Quesito n°1 simulazione del 28 febbraio 2019

Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - a\,x^2 & \text{per } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.

Soluzione quesito 1:

g(x) è una funzione continua e derivabile per $x < 1$ e $x > 1$, $x \neq 3$; per x=1 è continua e derivabile a sinistra con $g(1) = 3 - a$ e $g'_-(1) = -2a$. Si tratta quindi di imporre la continuità e la derivabilità anche per x=1:

$$g(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 \;\; per\; x \le 1 \\ \dfrac{b}{x-3} \quad per\; x > 1 \quad x \neq 3 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -2ax \qquad per\; x < 1 \\ -\dfrac{b}{(x-3)^2} \quad per\; x > 1 \quad x \neq 3 \end{cases}$$

pertanto per la continuità e la derivabilità per x=1 si deve avere:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} 3 - ax^2 = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{b}{x-3} = g(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} -2ax = \lim\limits_{x\to 1^+} -\frac{b}{(x-3)^2} \end{cases} \to \begin{cases} 3 - a = -\frac{b}{2} \\ -2a = -\frac{b}{4} \end{cases} \to \begin{cases} 3 - a = -4a \\ b = 8a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \end{cases}$$

Quindi la funzione g(x) è la seguente:

$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 \;\; per\; x \leq 1 \\ -\dfrac{8}{x-3} \quad per\; x > 1 \quad x \neq 3 \end{cases}$$

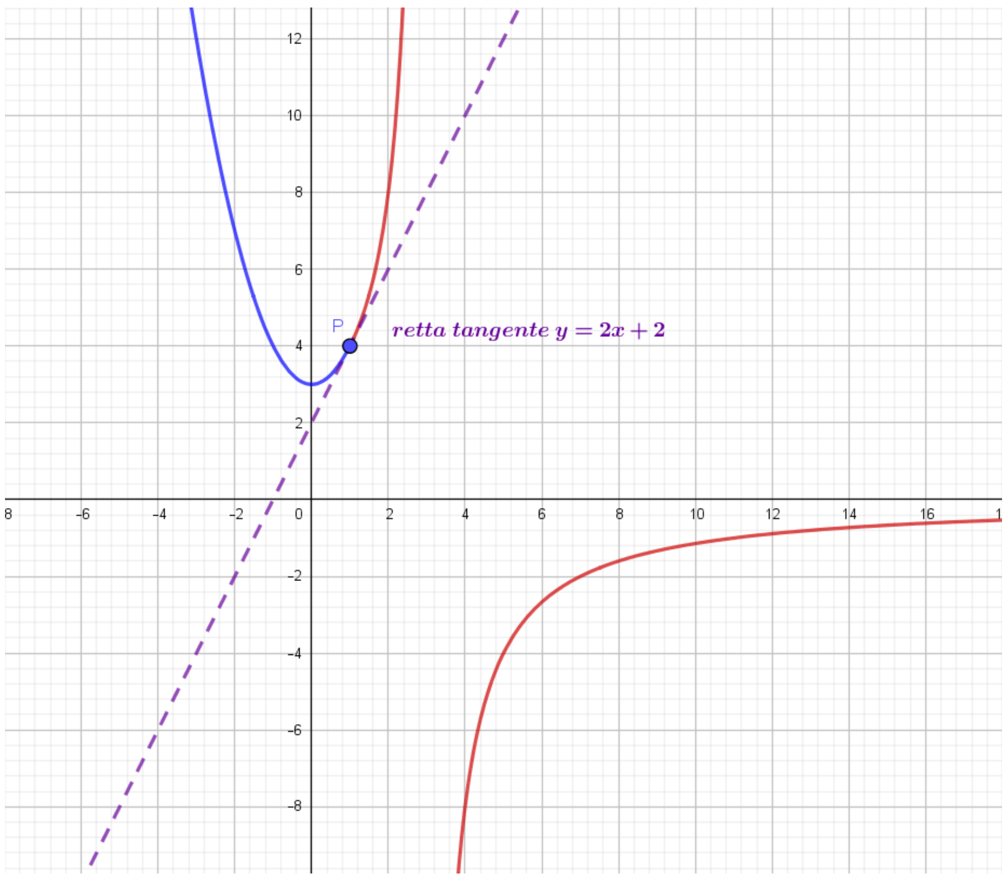
Essa è costituita da tre rami di cui il primo appartiene a una parabola con vertice V(0,3), concavità verso l'alto e avente l'asse coincidente con l'asse y.
Gli altri due appartengono ad una iperbole omografica avente per asintoto verticale la retta di equazione x=3 e per asintoto orizzontale l'asse x, positiva per x<3.
Inoltre nel punto comune (1,4) i due rami di parabola e di iperbole hanno la stessa tangente di equazione $y = 2x + 2$ infatti:

$$m_{tg\ parabola} = [2x]_{x=1} = 2$$

ma anche

$$m_{tg\ iperbole} = \left[\frac{8}{(x-3)^2}\right]_{x=1} = 2$$

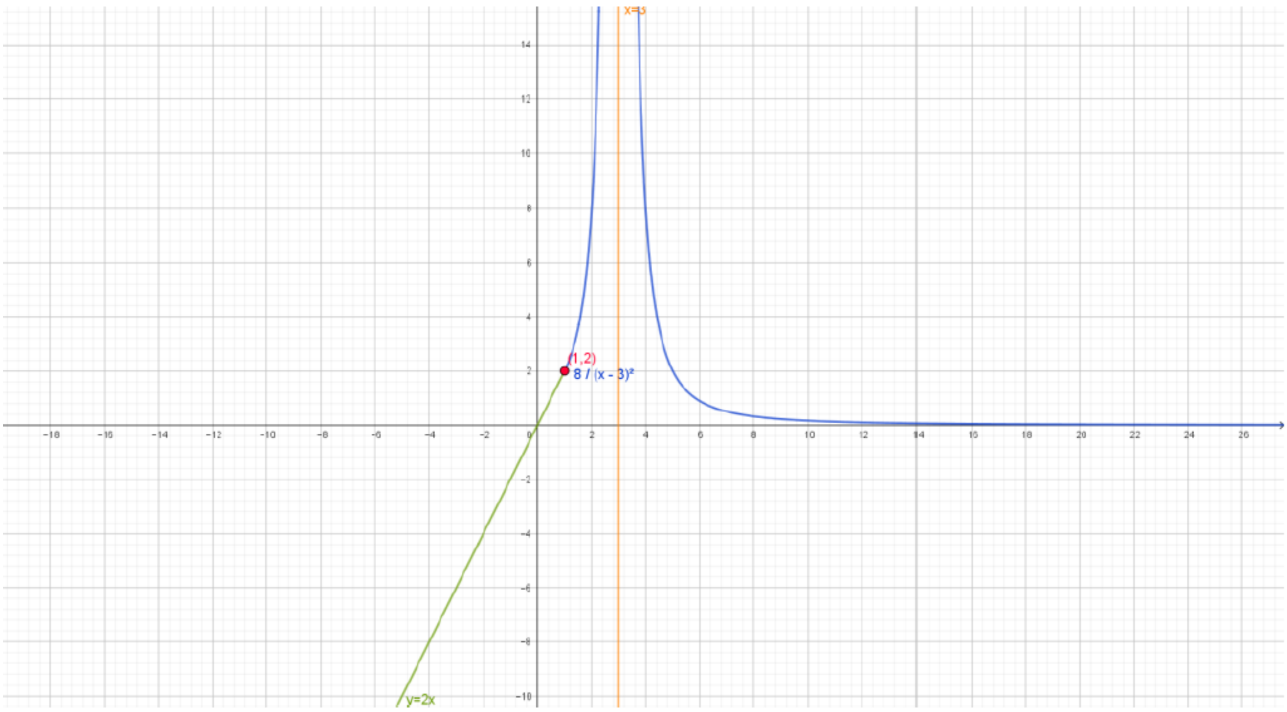
Pertanto il suo grafico è il seguente:



Mentre la funzione g'(x) è la seguente:

$$g'(x) = \begin{cases} +2x & per\ x \le 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2} & per\ x > 1 \quad x \ne 3 \end{cases}$$

Essa è costituita da tre rami di cui il primo appartiene a una retta passante per l'origine degli assi, gli altri due appartengono ad una funzione sempre positiva, che ha come asintoto verticale la retta di equazione x=3, come asintoto orizzontale l'asse x, è crescente per x<3 e decrescente per x>3; pertanto il suo grafico è il seguente



Quesito n°2 simulazione del 28 febbraio 2019

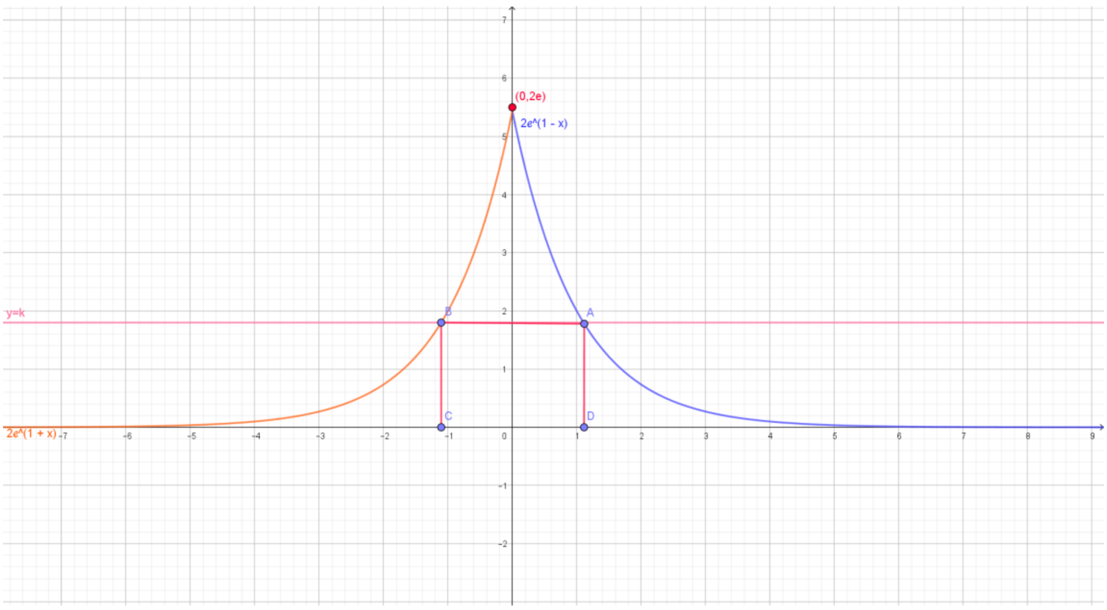
Sia $\mathcal{R}$ la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = 2e^{1-|x|}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in $\mathcal{R}$ e aventi un lato sull'asse x, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.

Soluzione quesito 2:

La funzione $y = 2e^{1-|x|}$ può essere così riscritta:

$$y = \begin{cases} 2e^{1-x} & se\ x \geq 0 \\ 2e^{1+x} & se\ x < 0 \end{cases}$$

e il suo grafico è il seguente:



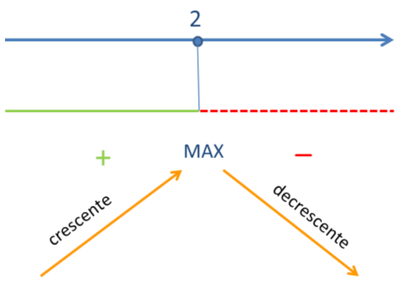
Intersechiamo il suo grafico con una retta parallela all'asse x di equazione $y = k$ con $0 < k \leq 2e$; i punti di intersezione sono i vertici A e B di un rettangolo inscritto con la base CD sull'asse x. Le coordinate di A si determinano mettendo a sistema la curva e la retta:

$$\begin{cases} y = k \\ y = 2 \cdot e^{1-x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = k \\ 1 - x = ln\dfrac{k}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = k \\ x = 1 - ln\dfrac{k}{2} \end{cases} \qquad A\left(1 - ln\frac{k}{2}, k\right)$$

Pertanto l'area del rettangolo A(k) da rendere massima è la seguente:

$$A(k) = 2 \cdot k \cdot \left(1 - ln\frac{k}{2}\right)$$

$$A'(k) = 2 \cdot \left[1 - ln\frac{k}{2} - 1\right] = -2 \cdot ln\frac{k}{2} \geq 0 \ \ se \ ln\frac{k}{2} \leq 0 \quad \rightarrow \quad 0 < k \leq 2$$

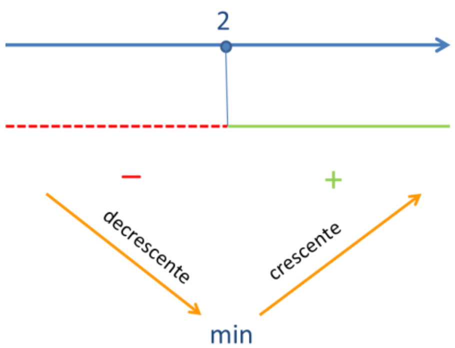


Il rettangolo di area massima si ha per k=2 e ha quindi la base di lunghezza 2 e altezza 2, pertanto è un quadrato. L'area massima $A(2) = 4$

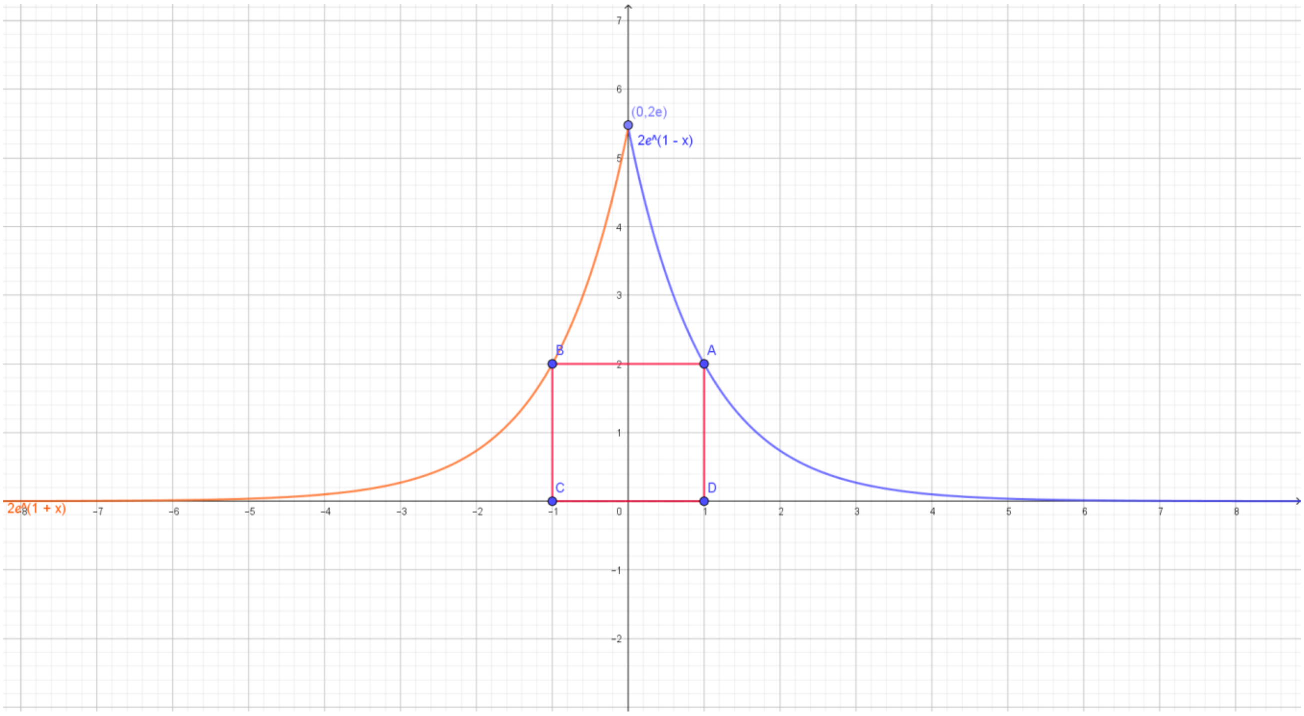
Il perimetro del rettangolo da rendere minimo è il seguente:

$$P(k) = 4\left(1 - ln\frac{k}{2}\right) + 2k$$

$$P'(k) = -\frac{4}{k} + 2 = \frac{2(k-2)}{k} \geq 0 \qquad \rightarrow k \geq 2 \quad essendo \quad 0 < k \leq 2e$$



Il rettangolo di perimetro minimo si ha per k=2 e ha altezza 2 e base 2 ed è sempre un quadrato. Il perimetro minimo $P(2) = 8$.



Quesito n°3 simulazione del 28 febbraio 2019

Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.
Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?
Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

Soluzione quesito 3:

Una scatola contiene 16 palline, numerate da 1 a 16 e ne dobbiamo estrarre tre rimettendo ogni volta la pallina estratta nella scatola; vogliamo determinare la probabilità dell'evento A che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10 senza reimbussolamento.
Disegniamo quindi una lista con una sequenza di tre caselle dove nella prima casella possiamo mettere solo un elemento che è il numero 10, mentre nelle altre due caselle possiamo mettere 9 elementi che sono gli elementi minori di 10:

1	9	9

quindi il numero di casi favorevoli è 9^2.
Ora disegniamo un'altra lista con una sequenza sempre di tre caselle dove nella prima casella possiamo mettere 16 elementi e lo stesso nelle altre due caselle:

16	16	16

Pertanto il numero dei casi possibili è 16^3.
Quindi la probabilità dell'evento A è:

$$P(A) = \frac{9^2}{16^3} = \frac{81}{4096} \approx 0{,}0198 \approx 1{,}98\%$$

Ora dobbiamo estrarre 5 palline contemporaneamente; vogliamo determinare la probabilità dell'evento B che il più grande dei numeri estratti su cinque sia uguale a 13.

Quindi fissando il numero 13 come numero più grande, le altre quattro palline devono avere numeri compresi tra 1 e 12, pertanto i casi favorevoli sono $\binom{12}{4}$ mentre i casi possibili sono $\binom{16}{5}$, e quindi la probabilità dell'evento B sarà:

$$P(B) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{16}{5}} = \frac{\frac{12!}{4! \cdot 8!}}{\frac{16!}{5! \cdot 11!}} = \frac{12! \cdot 5! \cdot 11!}{4! \cdot 8! \cdot 16!} = \frac{495}{4368} \approx 0{,}1133 \approx 11{,}33\%$$

Quesito n°4 simulazione del 28 febbraio 2019

Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:

1. incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;
2. abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;
3. passi per il punto $P(7, 10)$.

Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

Soluzione quesito 4:

In questo quesito si richiede di scrivere una funzione razionale fratta, che abbia al numeratore e al denominatore rispettivamente due polinomi s(x) e t(x), e che soddisfi le seguenti condizioni:

- passa per i punti (-1,0) e (2,0)
- è tangente all'asse x nel punto (2,0)
- ha due asintoti verticali di equazione x=-3 e x=1
- passa per il punto P(7,10)

Il polinomio s(x) deve contenere, oltre al fattore $(x + 1)$, anche il fattore $(x - 2)$ con molteplicità almeno uguale a 2 per la tangenza, mentre il polinomio t(x) deve contenere il fattore (x+3) e il fattore (x-1).

Pertanto la funzione più semplice che soddisfa le richieste è la seguente:

$$y = \frac{a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^2}{(x + 3) \cdot (x - 1)}$$

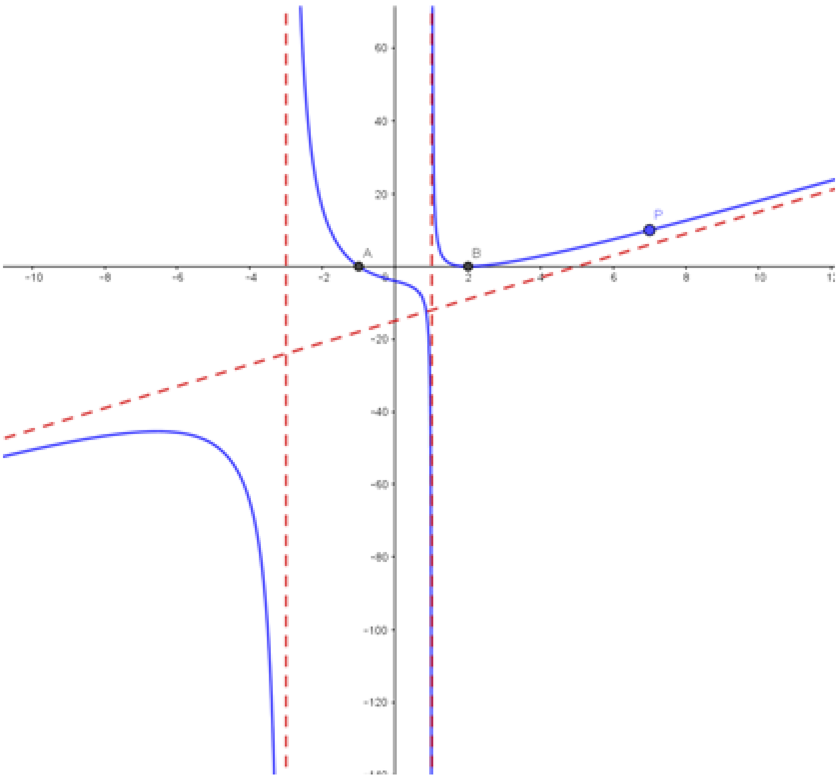
Inoltre poiché la funzione passa per il punto P(7,10) si deve avere:

$$10 = \frac{a \cdot (7 + 1) \cdot (7 - 2)^2}{(7 + 3) \cdot (7 - 1)} \rightarrow 10 = \frac{a \cdot 8 \cdot 25}{60} \rightarrow 10 = \frac{10}{3} a \rightarrow a = 3$$

Pertanto la funzione più semplice che soddisfa le richieste è la seguente:

$$y = \frac{3 \cdot (x+1) \cdot (x-2)^2}{(x+3) \cdot (x-1)}$$

e questo è il suo grafico:



Quesito n°5 simulazione del 28 febbraio 2019

Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2+y^2+z^2-2x+6z=0$. Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x-2y+6z+1=0$ e la superficie S sono secanti. Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S.

Soluzione quesito 5:

In questo quesito, è data la sfera di equazione

$$x^2+y^2+z^2-2x+6z=0$$

si chiede di determinarne il raggio e il suo centro; ricordando che l'equazione generale di una sfera è la seguente:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

applicando la regola del completamento del quadrato otteniamo

$$(x^2-2x+1)+y^2+(z^2+6z+9)-10=0$$

$$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$$

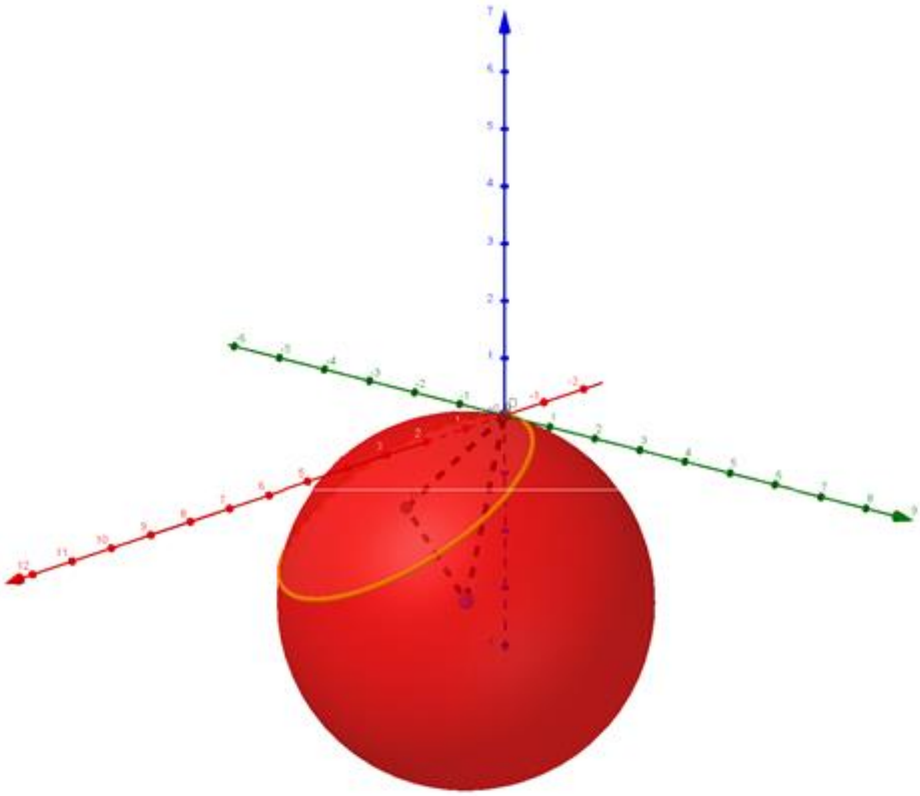
pertanto il suo centro $C(1,0,-3)$ e il raggio è $r=\sqrt{10}$.

Il piano π di equazione $3x-2y+6z+1=0$ è secante la sfera se la sua distanza dal centro C della sfera è minore del raggio r:

$$d(C, piano\ \pi)=\frac{|ax_c+by_c+cz_c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|3\cdot 1+6\cdot(-3)+1|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{14}{7}=2<\sqrt{10}$$

Intersecando la sfera con il piano secante π si ottiene per sezione una circonferenza il cui raggio r' si determina applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio r della sfera e per cateti il raggio r' della circonferenza e la distanza d tra il centro della sfera e il piano π:

$$r' = \sqrt{r^2 - d^2}\,\sqrt{\sqrt{10}^2 - 2^2} = \sqrt{6}$$



Quesito n°6 simulazione del 28 febbraio 2019

Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$ da

$$x(t) = \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}t + 2\right)$$

dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

Soluzione quesito 6:

La legge oraria di un punto materiale che si muove di moto rettilineo, per $t \geq 0$ è la seguente:

$$x(t) = \frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2$$

dove t è misurato in secondi e x(t) in metri.

La velocità varia in funzione del tempo secondo la seguente legge:

$$x'(t) = \frac{3}{27}t^2 + \frac{4}{9}t$$

mentre l'accelerazione varia in funzione del tempo secondo la legge:

$$x''(t) = \frac{6}{27}t + \frac{4}{9}$$

Pertanto il punto materiale non si muove di moto uniformemente accelerato, poiché l'accelerazione varia in funzione del tempo, mentre nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante.

Allo stesso risultato si perviene osservando che la legge oraria del moto uniformemente accelerato è necessariamente una legge quadratica:

$$s(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

La velocità media nei primi 9 secondi di moto è:

$$v_m = \frac{x\left(t_f\right) - x(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{x(9) - x(0)}{9} = \frac{\frac{9^3}{27} + \frac{2}{9} \cdot 9^2}{9} = \frac{27 + 18}{9} = 5\ m/s$$

Per determinare l'istante in cui il punto si muove con una velocità pari a 5 m/s applichiamo il teorema di Lagrange; per cui essendo la funzione

$$x(t) = \frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2$$

continua e derivabile ovunque nell'intervallo [0,9], esiste un istante $t \in [0{,}9]$ tale che:

$$x'(t) = \frac{x(9) - x(0)}{9} = 5 \ \rightarrow \ \frac{3}{27}t^2 + \frac{4}{9}t = 5 \ \rightarrow \ t^2 + 4t - 45 = 0 \ \rightarrow \ t = -2 \mp \sqrt{4 + 45}$$
$$= \begin{matrix} t = +5s \\ t = -9s \end{matrix}$$

Ovviamente la soluzione negativa non è accettabile e quindi dopo cinque secondi dall'inizio del moto il punto materiale ha velocità v=5 m/s.

Quesito n°7 simulazione del 28 febbraio 2019

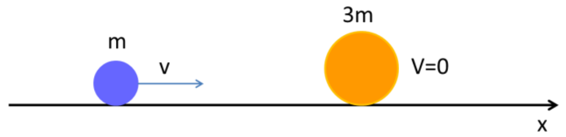
Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.

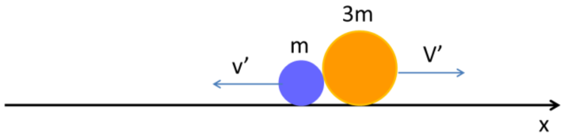
1. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.
2. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.

Soluzione quesito 7:

Il quesito 7 tratta il problema degli urti elastici e anelastici, argomento che si affronta al terzo anno di liceo scientifico quando si introduce la conservazione della quantità di moto di un sistema isolato.

Il primo caso che viene considerato è quello dell'urto elastico unidimensionale tra due sfere, in cui si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica del sistema; per cui, fissando un asse x di riferimento coincidente con il verso della velocità della sfera di massa m, se v è la velocità della prima pallina e V è la velocità della seconda pallina prima dell'urto, e se v' e V' sono rispettivamente le velocità della prima e della seconda pallina dopo l'urto, possiamo scrivere:





$$\begin{cases} mv + 3mV = mv' + 3mV' & \textit{conservazione della quantità di moto} \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(3m)V^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}(3m)V'^2 & \textit{conservazione dell'energia cinetica} \end{cases}$$

da cui sostituendo e semplificando si ottiene:

$$\begin{cases} v = v' + 3V' \\ v^2 = {v'}^2 + 3{V'}^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v' = v - 3V' \\ v^2 = (v - 3V')^2 + 3{V'}^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v' = v - 3V' \\ 12V'^2 - 6vV' = 0 \end{cases} \rightarrow$$

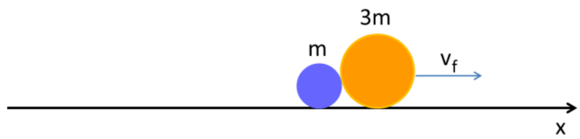
$$\begin{cases} v' = v - 3V' \\ 2V'^2 - vV' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v' = v \\ V' = 0 \end{cases} \ soluzione\ non\ accettabile \quad e \ \begin{cases} v' = -\dfrac{v}{2} \\ V' = +\dfrac{v}{2} \end{cases}$$

La soluzione V'=0 ha il senso di un urto mancato, come se la prima sferetta passasse accanto alla seconda senza urtarla, per cui quest'ultima rimane ferma e la prima continua il suo moto con la stessa velocità.

Invece la soluzione $V' = +\frac{v}{2}$ e $v' = -\frac{v}{2}$ sta a indicare che, dopo l'urto, la sfera di massa m e quella di massa 3m hanno la stessa velocità in modulo, stessa direzione ma verso opposto; cioé la sfera di massa m torna indietro procedendo nel verso opposto all'asse x, mentre quella di massa 3m procede nello stesso verso dell'asse x.

Il secondo caso che viene considerato è quello dell'urto completamente anelastico unidimensionale tra due sfere, in cui, dopo l'urto le due sfere procedono insieme e in cui si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica del sistema.

Pertanto se v e V sono rispettivamente la velocità iniziale della prima e della seconda pallina, e se v_f è la velocità con cui le due palline procedono insieme dopo l'urto, possiamo scrivere:



$$mv + 3mV = (m + 3m)v_f \quad \rightarrow \quad v_f = \frac{mv}{4m} = \frac{v}{4}$$

In questo caso l'energia cinetica dissipata è:

$$\Delta K = K_i - K_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m + 3m){v_f}^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{4}{2}m\left(\frac{v}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}mv^2$$

$$\Delta K = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{3}{4}K_i = 75\%\ K_i$$

Una parte dell'energia iniziale si trasforma in calore per attrito interno e deformazione dei due corpi.

Quesito n°8 simulazione del 28 febbraio 2019

Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0(2 + \text{sen}(\omega t))$, dove t indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato l. Detta R la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante t. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.

Soluzione quesito 8:

Una spira quadrata, di lato l e resistenza R, è attraversata da un campo magnetico B, perpendicolare al piano della spira, la cui intensità varia nel tempo secondo la legge:

$$B(t) = B_0\big(2 + sen(\omega t)\big)$$

dove t è il tempo misurato in secondi, con un minimo pari a B_0 e un massimo pari a $3B_0$.

Il vettore $\vec{B}$ pertanto ha direzione e verso costanti e intensità variabile.

Se orientiamo il versore $\vec{n}$ normale alla superficie della spira nello stesso verso di $\vec{B}$, il flusso é positivo (uscente dalla superficie) e il suo andamento rispecchia quello di $B(t)$.

La variazione del flusso del campo magnetico crea una forza elettromotrice indotta, per cui se S è l'area della spira, $\vec{n}$ è il versore normale alla superficie della spira con lo stesso verso del campo $\vec{B}$, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz la forza elettromotrice indotta ha il seguente valore:

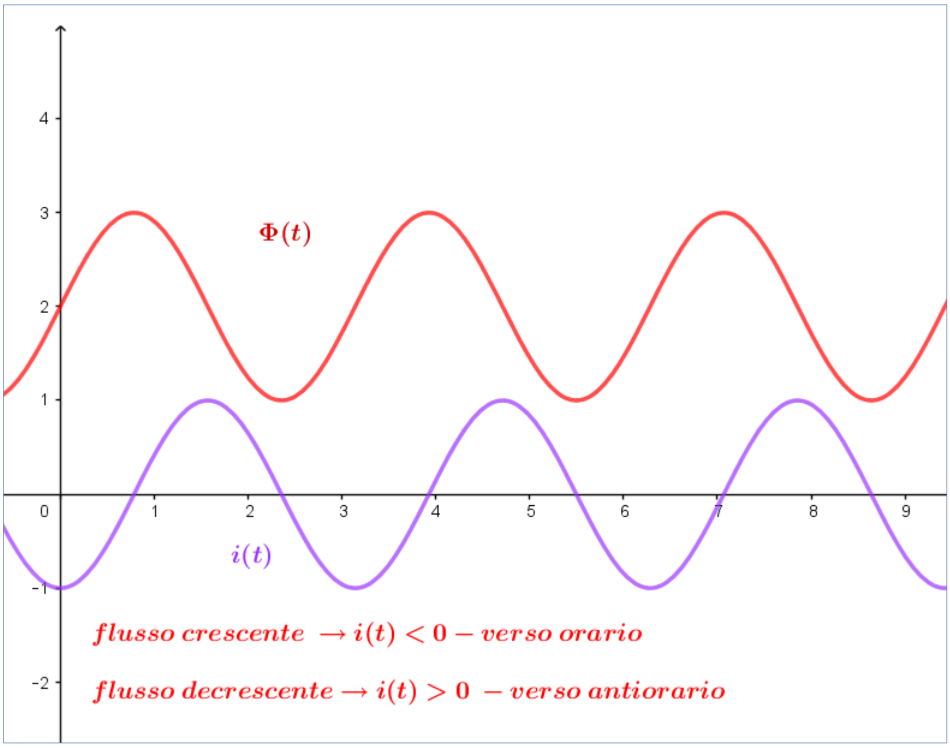
$$fem_{indotta} = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{d\big(\vec{B} \times \vec{n}S\big)}{dt} = -\frac{d(B \cdot S \cdot cos0)}{dt} = -\omega B_0 l^2 \cos(\omega t)$$

La corrente indotta è quindi

$$i_{indotta} = \frac{fem_{indotta}}{R} = \frac{-\omega B_0 l^2}{R}\cos(\omega t)$$

Il segno di i(t) indica se il suo verso è tale da generare un campo magnetico indotto equiverso a $\vec{n}$ e quindi a $\vec{B}$ (segno positivo) o di segno contrario (segno negativo), ovvero, per la legge di Lenz:

Il verso della corrente indotta è tale da generare un campo magnetico indotto discorde con $\vec{B}$ se il flusso aumenta, concorde con $\vec{B}$ se diminuisce.



Il flusso del campo B si misura in weber [Wb], il campo B in tesla [T], la velocità angolare ω in rad/s, la resistenza R in ohm [Ω], la fem indotta in volt [V] e la corrente indotta in ampere [A].