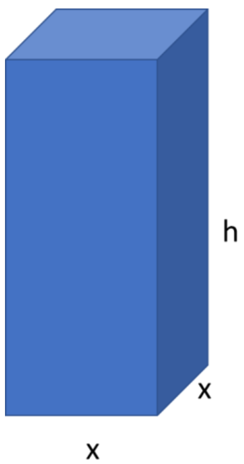
QUESITO 3

Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

Soluzione

Consideriamo un parallelepipedo a basa quadrata avente spigolo di base uguale a x e altezza h, con x>0 e h>0.



Se l'area della superficie totale è S, essendo:

$$S = 2\ Area\ base + Superficie\ laterale = 2x^2 + 4hx$$

ricaviamo l'altezza h in funzione di x

$$h = \frac{S - 2x^2}{4x}$$

ed essendo h>0 ne segue:

$$\frac{S - 2x^2}{4x} > 0 \quad se \quad 0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}$$

La funzione f(x) da rendere minima è ottenuta dalla somma dei 12 spigoli del parallelepipedo:

$$f(x) = 8x + 4\left(\frac{S - 2x^2}{4x}\right) = \frac{6x^2 + S}{x}$$

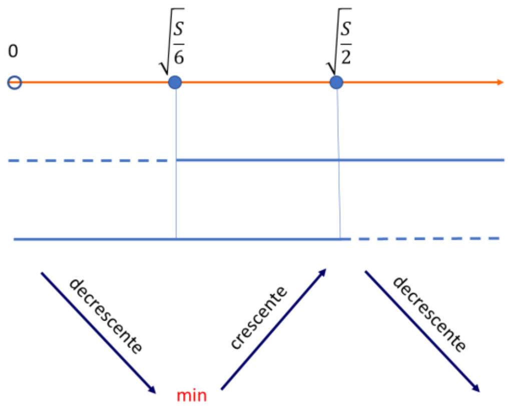
Pertanto

$$f'(x) = \frac{12x^2 - 6x^2 - S}{x^2} = \frac{6x^2 - S}{x^2} \geq 0$$

$$se \quad x \leq -\sqrt{\frac{S}{6}} \quad vel \quad x \geq \sqrt{\frac{S}{6}}$$

e tenendo presenti le limitazioni della x

$$0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}$$



Quindi la somma delle lunghezze degli spigoli è minima per $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$ e il valore minimo di f(x) è

$$f\left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right) = 2\sqrt{6S}$$

Inoltre, se

$$x = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

allora

$$h = \frac{S - 2x^2}{4x} = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Pertanto, il parallelepipedo è un cubo.

COMMENTO

Il quesito riguarda un classico problema di ottimizzazione, di tipo standard, più volte proposto all’esame di stato.