PROBLEMA 1

Assegnate due costanti reali *a* e *b* (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

1. A seconda dei possibili valori di *a* e *b*, discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di *a* e *b* in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $B\left(2,\ \frac{8}{e}\right)$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione
$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$
verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4,\ \frac{16}{e^2}\right)$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto *F*.

3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo *t* (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante *t*; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t_0 \to +\infty$.
Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$.

Soluzione

Punto1

Per qualunque valore dei due parametri reali $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{b}$ la funzione

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

- è definita in $\mathbb{R}$ ed è ivi continua e derivabile
- è nulla per $t = 0$, negativa per $t < 0$, positiva per $t > 0$

La derivata

$$q'(t) = a \cdot e^{bt} + abte^{bt} = a \cdot e^{bt}(bt + 1)$$

ammette uno zero per $t = -\frac{1}{b}$ se $b \neq 0$

Se $\boldsymbol{b = 0}$

la funzione si riduce a $q(t) = at$, è lineare e non ammette nè massimo, nè minimo

Rappresenta una retta passante per l'origine, di coefficiente angolare positivo

Studio della funzione secondo il segno del parametro $\boldsymbol{b \neq 0}$

Se $\boldsymbol{b < 0}$

la funzione è crescente nell'intervallo $\left]-\infty; -\frac{1}{b}\right[$, è decrescente nell'intervallo $\left]-\frac{1}{b}: +\infty\right[$

Il punto $M(-\frac{1}{b};-\frac{a}{b}\ e^{-1})$ ha ascissa e ordinate positive ed è un massimo relativo

Osserviamo che

$$\lim_{t \to -\infty} at \cdot e^{bt} = -\infty$$

Il limite $\lim_{t \to +\infty} at \cdot e^{bt}$ presenta invece una forma indeterminata di tipo $[\infty \cdot 0]$, che si risolve applicando le regole della gerarchia degli infiniti (o mediante il teorema di de l'Hôpital).

Si ha $\lim_{t \to +\infty} at \cdot e^{bt} = \lim_{t \to +\infty} \frac{at}{e^{-bt}} = 0^+$

$$essendo\ il\ denominatore\ un\ infinito\ do\ ordine\ superiore\ rispetto\ al\ numeratore$$

Il punto $M(-\frac{1}{b};-\frac{a}{b}e^{-1})$ è un massimo relativo e assoluto

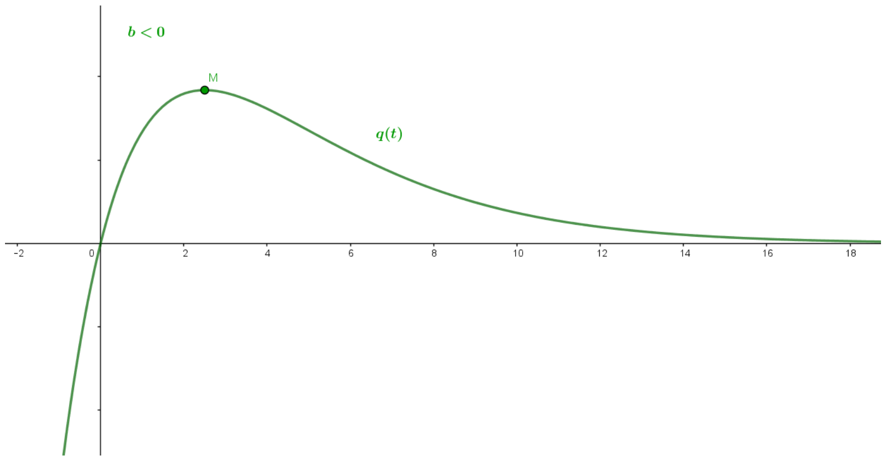


FIG.1

Se $b > 0$

la funzione è decrescente nell'intervallo $\left]-\infty; -\frac{1}{b}\right[$, è crescente nell'intervallo $\left]-\frac{1}{b}; +\infty\right[$

Il punto $M(-\frac{1}{b};-\frac{a}{b}e^{-1})$ ha ascissa e ordinate negative ed è un minimo relativo

Osserviamo che

$$\lim_{t\to+\infty} at \cdot e^{bt} = +\infty$$

mentre $\lim\limits_{t\to-\infty} at \cdot e^{bt}$ presenta una forma indeterminata di tipo $[\infty \cdot 0]$, che si risolve applicando le regole della gerarchia degli infiniti (o mediante il teorema di de l'Hôpital).

$$\lim_{t\to-\infty} at \cdot e^{bt} = \lim_{t\to\infty} \frac{at}{e^{-bt}} = 0^-$$

la funzione ammette un minimo relativo e assoluto nel punto $M(-\frac{1}{b};-\frac{a}{b}e^{-1})$

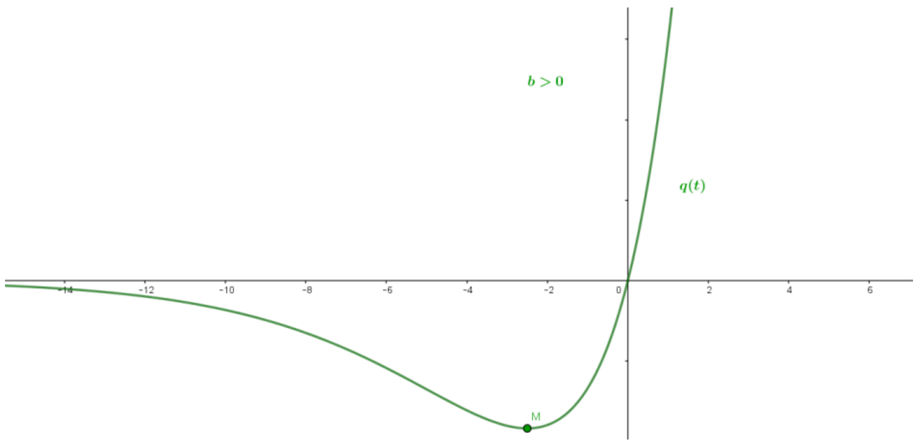


FIG.2

Imponiamo le condizioni assegnate

Affinché il massimo coincida con il punto $B\left(2,\frac{8}{e}\right)$, *devono valere le uguaglianze*

$$-\frac{1}{b}=2 \rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{a}{b}e^{-1}=8e^{-1} \rightarrow a=-8b=4$$

La funzione diventa $q(t)=4t\cdot e^{-\frac{t}{2}}$

Punto 2.

Sia $y=q(t)=4t\cdot e^{-\frac{t}{2}}$

Le caratteristiche principali della funzione sono state già discusse nel punto 1, relativamente al caso $b<0$

In particolare, osserviamo che la derivata prima assume la forma

$$q'(t)=4\cdot e^{-\frac{t}{2}}\quad\left(-\frac{1}{2}t+1\right)$$

Passando alla derivata seconda $q"(t)=e^{-\frac{t}{2}}\quad(t-4)$

osserviamo che si annulla per t=4 e che la cambia segno nel suo intorno, pertanto la funzione ha un flesso nel punto $F\left(4,\ \frac{16}{e^2}\right)$.

La tangente in F ha coefficiente angolare uguale a $q'(4)=-\frac{4}{e^2}$ e la sua equazione è

$$y-\frac{16}{e^2}=-\frac{4}{e^2}(t-4) \rightarrow y=-\frac{4}{e^2}t+\frac{32}{e^2}$$

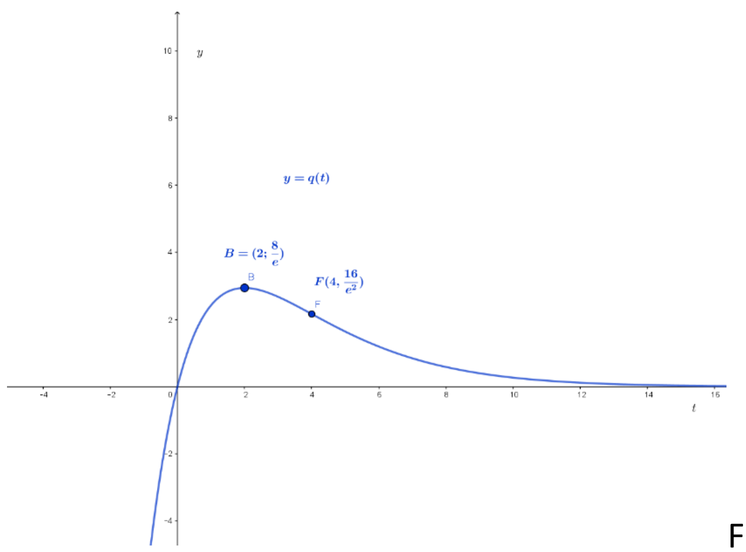


FIG.3

Punto 3.

La variabile q deve rappresentare una carica, misurata in coulomb, e la variabile t un tempo, misurato in secondi. Pertanto, la variabile b deve avere le dimensioni dell'inverso di un tempo, in quanto l'esponente deve essere adimensionale, mentre a deve rappresentare un rapporto $\frac{carica}{tempo}$, quindi ha le dimensioni di una corrente, misurata in ampere.

Pr quanto riguarda il significato fisico della funzione $q(t)$, osserviamo che, non avendo alcun significato parlare di carica che attraversa istantaneamente la sezione del conduttore, supponiamo rappresenti la carica che ha attraversato la sezione del conduttore nell'intervallo$[0;t]$.

Secondo questa interpretazione possiamo dire che la corrente $i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t) = 4 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \quad \left(-\frac{1}{2}t+1\right)$

Poiché $q"(t) = e^{-\frac{t}{2}} \quad (t-4)$ possiamo affermare $q'(t)$ decresce nell'intervallo $[0;4[$ e cresce per $t > 4$

Inoltre

$$\lim_{t\to+\infty} 4 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \quad \left(-\frac{1}{2}t+1\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{4-2t}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$$

essendo il denominatore un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore

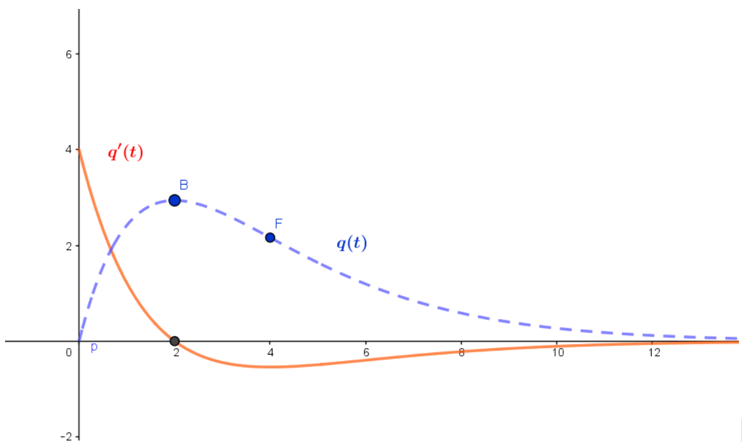


FIG.4

Il valore minimo di $q'(t)$ si ha per $t = 4\ s$, istante in cui q(t) ammette un flesso.

Minimo $q'(4) = \frac{4}{e^2}$ ≈-0,54 A

Il valore massimo è il valore iniziale $q'(0) = 4\ A$

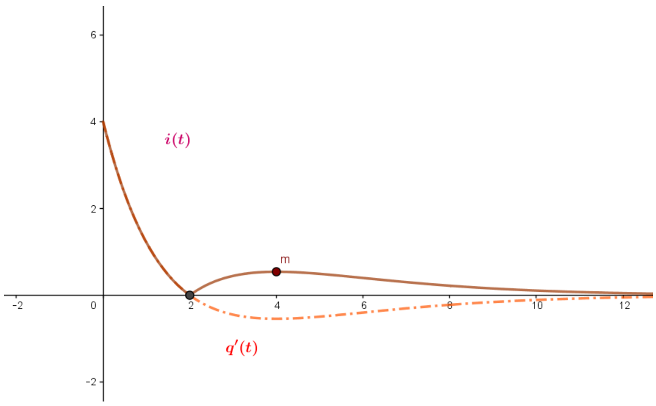
Per quanto riguarda l'intensità di corrente, solitamente i valori massimo o minimo si riferiscono a valori positivi, mentre il segno indica il verso della corrente nel circuito.

Pertanto, confrontando il grafico precedente con quello di

$|q'(t)| = i(t)\ intesa\ come\ intensità\ della\ corrente$ FIG.5

possiamo affermare che la corrente

- ha, nell'istante iniziale il valore di $4A$
- decresce fino ad annullarsi dopo 2s
- cambia verso e, raggiunto un valore di massimo relativo uguale a 0,54 A circa, decresce tendendo asintoticamente a 0.



Punto 4

La carica $Q(t_0)$ totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$ non è altro, che la funzione $q(t)$ calcolata nell'istante $t = \ t_0$ (in coerenza con il significato assegnato a quest'ultima).

Il limite di $Q(t_0)$ per $t_0 \to +\infty$, per lo studio della funzione $q(t)$ effettuato precedentemente, non può che essere uguale a 0.
Questo risultato ci dice che la carica trasportata dalla corrente nell'intervallo $[0; 2]$ è uguale a quella trasportata nel verso opposto nell'intervallo $[2; +\infty[$

Poiché la potenza dissipata da una resistenza R attraversata da una corrente di intensità i è uguale a i^2R, l'energia dissipata nell'intervallo considerato è

uguale a $\int_0^{t_0} i^2(t)R\ dt$ =$\int_0^{t_0} i^2(t)R\ dt = 3\int_0^{t_0}\left(2e^{-\frac{t}{2}}\ (2-t)\right)^2 dt$=

$12\int_0^{t_0} e^{-t}(2-t)^2\ dt$

Il segno (verso) della corrente in questo caso non influisce sull'energia dissipata

Anche se non richiesto, calcoliamo il risultato finale cominciando a calcolare l'integrale indefinito, utilizzando il metodo di integrazione per parti

$\int e^{-t}(t-2)^2 dt = -e^{-t}(t-2)^2 + \int 2(t-2)e^{-t}dt = \quad -e^{-t}(t-2)^2 - 2(t-2)e^{-t} +$
$2\int e^{-t}\, dt =$
$-e^{-t}(t-2)^2 - 2(t-2)e^{-t} - 2e^{-t} + c =$
$= e^{-t}(-t^2 + 4t - 4 - 2t + 4 - 2) + c = e^{-t}(-t^2 + 2t - 2) + c$

da cui

$$12\int_0^{t_0} e^{-t}(t-2)^2\, dt = 12[2 + e^{-t_0}(-t_0^2 + 2t_0 - 2)]$$

e quindi l'energia totale dissipata sarà

$$\lim_{t_0 = \to +\infty} 12[2 + e^{-t_0}(-t_0^2 + 2t_0 - 2)] \; = \; 24\, J$$

PROBLEMA 2

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con q positivo) è fissata nell'origine O di un sistema di riferimento nel piano Oxy (dove *x* e *y* sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta r di equazione $y = 1$.

1. Supponendo che la carica Q_2 sia collocata nel punto $A(0,1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 è nullo. Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.

2. Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x, l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da
$$\mathcal{U}(x) = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$
dove k è una costante positiva (unità di misura: $\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$).

3. Studiare la funzione $\mathcal{U}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?

4. A partire dal grafico della funzione $\mathcal{U}$, tracciare il grafico della funzione $\mathcal{U}'$, specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^{m} \mathcal{U}'(x)\,dx$ (dove $m > 0$ indica l'ascissa del punto di minimo di $\mathcal{U}'$).

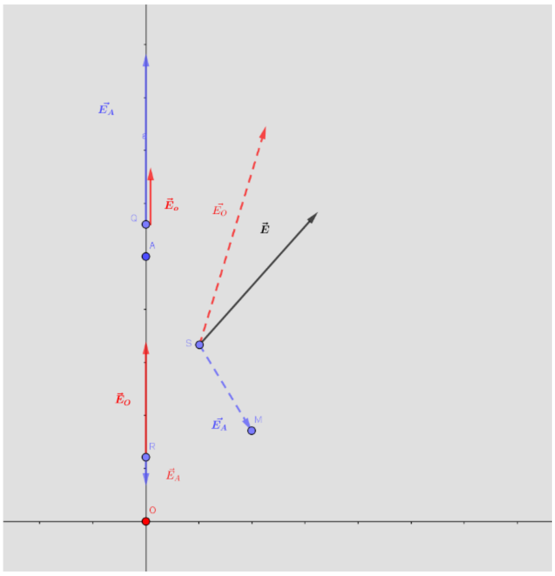
Soluzione

Punto 1.

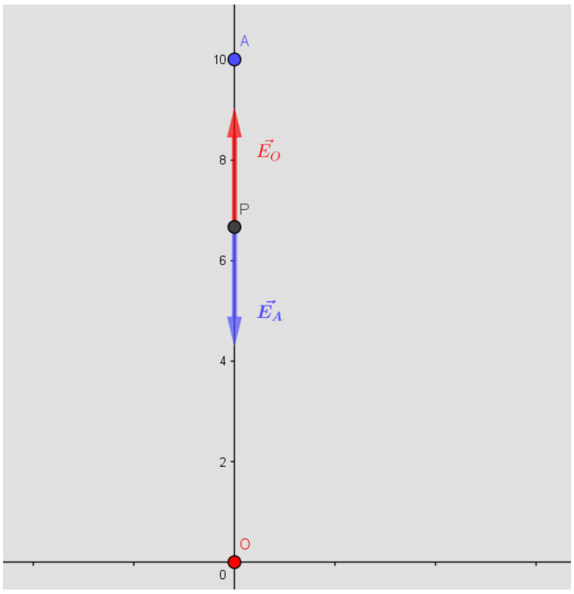
L'intensità del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme positiva Q in un punto P a distanza d da Q è uguale a $K\frac{Q}{d^2}$ dove K è una costante che dipende dal mezzo interposto e dalle unità di misura.

La direzione è quella della semiretta QP e il verso è centrifugo rispetto a Q.

Indicati con $\overrightarrow{E_A}$ e $\overrightarrow{E_0}$,rispettivamente, il campo elettrico generato dalla carica posta in A e il campo elettrico generato dalla carica posta in O, il campo elettrico risultante in un punto P è nullo se $\overrightarrow{E_A}$ e $\overrightarrow{E_0}$ hanno stessa direzione, verso opposto e modulo uguale.



Confronto fra i due campi elettrici



Punto di equilibrio

Al di fuori del dell'asse y i due campi componenti non possono avere la stessa direzione.

Sull'asse y i due campi componenti sono diretti entrambi verso l'alto per $y > 1$ ed entrambi verso il basso per $y < 0$, mentre hanno verso opposto all'interno del segmento OA

Pertanto, l'ordinata del punto P deve appartenere all'intervallo $0 < y < 1$ e deve essere verificata la relazione

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PO}^2}$$

Posto $P(0; y)$ con la condizione $0 < y < 1$ si impone $\frac{q}{4q} = \frac{(1-y)^2}{y^2} \rightarrow$

$$3\,y^2 - 8y + 4 = 0$$

Delle due soluzioni $y = 2 \quad y = \frac{2}{3}$ solo la seconda è accettabile, pertanto il punto in cui il campo risultante è nullo ha coordinate $\left(0; \frac{2}{3}\right)$

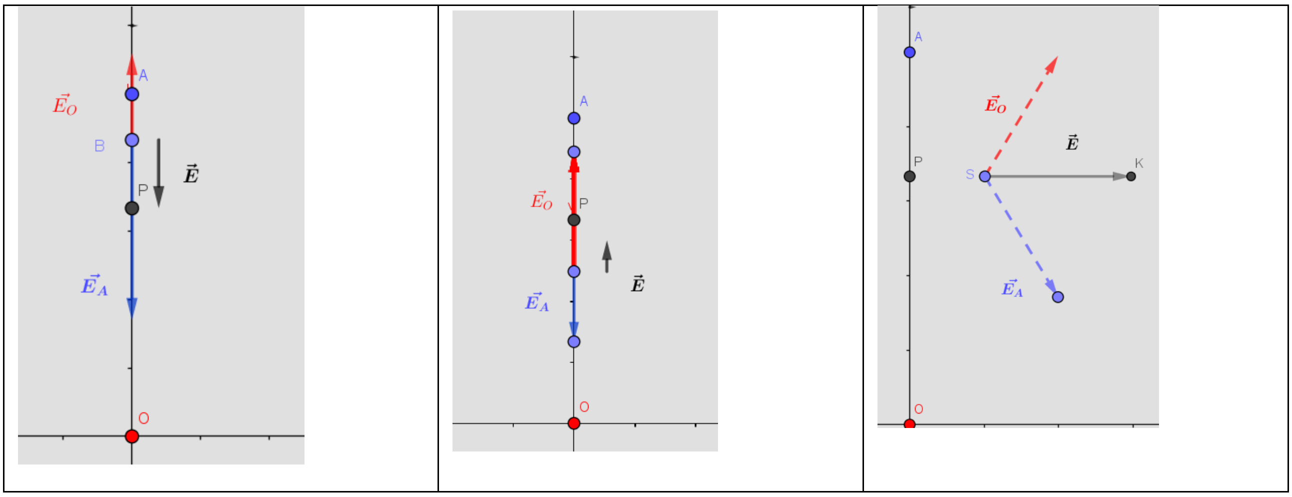
La posizione di equilibrio stabile è caratterizzata dal fatto che, in corrispondenza di uno spostamento arbitrario dal punto di equilibrio, si manifesta sempre una forza che riporta la carica nel punto di partenza.

Le tre figure seguenti mettono in evidenza la direzione e il verso del campo elettrico risultante, rispettivamente

- in un punto dell'asse y, spostato di poco verso l'alto rispetto a P
- in un punto dell'asse y verso il basso rispetto a P
- in un punto della retta, per P, parallela all'asse x

Nei primi due casi il campo elettrico risultante è sempre diretto verso P.

Nel terzo caso è diretto verso l'infinito



Pertanto, se una carica posta inizialmente in P, viene spostata sull'asse y, è attratta verso il punto P, se è positiva, se ne allontana se è negativa

La stessa carica positiva, però, è respinta dalla forza elettrica nel terzo caso

Si conclude che:

La posizione di una terza carica collocata in P è di equilibrio instabile in quanto, nell'intorno di P, esistono posizioni in cui la carica viene indefinitamente allontanata dalla posizione di equilibrio.

Questo avviene qualunque sia il segno della carica

Punto 2

Se la carica Q_2 si trova nel punto B della retta r avente ascissa x , la sua distanza dalla carica Q_1 è uguale a $\overline{OB} = \sqrt{1+x^2}$.

L'energia potenziale del sistema delle due cariche è uguale al lavoro (positivo) che devono compiere le forze esterne per costruire la configurazione assegnata, contrastando la repulsione coulombiana.
Si inizia collocando, per esempio, la prima carica, Q_1 nel punto O (senza compiere lavoro).

Poiché nel punto B ora è presente un campo elettrico generato da Q_1 al quale è associato un potenziale $V_{B=}\ k\frac{4q}{OB}$, (dove k è la costante di Coulomb, come suggerito dal testo) per spostare la seconda carica da una distanza infinita fino al punto B, occorre compiere un lavoro pari a $qV_{B=}\ k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$. Il sistema delle due cariche possiede ora un'energia potenziale pari a

$\mathcal{U}(x) = k\ \frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$ misurata in joule se la lunghezza x è misurata in metri.

Punto3.

Studio di $\mathcal{U}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$

Poiché $\mathcal{U}(-x)$ = $\mathcal{U}(x)$ a funzione $\mathcal{U}(x)$ è una funzione pari, cioè è simmetrica rispetto all'asse y, coerentemente col suo significato fisico.

Assume solo valori positivi e ammette l'asse x come asintoto orizzontale in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} k\ \frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} k\ \frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0^+$$

in accordo con la sua definizione, esplicitata nel punto 2.

Dallo studio del segno della derivata $\mathcal{U}'(x) = -kq^2\frac{4x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ si evince che $\mathcal{U}(x)$ è crescente per $x < 0$ e decrescente per x >0.

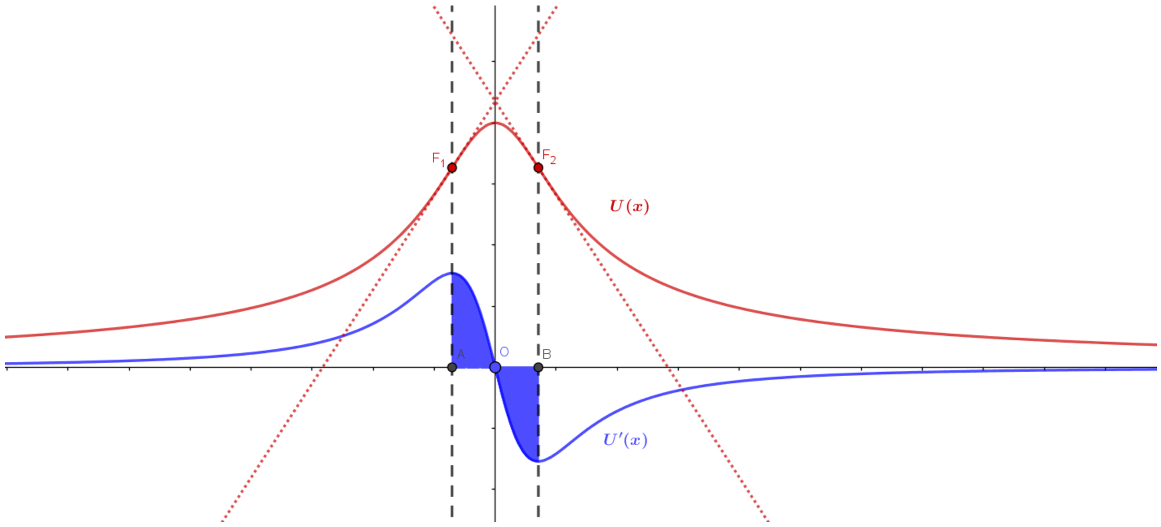
Il punto $M(0;\ 4kq^2)$ è punto di massimo relativo e assoluto

Dallo studio del segno della derivata seconda $\mathcal{U}''(x) = kq^2\frac{4(2x^2-1))}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$ si evince la curva volge la concavità verso l'alto per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∪ $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, volge la concavità verso il basso per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

I punti di flesso sono $F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4kq^2\sqrt{6}}{3}\right)$ $F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4kq^2\sqrt{6}}{3}\right)$

Le rispettive tangenti hanno coefficiente angolare:

$$\mathcal{U}'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = kq^2\frac{8\sqrt{3}}{9} \qquad e \quad \mathcal{U}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -kq^2\frac{8\sqrt{3}}{9}$$



Punto 4

Ritroviamo le principali proprietà di $\mathcal{U}'(x)$ osservando il grafico di $\mathcal{U}(x)$.

$\mathcal{U}'(x)$ è una funzione dispari, cioè è simmetrica rispetto all'origine

$(\mathcal{U}'(-x) = -\mathcal{U}'(x))$. Questo si evince, graficamente, dal fatto che i coefficienti angolari delle tangenti in punti tra loro simmetrici rispetto all'asse y hanno uguale valore assoluto e segno opposto.

È positiva nell'intervallo in cui $\mathcal{U}(x)$ è crescente, negativa nell' intervallo in cui $\mathcal{U}(x)$ è decrescente.

È crescente negli intervalli in cui $\mathcal{U}(x)$ è concava verso l'alto, è decrescente

nell' intervallo in cui $\mathcal{U}(x)$ è concava verso il basso.

Ammette massimo e minimo relativo in corrispondenza dei flessi di $\mathcal{U}(x)$

L'ascissa del minimo relativo è $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Essedo $\mathcal{U}'(x)$ continua in $\mathbb{R}$, possiamo scrivere

$\int_{-m}^{m} \mathcal{U}'(x)\,dx = \mathcal{U}(m) - \mathcal{U}(-m) = 0$ per la parità di $\mathcal{U}(x)$

Geometricamente l'integrale rappresenta la somma di due aree orientate, aventi uguale valore e segno opposto.