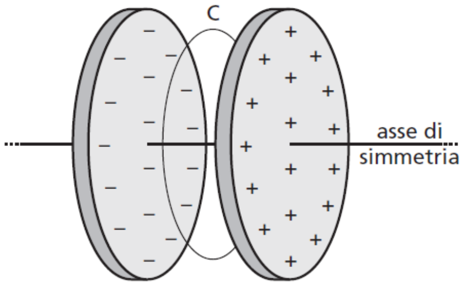
Problema 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}r \qquad \text{con } r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?
- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

  $$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

  Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

  A quale valore tende $\left|\vec{B}\right|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.
- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

Soluzione

B varia secondo la legge: $B = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} r \quad con\, r \leq R$ e con a e k positive

- [a]=[s] a ha le dimensioni di un tempo, perché deve potersi sommare con t, affinché la formula abbia senso.

[k]= [T s^2] perché B si misura in Tesla, T, quindi $[T] = \left[\frac{k \cdot s}{s^3} m\right]$ da cui :

$$[k] = [T \frac{s^2}{m}]$$

Il condensatore è evidentemente in fase di carica, c'è una d.d.p. variabile nel tempo quindi un'intensità del campo elettrico $\vec{E}$ variabile secondo la relazione $E = \frac{V}{d}$.

Si fa riferimento all'equazione di Maxwell: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$

che fra le armature del condensatore si semplifica in:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$$

Se E è variabile lo è anche il suo flusso e si determina un campo magnetico $\vec{B}$.

$\vec{E}$ è diretto dall'armatura positiva alla negativa, $\vec{B}$ è perpendicolare ad $\vec{E}$, diretto secondo le tangenti alle linee di forza che sono circonferenze giacenti in piani paralleli alle armature e hanno il centro sull'asse di simmetria del condensatore.

- La circuitazione di B lungo la circonferenza C giacente su un piano perpendicolare all'asse del condensatore, avente centro sull'asse e raggio r, è: $B\, 2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$

quindi . $\Phi_{\vec{E}} = \int_0^{t_f} \frac{2\pi r}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} r\, dt = \frac{2\pi r}{\varepsilon_0 \mu_0} kr \int_0^{t_f} \frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} dt$

essendo t_f il tempo finale.

L'integrale $I = \int \frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} dt$ si risolve con la sostituzione:

$$t^2 + a^2 = z$$

da cui: $t = \sqrt{z - a^2}$ e $dt = \frac{dz}{2\sqrt{z-a^2}}$

con questa sostituzione:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} dz = -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + cost.$$

L'integrale definito: $\phi_{\vec{E}} = \int_0^t \frac{2\pi r}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} r\, dt = \frac{2k\pi r^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right)$

La d.d.p. tra le armature è: $V = E \cdot d$

dove E si ottiene dal flusso:

$$E = \frac{1}{\pi R^2} \frac{2k\pi R^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right) = \frac{2k}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

da cui: $V = \frac{2k}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right) d$

Al passare del tempo:

$$\lim_{t \to \infty} B = \lim_{t \to \infty} \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r = 0$$

Com'è naturale dato che:

$$\lim_{t \to \infty} E = \frac{2k}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{1}{a}$$

cioè E è costante, il condensatore si è caricato, se E non varia non varia il suo flusso e quindi B=0.

- La funzione:

$$f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$$

è la stessa che abbiamo integrato in precedenza, cambiata di segno, e con r e k uguali ad 1, quindi la sua primitiva è:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + cost.$$

Se passa per l'origine:

$$F(0) = 0 = \frac{1}{\sqrt{0 + a^2}} + cost. da\ cui: \quad cost. = -\frac{1}{a}$$

La funzione

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$$

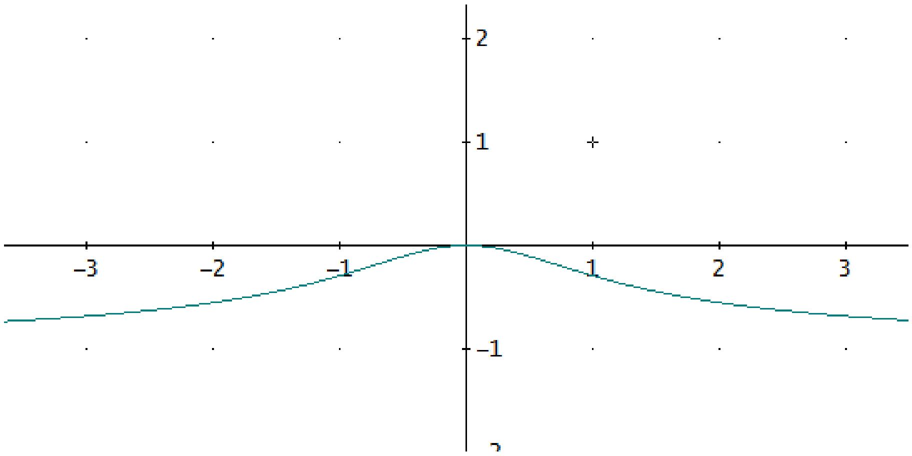
è definita $\forall t$ (nella situazione fisica in questione è t>0). È pari, cioè simmetrica rispetto all'asse y, perché t compare solo al quadrato, ha asintoto orizzontale $y = -\frac{1}{a}$, perché:

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = -\frac{1}{a}$$

La derivata è semplicemente: $F' = f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$

che è maggiore di zero per t<0, quindi c'è un max nell'origine.

La derivata seconda: $F'' = \frac{2t^2-a^2}{(t^2+a^2)^{5/2}}$ si annulla nei due valori indicati dal testo e cambia segno nell'intorno di essi.



La pendenza in $\frac{\sqrt{2}}{2}a$:

$$F'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+a^2\right)^3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$

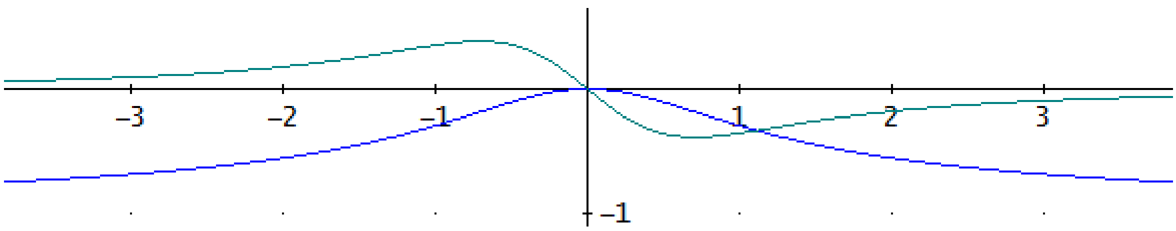
e simmetricamente: $F'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$, in $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$

L'andamento grafico della derivata:

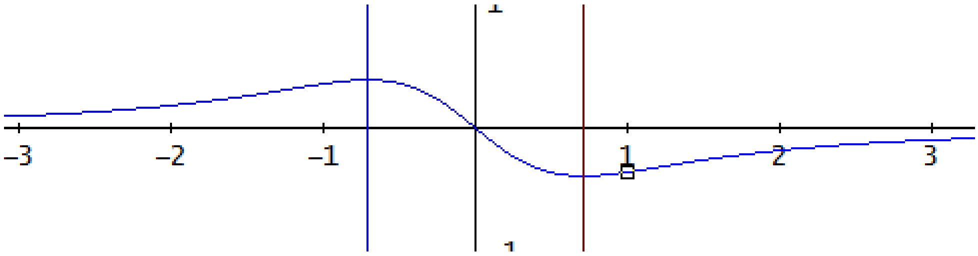
Tende a 0 a $\pm\infty$ perché la funzione $F(t)$ ha un asintoto orizzontale, cioè tende a una costante, e ha derivata seconda positiva nell'intorno dell'infinito (la derivata prima è monotona nello stesso intorno).

Ha simmetria dispari perché $F(t)$ è pari.

Si annulla nell'origine perché la funzione $F(t)$ ha un max in t=0, ha valori positivi per t<0 dove F(t) è crescente, ha due estremi relativi dove $F(t)$ ha flessi.



Per calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele passanti per gli estremi di f(t):



osserviamo che, essendo la $f(t)$ dispari, le due regioni sono simmetriche rispetto all'origine e quindi basta raddoppiare l'area della regione di sinistra:

$$A = 2\left[F(0) - F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\right] = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2}} + \frac{1}{a}\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{2(3 - \sqrt{6})}{3a}$$

Se invece , fissato $b > 0$,si calcola l'integrale definito $\int_{-b}^{b} f(t)dt$ si ottiene $\int_{-b}^{b} f(t)dt = \int_{-b}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{b} f(t)dt = \int_{-b}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{-b} -f(-t)dt =$

$\int_{-b}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{-b} f(t)dt$ =0

Approfondimento

La corrente di spostamento

Per rispondere esaurientemente alla richiesta del punto 1 << spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione >> ricordiamo che Maxwell introdusse il concetto di corrente di spostamento proprio per generalizzare il teorema della circuitazione di Ampère anche in caso di un percorso chiuso che non sia concatenato con alcuna corrente di conduzione, la cui area però sia attraversata dalle linee di forza di un campo elettrico variabile, come all'interno di un condensatore in fase di carica o di scarica. Per ragioni di simmetria rispetto alla legge dell'induzione elettromagnetica ipotizzò che un campo elettrico variabile possa generare un campo magnetico variabile ad esso perpendicolare e proporzionale alla variazione di flusso del vettore $\vec{E}$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$$

Durante la fase di carica o di scarica si si genera un campo magnetico con le stesse caratteristiche di quello generato da una corrente di conduzione ,come se la corrente che circola nel circuito si prolungasse all'interno del condensatore.

Si può dimostrare infatti che la quantità $\varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$ (corrente di spostamento) non solo ha le dimensioni di una corrente ma ha valore uguale all'intensità corrente che circola nel circuito, essendo

$$\frac{d\phi(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dq}{dt}$$

In tal modo Maxwell non solo elimina alcune ambiguità di carattere teorico ma pone le basi per la scoperta dell'esistenza di onde elettromagnetiche.

COMMENTO

La traccia è apprezzabile per il contenuto concettuale, relativo a entrambe le discipline, che però non è esente da complessità di calcolo.

L’approccio è apparso difficile alla maggioranza degli studenti, nonostante la presenza di alcune strutture di controllo che ne facilitano la soluzione.

La prima parte, di contesto fisico, richiede anche competenze matematiche ma le due parti restano sostanzialmente separate.