta di un quesito di geometria analitica dello spazio tipico della prassi didattica e del quinto anno di corso. Si richiedono la conoscenza dell'equazione di una sfera di cui sono forniti centro e raggio e la risoluzione di un sistema di equazioni.

4. Uno studio statistico ha stabilito che la probabilità di incidenza di una determinata malattia sul totale di una popolazione sia uguale a 0,001. È stato approntato un test diagnostico per rilevare quella malattia sugli individui della popolazione. È noto che:
   - il test fornisce una risposta negativa in assenza della malattia con probabilità 0,97;
   - il test fornisce una risposta positiva in presenza della malattia con probabilità 0,99.

   Si estrae a caso un individuo della popolazione e lo si sottopone al test.
   Qual è la probabilità che l'individuo non sia malato e la riposta del test sia positiva?
   Si estrae a caso un altro individuo dalla popolazione, lo si sottopone al test e questo dà risposta positiva.
   Qual è la probabilità che l'individuo sia realmente malato?

Risoluzione
Indichiamo con M gli individui malati della popolazione e con S gli individui non malati.
Indichiamo con + la risposta positiva al test e con – la risposta negativa.
Costruiamo la seguente tabella a doppia entrata:

	M	S	Tot
+	$P(M \cap +)$	$P(S \cap +)$	P(+)
-	$P(M \cap -)$	$P(S \cap -)$	P(-)
Tot	P(M)	P(S)	1

	M	S	tot
+	$0{,}001 \cdot 0{,}99$	$0{,}999 \cdot 0{,}03$	
-	$0{,}001 \cdot 0{,}01$	$0{,}999 \cdot 0{,}97$	
Tot			

	M	S	tot
+	0,00099	0,02997	0,03096
-	0,00001	0,96903	0,96904
Tot	0,001	0,999	1

Quindi $P(S \cap +) = 0.02997$

Mentre $P(M/+) = \dfrac{P(M \cap +)}{P(+)} = \dfrac{0{,}00099}{0{,}03096} \approx 0{,}032$ cioè poco più del 3%.

Breve commento al quesito 4 di matematica.

Il quesito riguarda la probabilità condizionata e, in particolare, il teorema di Bayes. Può essere affrontato aiutandosi con la costruzione di una tabella a doppia entrata o con un diagramma ad albero. L'argomento viene in genere svolto nel terzo o quarto anno di corso, ma riguarda un teorema fondamentale del calcolo della probabilità che ha un elevato valore non solo tecnico, ma anche culturale (confrontare il QdR da noi proposto per la matematica e la fisica).

Tempo assegnato: 6 ore.

È permesso l'utilizzo delle calcolatrici scientifiche e/o grafiche (non dotate di possibilità di calcolo simbolico).

Esempio di prova di Matematica-Fisica elaborato dal Gruppo promotore della petizione del 12.01.2019 contro le simulazioni pubblicate dal MIUR il 20.12.2018.

Esempio di simulazione della prova (versione senza risoluzioni e commenti)

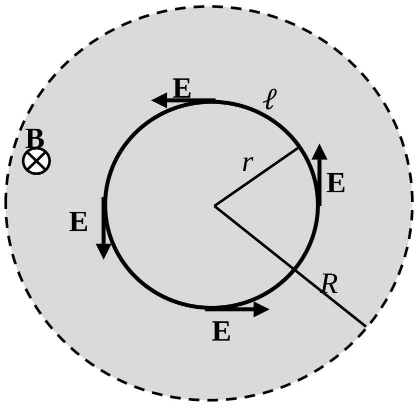
ESAME DI LICEO SCIENTIFICO 2019

ESEMPIO DI PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Febbraio 2019

PROBLEMA N° 1

(ispirato al testo universitario di Halliday-Resnick, Fisica, edizione italiana 1970, pag. 260)



Con riferimento alla figura a fianco, si consideri la regione piana circolare di raggio R, sede di un campo magnetico $\vec{B}$ le cui linee di campo sono perpendicolari al piano del foglio e in esso entranti. Al di fuori della regione di raggio R si supponga che il campo sia trascurabile.

Il campo $\vec{B}$ ha intensità $B = B(t)$, funzione che dipende solo dal tempo e che è strettamente crescente sul suo dominio.

Si consideri ora una spira circolare ℓ conduttrice di raggio r, concentrica e complanare alla regione di raggio R.

a) Si presentino e si discutano gli aspetti fondamentali del fenomeno fisico in base al quale nella spira piana circola una corrente elettrica.

b) Si mostri, utilizzando l'equazione di Maxwell relativa alla circuitazione del campo elettrico, che il modulo E_I del campo elettrico indotto è espresso dalla seguente funzione:

$$E_I(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} r \frac{dB(t)}{dt}, & \text{per } 0 \le r \le R \\ \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB(t)}{dt}, & \text{per } r > R \end{cases}$$

c) Dopo avere dato la definizione di funzione continua in un punto x_0 del suo insieme di definizione, si stabilisca, giustificando adeguatamente la risposta, se la funzione $E_I(r)$ è continua sul suo insieme di definizione.

d) Si assuma che $R = 0{,}4$ m e che il modulo del campo magnetico vari secondo la legge $B(t) = \alpha t + \beta$, dove t è espresso in secondi, $\alpha = 2\ \mathrm{Ts}^{-1}$ e $\beta = 1$ T. Si tracci il grafico della funzione $E_I(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} r \frac{dB(t)}{dt}, & \text{per } 0 \le r \le R \\ \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB(t)}{dt}, & \text{per } r > R \end{cases}$ individuandone il massimo.

e) Si dica, giustificando adeguatamente la risposta, se nel punto di massimo della funzione $E_I(r)$ la sua derivata prima si annulla.

ESAME DI LICEO SCIENTIFICO 2019

ESEMPIO DI PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Febbraio 2019

PROBLEMA N°2

(ispirato al testo universitario Halliday Resnick, Fisica, edizione italiana 1970, pag 159-160)

La forza F tra due atomi in una molecola biatomica è conservativa e può essere espressa, approssimativamente, dalla legge $F(x) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}$ dove a e b sono costanti positive e x è la distanza tra i due atomi.

a) Si studi la funzione $F(x)$ per $x > 0$ e se ne disegni l'andamento del suo grafico.
b) A partire dal grafico di $F = F(x)$ si descrivano le caratteristiche del grafico dell'energia potenziale $U=U(x)$ relativa alla forza F tra i due atomi. Si giustifichi la risposta fornita.
c) Si determini un'espressione per $U=U(x)$ imponendo che $\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0$.
d) Si dice energia di dissociazione della molecola l'energia necessaria a rompere il legame tra gli atomi, portandoli a distanza tale che essi non risentano più di alcuna reciproca interazione. Si calcoli l'energia di dissociazione per il sistema formato dai due atomi.

ESAME DI LICEO SCIENTIFICO 2019

ESEMPIO DI PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Febbraio 2019

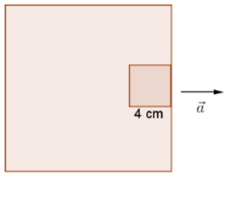
QUESTIONARIO

QUESITI DI FISICA

1. Dopo avere spiegato in che cosa consiste il fenomeno della *dilatazione del tempo* nella relatività ristretta, si dia la definizione di tempo proprio (durata propria) $\Delta\tau$. Si chiarisca quindi che cosa si intende con Δt e con v nella relazione relativistica
$$\Delta t = \gamma\, \Delta\tau \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$
Posto $\beta = v/c$ si studi, con riferimento a un opportuno sistema di assi cartesiani, la funzione $\gamma = \gamma(\beta)$. Si interpreti dal punto di vista fisico l'andamento di tale funzione, presentando le ragioni per le quali la velocità della luce nel vuoto in relatività ristretta assume carattere di velocità limite.

2. Un campione di materiale radioattivo contiene, all'istante $t = 0$, un numero N_0 di nuclei instabili, che possono dare luogo a decadimento radioattivo, trasformandosi in nuclei diversi che qui supponiamo stabili. Il numero di nuclei instabili ancora presenti nel campione all'istante generico t è espresso dalla legge $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ dove λ è una costante positiva, che dipende dal tipo di isotopo.
Il radon-222 è un isotopo instabile del gas radon. Ha un tempo di dimezzamento di 3,82 giorni, il che vuol dire che, mediamente, ogni 3,82 giorni la quantità di radon-222 si dimezza. Si calcoli la costante λ per il radon-222, precisandone il significato e scrivendola in notazione scientifica con due sole cifre significative in unità del SI.

3. Una spira metallica, quadrata di lato $l = 4{,}0 \times 10^{-2}$ m e resistenza R = 10 Ω, viene estratta, a partire dall'istante $t = 0$, dalla regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, con accelerazione $\vec{a}$ costante, di modulo $5{,}0 \times 10^{-3}$ m/s^2, diretta parallelamente al lato orizzontale della spira, come indicato in figura.
Il campo magnetico ha intensità $3{,}0 \times 10^{-2}$T, è diretto perpendicolarmente al piano individuato dalla spira ed è uscente da esso. La regione in cui è presente il campo $\vec{B}$ è rappresentata in figura da un quadrato colorato. Al di fuori di essa il campo è trascurabile.
All'istante $t = 0$ la spira si trova completamente immersa nella regione in cui è presente il campo $\vec{B}$, nella posizione indicata in figura, cioè con un bordo della spira sovrapposto a parte della linea che delimita il campo e con velocità iniziale trascurabile.



Si spieghi, qualitativamente, perché nella spira si genera una corrente, a partire dall'istante t=0 fino all'istante t_1, quando la spira esce definitivamente dalla regione in cui è presente il campo $\vec{B}$.
Si calcoli l'istante t_1 e, infine, si determini un'espressione della corrente indotta nella spira in funzione del tempo t.

4. In un moto rettilineo di un punto P, la funzione $x(t) = 100 \cdot e^{-kt}$ rappresenta la legge oraria del moto, dove t è il tempo in secondi, k = 1 s^{-1} e $x(t)$ è la posizione del punto P.

a) Si calcoli la velocità media di P tra l'istante t=0 s e l'istante t= 2 s (si approssimi il risultato ai m/s).

b) Si calcoli la velocità istantanea di P nell'istante t=0 s.

c) Si disegni la funzione $x = x(t)$ e la funzione $v = v(t)$ in due opportuni sistemi di riferimento.

QUESITI DI MATEMATICA

1. (ispirato a un problema assegnato alle maturità nelle scuole europee nel 2001)

   Si considerino le funzioni f e g definite su R da

   $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x}$ di rispettivi grafici F e G.

   Si calcoli l'area A(α), $\alpha \geq 0$, della parte di piano limitata da F, G e dalle rette di equazione x = 0 e $x = \alpha$. Infine si calcoli il $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.

2. Si consideri l'equazione $e^{1+x} + 3x^2 - 3 = 0$ e si stabilisca, con adeguate motivazioni, se ammette soluzioni nell'intervallo $[-1; 1]$. In caso affermativo si determini il numero delle soluzioni.

3. Si consideri la superficie sferica S di centro C(2; -1; 3) e raggio r=3. Si stabilisca se la sfera S ha punti di intersezione con la retta di equazioni $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

   In caso affermativo si calcolino le coordinate dei punti di intersezione.

4. Uno studio statistico ha stabilito che la probabilità di incidenza di una determinata malattia sul totale di una popolazione sia uguale a 0,001. È stato approntato un test diagnostico per rilevare quella malattia sugli individui della popolazione. È noto che:
   - il test fornisce una risposta negativa in assenza della malattia con probabilità 0,97;
   - il test fornisce una risposta positiva in presenza della malattia con probabilità 0,99.

   Si estrae a caso un individuo della popolazione e lo si sottopone al test.
   Qual è la probabilità che l'individuo non sia malato e la riposta del test sia positiva?
   Si estrae a caso un altro individuo dalla popolazione, lo si sottopone al test e questo dà risposta positiva. Qual è la probabilità che l'individuo sia realmente malato?

Tempo assegnato: 6 ore.

È permesso l'utilizzo delle calcolatrici scientifiche e/o grafiche (non dotate di possibilità di calcolo simbolico).

Esempio di prova di Matematica-Fisica elaborato dal Gruppo promotore della petizione del 12.01.2019 contro le simulazioni pubblicate dal MIUR il 20.12.2018.