PROBLEMA n.1

PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax + b)\, e^{2x - x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.

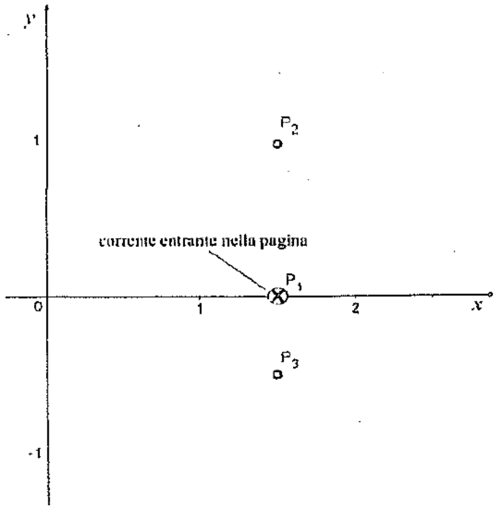
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

  $P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

  I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2{,}0$ A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

  Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω.

SOLUZIONE

Consideriamo le funzioni

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad e \qquad g(x) = (ax + b)e^{2x - x^2}$$

La funzione f(x) è una parabola se $a \neq 0$.

La funzione g(x) è una funzione continua nel suo dominio $D \equiv R$, e $\forall\, a, b \in R,\ a \neq 0$ assume sia valori positivi, sia valori negativi e si annulla in un sol punto di ascissa $x = -\frac{b}{a}$.

Il fattore esponenziale assume solo valori positivi, mentre

$$ax + b \geq 0 \quad per\ \ x \geq -\frac{b}{a} \quad se\ a > 0 \ \ e\ per \quad x \leq -\frac{b}{a} \quad se\ a < 0$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax+b)e^{2x-x^2}=0$$

essendo g(x), nella forma $\frac{ax+b}{e^{x^2-2x}}$, rapporto di due infiniti, di cui quello al denominatore è di ordine superiore.

Ci aspettiamo pertanto che l'insieme immagine di f(x) sia un intervallo chiuso e limitato, avente un valore massimo positivo e un valore minimo negativo.

Le due funzioni si intersecano nel punto A (2,1) pertanto imponiamo il passaggio di f(x) e g(x) per il punto A:

$$\begin{cases} f(2)=g(2) \\ f(2)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a-2+b=2a+b \\ 4a-2+b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

- Quindi le funzioni ottenute sono le seguenti:

$$f(x)=x^2-x-1 \qquad e \qquad g(x)=(x-1)e^{2x-x^2}$$

f(x) è una parabola di vertice $V\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$ che interseca l'asse x nel punto C (1,0), interseca l'asse y nel punto B (0,-1) e passa per A (2,1).

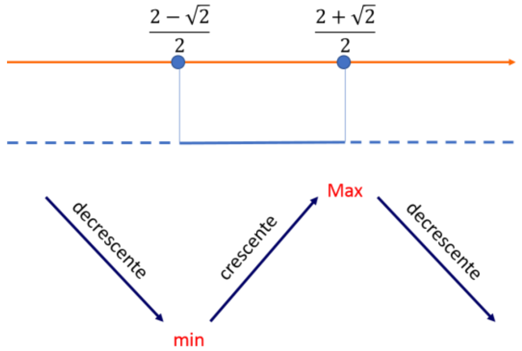
g(x) è una funzione di dominio R e qui continua; è positiva per x>1 e negativa per x<1, interseca l'asse x nel punto C (1,0); inoltre essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x-1)e^{2x-x^2}=0$$

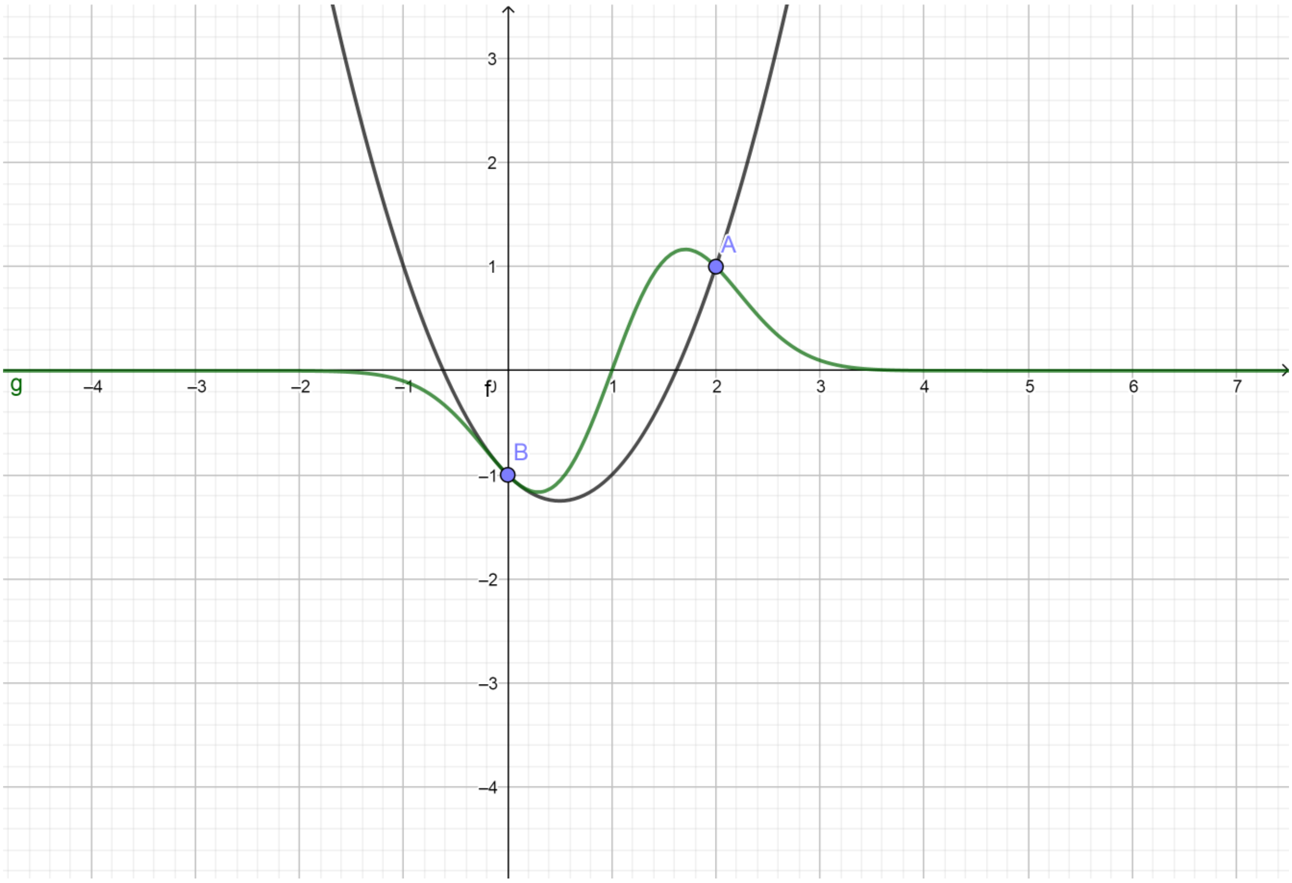
ammette come asintoto orizzontale l'asse x.

Studiamo la crescenza e decrescenza, nonché gli estremi, della funzione:

$$g'(x)=(-2x^2+4x-1)e^{2x-x^2}\geq 0 \quad se \quad -2x^2+4x-1\geq 0 \quad per \quad \frac{2-\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$



$$\min\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\approx -1.2\right) \qquad e \qquad Max\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\approx +1.2\right)$$



Dal grafico possiamo osservare che il punto C (1,0), punto medio tra il punto di massimo e il punto di minimo, è un centro di simmetria per la funzione.

Dimostriamo allora che g(x) ha come centro di simmetria il punto C (1,0); scriviamo infatti le equazioni della simmetria centrale di centro C:

$$\begin{cases} x = 2 - X \\ y = -Y \end{cases}$$

Sostituiamo la x e la y nell'equazione di g(x):

$$-Y = (2 - X - 1)e^{4-2x-(2-x)^2}$$

$$-Y = (1 - X)e^{2x-x^2}$$

$$Y = (X - 1)e^{2x-x^2}$$

otteniamo così la stessa funzione, per cui resta dimostrata la simmetria centrale di g(x) rispetto al punto C.

Allo stesso risultato possiamo arrivare osservando che la funzione

$$g(x) = (x - 1)e^{2x-x^2}$$

può essere riscritta in questa forma

$$g(x) = (x-1)e^{-(x-1)^2+1}$$

che rappresenta la funzione traslata, di un vettore $\vec{v}(1,0)$, della funzione

$$y = xe^{-(x)^2+1}$$

che è simmetrica rispetto all'origine O (0,0) in quanto è una funzione dispari, prodotto di una funzione dispari per una funzione pari.

Dimostriamo ora che i grafici di f(x) e g(x) sono tangenti nel punto B (0,-1), cioè hanno in B la stessa tangente; a tal proposito calcoliamo il coefficiente angolare della tangente a f(x) in B e il coefficiente angolare della tangente a g(x) in B:

$$m = f'(x) = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad f'(0) = -1$$
$$m' = g'(x) = (-2x^2 + 4x - 1)e^{2x-x^2} \quad \rightarrow \quad g'(0) = -1$$

quindi m = m'; l'equazione della retta tangente in B (0,-1) è dunque:

$$y + 1 = -1(x) \quad \rightarrow \quad y = -x - 1$$

Calcoliamo ora l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f(x) e g(x):

$$Area(S) = \int_0^2 [(x-1)e^{2x-x^2} - (x^2 - x - 1)]dx =$$

Ponendo

$$2x - x^2 = t \quad \rightarrow \quad (2-2x)dx = dt \quad \rightarrow \quad (x-1)dx = -\frac{dt}{2}$$

otteniamo

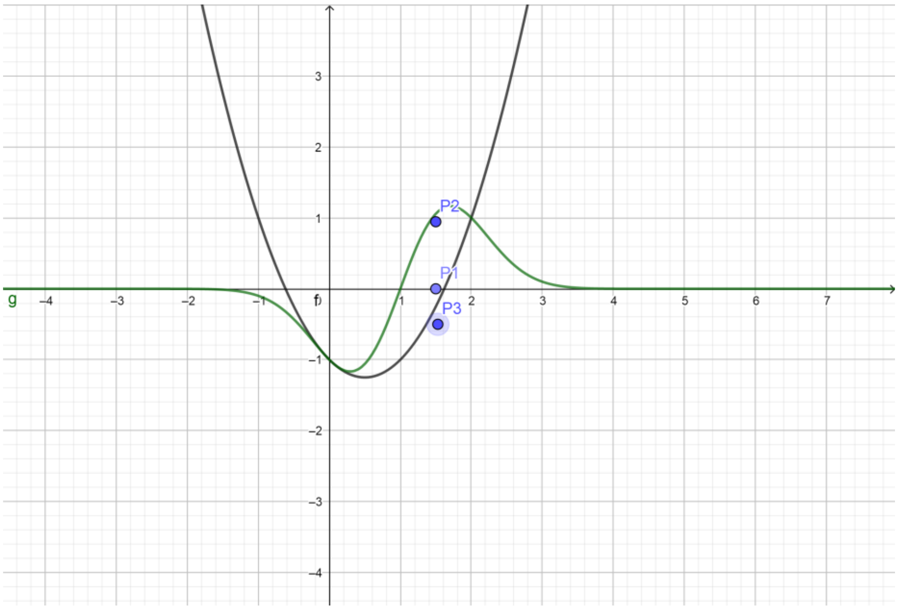
$$Area(S) = -\frac{1}{2}\int_0^0 e^t dt + \int_0^2 (-x^2 + x + 1)dx = -\frac{8}{3} + 2 + 2 = \frac{4}{3}$$

- Consideriamo ora tre fili conduttori, perpendicolari al piano Oxy e posizionati nei punti del piano

$$P_1 = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$P_2 = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$P_3 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



Il filo conduttore passante per il punto P_1 è percorso da una corrente i_1 di intensità 2,0 A, entrante nel piano, mentre il filo conduttore passante per P_2 è percorso da una corrente i_2 di cui non è indicato il verso né l'intensità, e ancora il filo conduttore passante per P_3 è percorso da una corrente i_3 di cui anche qui non è indicato il verso né l'intensità.

Dal Teorema della circuitazione di Ampère, la circuitazione di un qualunque campo magnetico B lungo una linea chiusa L è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate alla linea L, moltiplicata per la permeabilità magnetica del vuoto:

$$C_L(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Il segno algebrico della corrente è positivo se il campo che essa genera ha lo stesso verso di percorrenza della linea L lungo la quale si calcola la circuitazione.

Nel nostro caso P_1 è all'interno della zona S e quindi i_1 è all'interno del contorno di S; anche P_2 è all'interno della zona S in quanto la sua ordinata è inferiore a $g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1{,}05$ e quindi anche i_2 è all'interno del contorno di S; mentre P_3 non è situato all'interno della zona S in quanto la sua ordinata è inferiore a $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ e quindi i_3 è all'esterno del contorno di S.

Pertanto, i contributi alla circuitazione sono dati da i_1 e i_2:

$$C_L(\vec{B}) = \sum_{i=1}^{2} I_i = \mu_0\,(i_1 + i_2)$$

Se stabiliamo come verso di percorrenza del contorno di S quello orario, poiché i_1 è diretta verso il basso, essa genera un campo magnetico cui linee di forza hanno lo stesso verso orario del verso di percorrenza, pertanto il segno di i_1 è positivo; se i_2 è diretta verso il basso anch'essa avrà segno positivo:

$$C_L(\vec{B}) = \sum_{i=1}^{2} I_i = \mu_0\,(i_1 + i_2)$$

In questo caso se $i_2 > i_1 \quad o \quad i_2 < i_1$ la circuitazione è sempre positiva

Se i_2 è diretta verso l'alto essa avrà segno negativo:

$$C_L(\vec{B}) = \sum_{i=1}^{2} I_i = \mu_0\,(i_1 - i_2)$$

In questo caso se $i_2 > i_1$, la circuitazione è negativa, altrimenti è positiva.

Naturalmente si ottengono risultati opposti se si sceglie il verso di percorrenza antiorario.

La circuitazione è nulla se le correnti hanno uguale intensità e verso opposto

- La corrente che viene generata è una corrente alternata di intensità:

$$i = \frac{fem_{indotta}}{R}$$

Essendo

$$\Phi(\overrightarrow{B}) = BScos(\omega t)$$

dalla legge di Faraday – Neumann ne segue che:

$$fem_{indotta} = -\frac{d(\Phi(\overrightarrow{B}))}{dt} = -\frac{d\big(BScos(\omega t)\big)}{dt} = BS\omega sen(\omega t)$$

dove $BS\omega$ è il valore di picco della fem.

L'intensità di picco della corrente è:

$$i_0 = \frac{BS\omega}{R} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{i_0 R}{BS} = 0{,}05\; rad/s$$

APPROFONDIMENTI

a) Nel punto 1 si può procedere in modo più rigoroso per provare l'esistenza del massimo e del minimo assoluti, studiando la monotonia della funzione attraverso lo studio della derivata

$$g'(x) = \left(-2ax^2 + 2(a-b)x + a + 2b\right)e^{2x-x^2}$$

Per qualsisi valore di a e b il fattore di secondo grado ammette due zeri reali e distinti essendo il discriminante sempre positivo

$$\frac{\Delta}{4} = 2a^2 + (a+b)^2$$

e assumerà valori positivi nell'intervallo interno o nell'intervallo esterno, a seconda che sia $a > 0 \quad o \quad a < 0$, Gli zeri della derivata corrispondono agli estremi relativi di $g(x)$ che saranno anche estremi assoluti (minimo negativo e massimo positivo) poiché $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

COMMENTO

Il problema affronta argomenti coerenti con i quadri di riferimento di matematica e di fisica e propone alcune questioni di tipo standard, familiari agli studenti.

Alcuni punti possono essere affrontati in modo intuitivo, eventualmente con l'aiuto di un grafico, e poi approfonditi in modo rigoroso.

La soluzione permette di valutare le conoscenze, le abilità di calcolo e le capacità argomentative degli studenti.

La formulazione è chiara e riesce sufficientemente a integrare le due discipline,.