QUESITO 2

È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in R$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x}$$

Soluzione

Sia data la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

che possiamo riscrivere in questo modo:

$$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2016} + x^{2018})$$

Data l'equazione

$$g(x) = 0$$

ovvero

$$x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2016} + x^{2018}) = 0$$

per la legge dell'annullamento del prodotto si ha che

$$x = 0$$

e

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2016} + x^{2018}) = 0$$

Ma essendo

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2016} + x^{2018}) > 0$$

in quanto somma di quadrati, l'unica soluzione è x=0.

Si può anche osservare subito che $g(0) = 0$ e che la funzione non ammette altri zeri in quanto è monotona crescente.
Infatti, la derivata, essendo un polinomio a coefficienti positivi in cui compaiono solo potenze pari, assume solo valori positivi:

$$g'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \cdots 2017x^{2016} + 2019x^{2018}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

ma poiché la funzione esponenziale con base maggiore di 1 tende a infinito più rapidamente della funzione algebrica g(x), (somma di potenze) tale limite vale 0.

COMMENTO
La formulazione del quesito non è standard ma, una volta individuata una strategia idonea, la risoluzione non presenta difficoltà.
Si richiedono e attenzione nella comprensione del testo e discrete capacità logiche e argomentative