QUESITO 1

Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$ dove $d \in R$ e p(x) è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e 12/5 ed ha come asintoti le rette di equazione x=3, x=-3 e y=5. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

Soluzione

È data la funzione

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$$

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta; dalla presenza di un asintoto orizzontale si evince che il numeratore e il denominatore devono avere lo stesso grado, pertanto possiamo affermare che p(x) è un polinomio di secondo grado del tipo:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

che ha come radici $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{12}{5}$ e può essere scritto in questa forma:

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

quindi

$$f(x) = \frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{x^2+d} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{ax\left(x - \frac{12}{5}\right)}{x^2+d}$$

Inoltre poiché f(x) ha due asintoti verticali di equazione x=3 e x=-3, i valori 3 e -3 sono valori che annullano il denominatore, per cui $x^2 + d = 0 \ \ per\ x = \pm 3 \quad \rightarrow \quad 9 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = -9$.

Quindi

$$f(x) = \frac{ax\left(x - \frac{12}{5}\right)}{x^2-9}$$

Infine, poiché f(x) ha come asintoto orizzontale la retta di equazione y=5 si ha che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 5$$

ma

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax\left(x-\frac{12}{5}\right)}{x^2+d} = \frac{\infty}{\infty} = a = 5$$

in quanto il grado del numeratore di f(x) è uguale a quello del suo denominatore, e quindi il valore del limite è dato dal rapporto dei coefficienti delle x di grado massimo; pertanto a=5.

La funzione richiesta è la seguente:

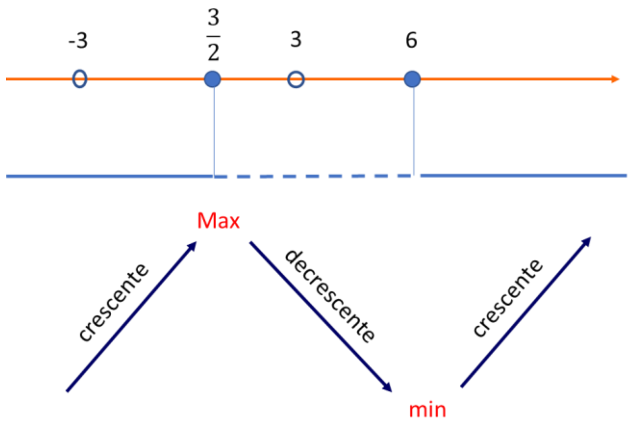
$$f(x) = \frac{5x^2-12x}{x^2-9} \qquad D \equiv R-\{\pm 3\}$$

Determiniamo i punti di massimo e minimo relativi della funzione:

$$f'(x) = \frac{(10x-12)(x^2-9)-2x(5x^2-12x)}{(x^2-9)^2} = \frac{6(2x^2-15x+18)}{(x^2-9)^2} \geq 0$$

$$se \quad 2x^2-15x+18 \geq 0 \quad per \quad x \leq \frac{3}{2} \quad vel \quad x \geq 6$$

$$(x^2-9)^2 \geq 0 \quad \forall\, x \in R-\{\pm 3\}$$



Gli estremi sono quindi:

$$Max\left(\frac{3}{2},1\right)$$

$$min\ (6,4)$$

COMMENTO

Quesito standard sulle proprietà delle funzioni, richiede comunque capacità logiche e argomentative