QUESTIONARIO SIMULAZIONE 2 APRILE 2019

Quesito 1

Assegnato $k \in R$, si consideri la funzione così definita: $g(x) = \frac{(k-1)x^3+kx^2-3}{x-1}$

- **Come va scelto k affinché il grafico di g non abbia asintoti?**
- **Come va scelto k affinché il grafico di g abbia un asintoto obliquo?**

Giustificare le risposte e rappresentare, nei due casi, i grafici delle funzioni ottenute.

Soluzione

La funzione $g(x)$ è definita per $\forall x \neq 1$

Il polinomio che sta al denominatore ha grado 1 e quello che sta al numeratore ha grado 3 $\forall k \neq 1$ e ha grado 2 $per\ k = 1$

1) Per la ricerca degli eventuali asintoti si studiano i seguenti limiti

a) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ b) $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ c) $\lim_{x \to 1} g(x)$

a) $b)$ al tendere di $x\ \ a \mp \infty$ sia il numeratore che il denominatore tendono a infinito

$\lim_{x \to \mp\infty} g(x)$ non può essere un numero finito in quanto $\forall k$

il numeratore è sempre un infinito di ordine superiore rispetto al denominatore

Pertanto, la funzione non ammette asintoti orizzontali $\forall k$

La funzione ammette asintoto obliquo se il grado del numeratore supera di un'unità il grado del denominatore, quindi, se non devono esserci asintoti, si esclude il valore $k = 1$

c) al tendere di $x\ \ a\ \ 1$ il denominatore tende a 0 e il numeratore al valore $2k - 4$

Pertanto

$$\text{se } 2k - 4 \neq 0 \to k \neq 2$$

$\lim_{x \to 1} g(x)$ è infinito e la retta $x = 1$ è asintoto verticale di g(x)

$$\text{se } 2k - 4 = 0 \to k = 2$$

$\lim_{x \to 1} g(x)$si presenta come una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$

Osservando che il numeratore deve essere fattorizzabile per $x-1$ e applicando la regola di Ruffini,

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & +2 & 0 & -3 \\
 & & & & \\
1 & & 1 & 3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 3 & 0
\end{array}
$$

si ottiene $\frac{\boldsymbol{x^3+2x^2-3}}{\boldsymbol{x-1}} = \frac{(\boldsymbol{x-1})(x^2+3x+3)}{\boldsymbol{x-1}}$

Pertanto, $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+3x+3)}{\cancel{x-1}} = 7 \rightarrow$ non esiste l'asintoto verticale

Affinché il grafico di g non abbia asintoti si deve scegliere il valore di $k=2$

2) Se k=1: $g(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$, quindi, si ha un asintoto obliquo con:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x^2-x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x-3}{x-1}\right) = 1$$

Dominio: $\forall x \neq 1$

Intersezioni con gli assi:

y=0 $x = \pm\sqrt{3}$ x=0 y=3

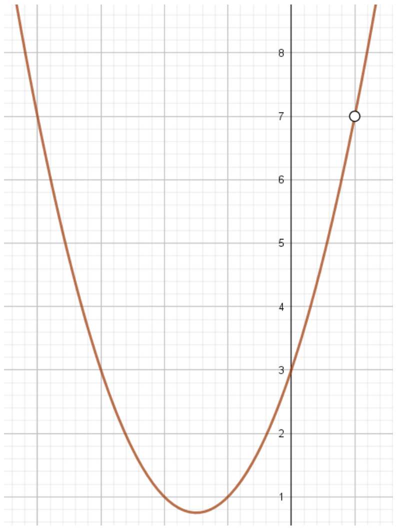
Asintoti:

$$y = x+1 \quad e \quad x = 1$$

Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3}{x-1} = -\infty$$



GRAFICI delle due funzioni

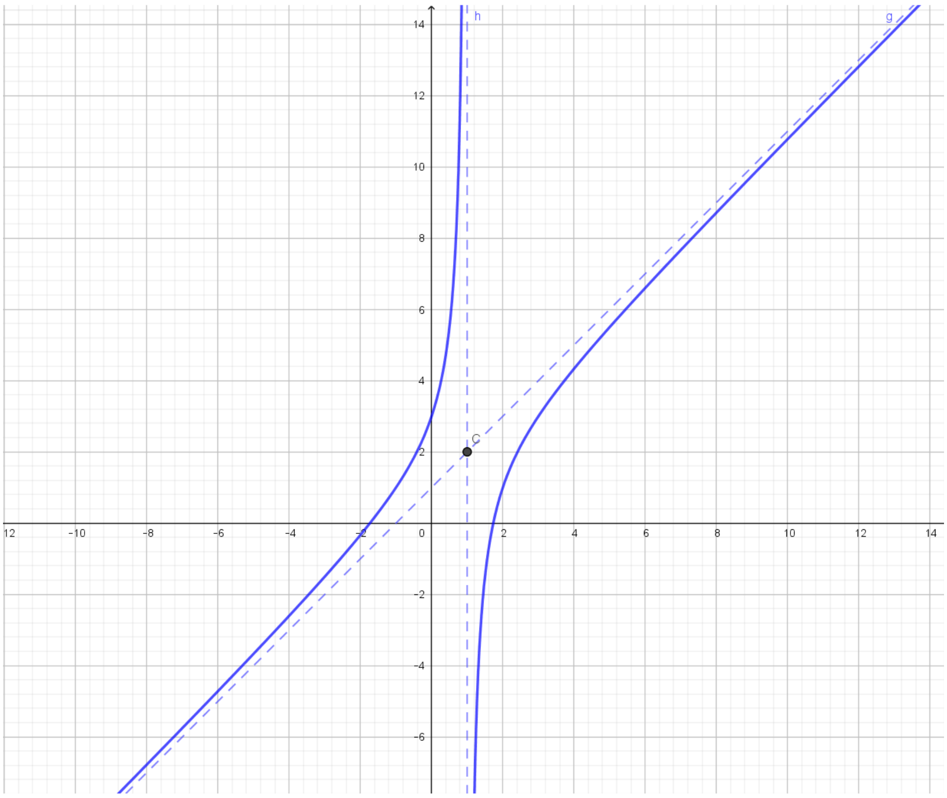
$\mathrm{k}=2$: $\frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(x^2+3x+3)}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}$ con $x \neq 1$

Il grafico coincide con quello della parabola di equazione
$y = x^2 + 3x + 3$
privato del punto $(2; 7)$

$\mathrm{k}=1$: $g(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$

Poiché l'equazione $y = \frac{x^2-3}{x-1}$, ridotta a forma polinomiale, è di secondo grado, il grafico è quello di una conica, precisamente un'iperbole di asintoti

$$x = 1 \quad e \quad y = x + 1$$



Quesito 2

Sia f una funzione pari e derivabile in $\mathbb{R}$, sia g una funzione dispari e derivabile in $\mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione f' è dispari e che la funzione g' è pari. Fornire un esempio per la funzione f ed un esempio per la funzione g, verificando quanto sopra.

Soluzione

a) Essendo f una funzione pari, si ha $f(-x) = f(x) \rightarrow Df(-x) = Df(x)$ Essendo $Df(-x) = -D(f(x)$ si ottiene $-f'(-x) = f'(x) \rightarrow f'(-x) = -f'(x)$ Pertanto, $f'(x)$ è una funzione dispari	b) Essendo g una funzione dispari, si ha $g(-x) = -g(x) \rightarrow Dg(-x) = -Dg(x)$ Essendo $Dg(-x) = -D(g(x)$ si ottiene $-g'(-x) = -g'(x) \rightarrow g'(-x) = g'(x)$ Pertanto, $g'(x)$ è una funzione pari
Osservazione La proprietà è valida anche per le funzioni costanti Una funzione costante $y = k \quad con \quad k \neq 0$ è una funzione pari La funzione y=0 è sia pari che dispari	

Interpretazione geometrica.

Se f è una funzione pari il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y, quindi lo saranno anche le rette tangenti nei punti $A(x;\ f(x))$ e $B(-x;\ f(-x))$ rispettivamente.
Poiché i coefficienti angolari di due rette simmetriche rispetto all'asse y differiscono solo nel segno, si avrà

$$f'(-x) = -f'(x)$$

Se g è una funzione dispari il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani., quindi lo saranno anche le rette tangenti nei punti $A(x;\ f(x))$ e $B(-x;\ f(-x))$ rispettivamente.
Poiché i coefficienti angolari di due rette simmetriche rispetto all'origine sono uguali, si avrà

$$g'(-x) = g'(x)$$

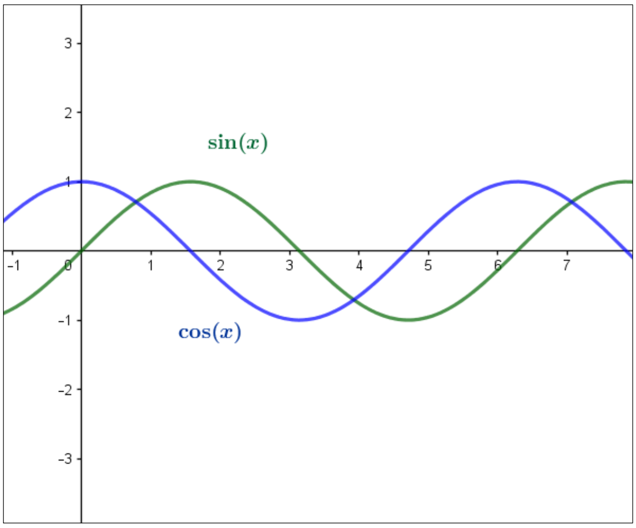
Se $f\ e\ g$ sono funzioni polinomiali, possiamo osservare semplicemente che

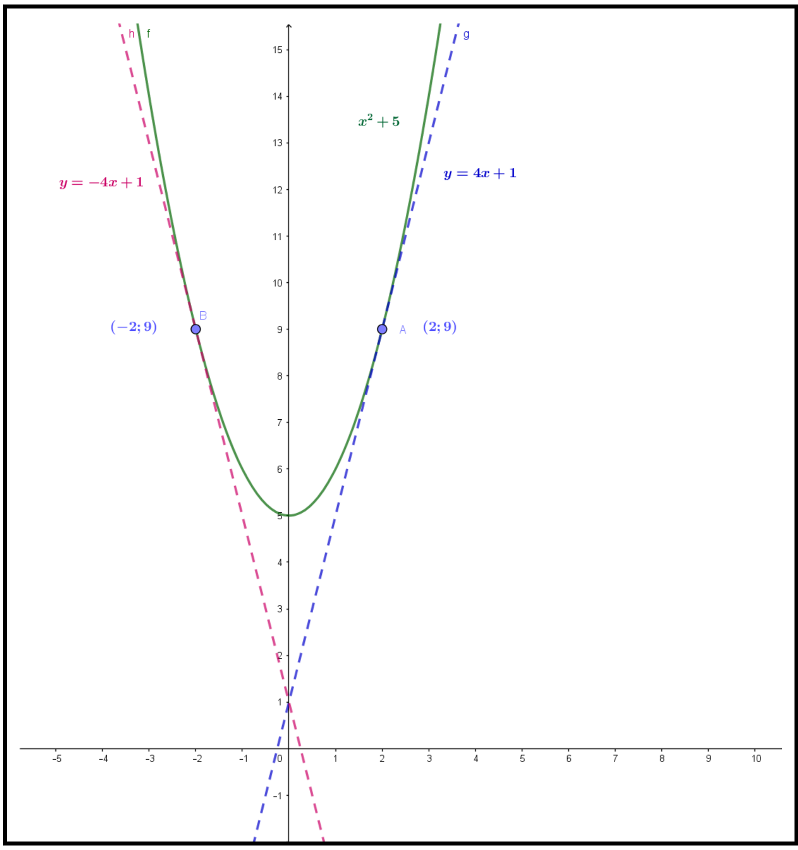
Se la funzione è pari la x compare solo con esponente pari quindi la sua derivata ha x solo con esponente dispari, quindi f' è dispari. E viceversa.

Esempi

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

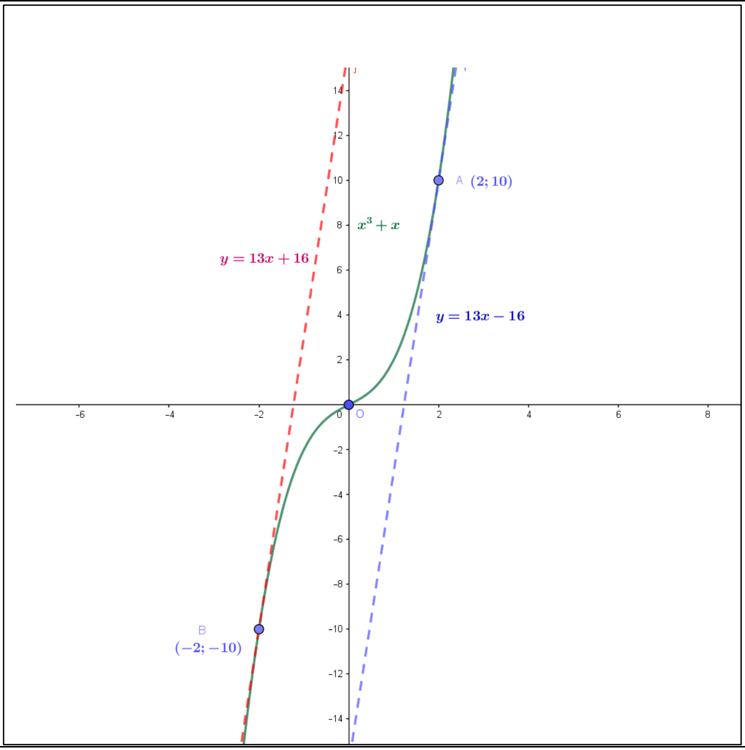
$g(x) = \sin x \qquad g'(x) = \cos x$





$f(x) = x^2 + 5$

$f' = 2x$



$$g(x) = x^3 + x$$

$$g' = 3x^2 + 1$$

Quesito 3

Si consideri la funzione $\boldsymbol{f}: (\mathbf{0}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$\boldsymbol{f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\,dt}$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $\boldsymbol{f}$ nel suo punto di ascissa $\mathbf{1}$.

Soluzione

Essendo la funzione integranda $g(t)$ continua nell'intervallo $[1; x]$ $\forall x > 0$, si può applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale, per cui $f(x)$ è derivabile in x ed è $f'(x) = g(x)$

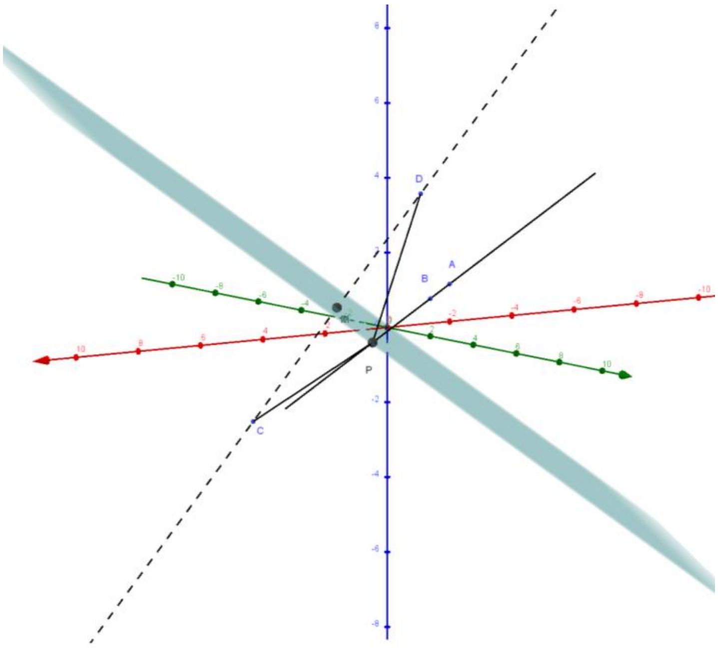
Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1 è uguale, pertanto, a $g(1) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Poiché $f(1) = 0$ la retta tangente ha equazione $y = \frac{1}{2}(x - 1)$

Quesito 4.

Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2,\ 0,\ 1)$ e $B(0,\ 2,\ 1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5,\ 1,-2)$ e $D(1,\ 3,\ 4)$.

Soluzione



Primo metodo

Dati due punti $A(x_A\ ; y_A\ ; z_A)$ e $B(x_B\ ; y_B\ ; z_B)$ la retta r congiungente A e B può essere considerata come la retta per A nella direzione del vettore $\vec{v}$ =B-A $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$

Le equazioni parametriche della retta AB in R^3 si trovano aggiungendo alle coordinate del punto A le componenti di un multiplo di $\vec{v}$

$$r\begin{cases} x = & -2 + t\ (2) \\ y = & 0 + t(2) \\ z = & 1 + t(0) \end{cases}$$

Un generico punto di r ha coordinate $P\ (-2 + 2t; 2t; 1)$

Poiché P deve essere equidistante da C e da D, si impone

$(-2+2t-5)^2+(2t-1)^2+(1+2)^2=(-2+2t-1)^2+(2t-3)^2+(1-4)^2$
$\rightarrow$

$(-7+2t)^2+(2t-1)^2=2(2t-3)^2 \rightarrow$

$$49+4t^2-28\,t+4t^2+1-4t=8t^2+18-24t \rightarrow$$
$$-8t=-32 \rightarrow t=4$$

Il punto P di r equidistante da C e da D è

$P\ (6;8;1)$

Secondo metodo

Il punto P è l'intersezione della retta AB con il piano perpendicolare al segmento CD e passante per il punto medio M (3;2;1)

Le equazioni della retta AB sono $\begin{cases} x-y+2= & 0 \\ z= & 1 \end{cases}$

Infatti, la retta AB appartiene al piano $z=1$ e al piano $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{2} \rightarrow x-y+2=0$

La retta CD ha i parametri direttori proporzionali alla terna
$(4,-2,-6)\quad o\ anche\ alla\ terna\ (2;-1;-3).$

Il piano ad essa perpendicolare, per il punto M ha equazione

$$2(x-3)-(y-2)-3(z-1)=0$$

$2x-y-3z-1=0$

Il punto P è l'intersezione dei 3 piani

$$\begin{cases} x-y+2= & 0 \\ z= & 1 \\ 2x-y-3z= & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2= & y \\ z= & 1 \\ 2x-x-2-3= & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y+2= & 0 \\ z= & 1 \\ x= & 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$P\begin{cases} x= & 6 \\ y= & 8 \\ z= & 1 \end{cases}$$

Quesito n 5.

Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.
Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?
Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?

Soluzione

Lanciando un dado, i possibili punteggi sono 3 e −1, le rispettive probabilità

$$P(3) = \frac{1}{6} \;\; e \; P(-1) = \frac{5}{6}$$

Punto 1. Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0? (evento A)

Soluzione 1.1 Applicazione teoremi probabilità eventi indipendenti e probabilità totale.

Le sequenze vincenti di punteggio nei 4 lanci sono quelle inserite nella tabella

dove L_i è $l'i-simo\ lancio$ e E_i è l'evento $\{punteggio\ 3\ solo \quad all'i-simo\ lancio\}$

Gli esiti delle 4 sequenze sono indipendenti

Gli eventi E_1, E_2, E_3, E_4 sono incompatibili

Per calcolare P(A) applichiamo i teoremi: probabilità composta di eventi indipendenti e probabilità totale per eventi incompatibili

	L_1	L_2	L_3	L_4	Totale	$P(E_i)$
E_1	3	−1	−1	−1	0	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$
E_2	−1	3	−1	−1	0	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$
E_3	−1	−1	3	−1	0	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$
E_4	−1	−1	−1	3	0	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$

$$\boldsymbol{P(A)} = P(E_1) + P(E_2) + P(E_4) + P(E_5) =$$
$$4\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 4\ \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4\frac{125}{1296} = \frac{125}{324} \approx \mathbf{38{,}6\%}$$

Soluzione 1.2 Applicazione della distribuzione binomiale

Per quanto detto prima, il problema si riconduce a quello di eseguire **4 volte il lancio di un dado e ottenere 3 in un solo lancio.**

Si ha una distribuzione binomiale: $P_k = p(X=k) = \binom{n}{k}\, p^{\,k}\, q^{\,n-k}$ con $p=\frac{1}{6}$ e $q=\frac{5}{6}$

Probabilità di k=1 successo in n=4 lanci :

$P_1=p(X=1)= \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = 4\,\frac{1}{6}\,\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4\,\frac{125}{1296} = \frac{125}{324} \approx \mathbf{38,6\%}$

Punto 2 Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0? (evento B)

In tal caso ci sono i vincoli:

- il primo valore estratto deve essere il 3
- almeno un 3 deve risultare estratto in una posizione compresa tra da 2 a 5

ovvero

- in ogni sequenza ci deve essere almeno una coppia di 3 con un 3 al primo posto e l'altro non all'ultimo

Soluzione 2.1

Le sequenze vincenti di punteggio nei 6 lanci sono le seguenti:

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	$P(E_i)$
E'_1	3	3	*	*	*	*	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$
E'_2	3	−1	3	*	*	*	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$
E'_3	3	−1	−1	3	*	*	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$
E'_4	3	−1	−1	−1	3	*	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$
Punteggi parziali							
E'_1	3	6	>0	>0	>0	>0	
E'_2	3	2	5	>0	>0	>0	
E'_3	3	2	1	4	>0	>0	
E'_4	3	2	1	0	3	>0	

*Nelle caselle contrassegnate con * l'esito del lancio può dare come punteggio il 3 o il −1 indifferentemente (evento certo con probabilità uguale a 1)*

Ragionando in modo analogo al punto 1.1 (applicazione teoremi probabilità eventi indipendenti e probabilità totale) possiamo affermare che

$$P(B) = P(E'_1) + P(E'_2) + P(E'_3) + P(E'_4) =$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6^2}} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6^3}} + \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{6^4}} + \frac{\mathbf{125}}{\mathbf{6^5}} = \frac{\mathbf{671}}{\mathbf{7776}} \approx \mathbf{8,6\%}$$

Soluzione 2.1

L'evento B è l'intersezione dei due eventi

B_1 {nel primo lancio del dado esce il numero 3}
B_2 {nei 4 lanci successivi esce il numero 3 almeno una volta}

$P(B_1)\ = 1/6$

$P(B_2)$: $\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)$ in quanto è il complementare dell'evento

$\{in\ 4\ lanci\ non\ si\ esce\ \ mai\ il\ 3\}$ p(X=0) $=\left(\frac{5}{6}\right)^4$

I due eventi sono indipendenti e la probabilità dell'evento B è data dal prodotto delle due probabilità

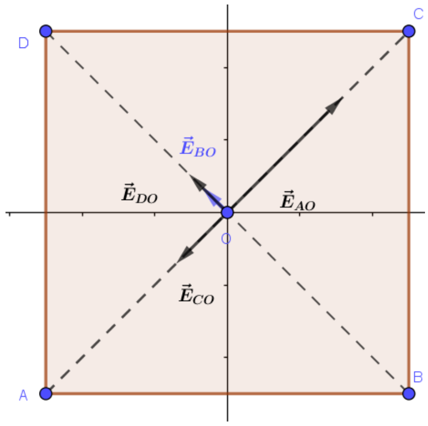
Si ottiene

$$P(B)= \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)=\frac{671}{7776}\approx 8,6\%$$

Quesito 6

Ai vertici di un quadrato $ABCD$, di lato 2 m, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in A è pari a 9 nC, la carica in B è pari a 2 nC, la carica in C è pari a 4 nC, la carica in D è pari a -3 nC. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato.

Ciascuna carica genera nel centro O del quadrato un campo elettrico che ha per direzione la retta congiungente il punto O con il vertice su cui si trova la carica e la cui intensità è direttamente proporzionale alla carica generatrice e inversamente proporzionale al quadrato della distanza da O. (legge di Coulomb). Il verso è diretto verso la carica se questa è negativa è centrifugo se la carica è positiva.



Le cariche hanno uguale distanza $\sqrt{2}$ da O.

Il campo $\vec{E}_{CO}$ e il campo $\vec{E}_{AO}$ sono diretti lungo la diagonale AC e hanno verso opposto.

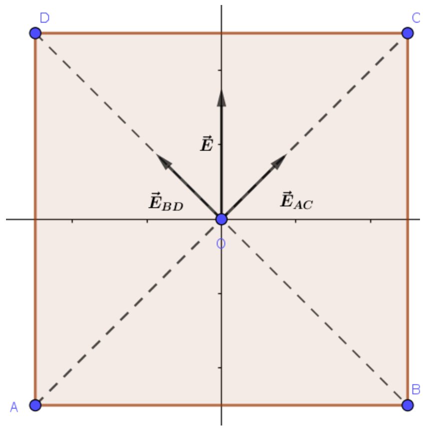
Il vettore risultante $\vec{E}_{AC}$ ha direzione e verso di $\vec{E}_{AO}$ e intensità uguale a

$E_{AC}=E_{AO}-E_{CO}=k\ 9/2-k\ 4/2=k5/2$

Il campo $\vec{E}_{BO}$ e il campo $\vec{E}_{DO}$ sono diretti lungo la diagonale BD e hanno uguale verso. Il vettore risultante $\vec{E}_{BD}$ ha stessa direzione e stesso verso e intensità uguale a

$E_{BD}=E_{BO}+E_{DO}=k\ (2/2+3/2)=k\ 5/2$

$R_{isultante}= E=k\frac{5}{2}\sqrt{2}$



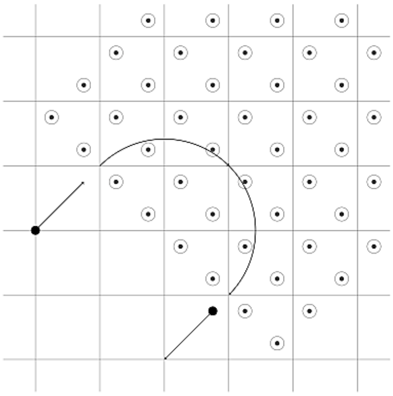
Il campo risultante $\vec{E}$ ha intensità uguale alla lunghezza della diagonale del quadrato formato dai componenti lungo OD e OC. È parallelo ai lati AD e BC e diretto verso il lato CD.

Misurando le cariche in coulomb e le distanze in metri, assegnando alla costante k il valore $9\cdot 10^{-9}\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}$, si ottiene

$E= (9\,\frac{5}{2}\sqrt{2}\cdot 10^{-9}\cdot 10^{9}\approx 31{,}8)\,\frac{N}{C}$

Quesito 7

Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una d.d.p. di 400 V ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità.



La figura illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato 1,00 m). Determinare l'intensità di $\vec{B}$.

Soluzione

Dalla figura si evince che il raggio della traiettoria è $r = \sqrt{2}$ m.

La velocità del protone è data da: $\frac{1}{2}mv^2 = qV$, da cui:

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

L'intensità di $\vec{B}$: $qvB = m\frac{v^2}{r}$ $\quad da\ cui$: $B = \frac{mv}{qr} = \frac{m\sqrt{\frac{2qV}{m}}}{qr} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2mV}{q}} \approx$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 4}{1.6}}\ 10^{-3}\,T = \quad 2mT$$

avendo usato i valori: $q=1{,}6\ 10^{-19}$C $\quad$ $m=1{,}6\ 10^{-27}$kg

Dal verso di $\vec{B}$ si deduce che il protone entra dalla casella in basso al centro ed esce da quella in alto a sinistra.

Quesito 8.

Si vuole ottenere l'emissione di elettroni da lastre metalliche di materiali diversi su cui incide una radiazione di frequenza $7,80 \cdot 10^{14}$ Hz. Determinare, motivando la risposta, quale tra i materiali in elenco è l'unico adatto allo scopo.

Materiale	Lavoro di estrazione
Argento	**4,8 eV**
Cesio	**1,8 eV**
Platino	**5,3 eV**

Individuato il materiale da utilizzare, determinare la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

Soluzione

L'energia del fotone incidente è data dalla legge di Planck: $E = hf =$

$(6{,}63 \cdot 10^{-34} J \cdot s)(7{,}80 \cdot 10^{14}\ Hz) \cong 5{,}17 \cdot 10^{-19}$ J che in eV corrispondono:

E=$5{,}17 \cdot 10^{-19}$ / ($1{,}602\ 10^{-19}$) $\cong$ 3,23 eV

Quindi l'unico materiale da cui è possibile la fotoemissione è il Cesio, gli altri hanno un lavoro di estrazione superiore.

L'elettrone fotoemesso avrà un'energia massima:

$E_{max} \cong 3{,}23-1{,}8=1{,}43$ eV $\cong 2{,}29 \cdot 10^{-19}$ J

da $\frac{1}{2}mv^2 = E$ si ottiene $v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \approx 7{,}1 \cdot 10^5\ m/s$