## Quesito 7

In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di $2{,}0\ ns$ percorre una distanza di $25\ cm$. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\ c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

## Soluzione

La particella si trova nel punto O, origine del riferimento del laboratorio, all'istante $t = 0$ e si trova nel punto B, distante 25 cm da O, dopo un intervallo di tempo di $2 \cdot 10^{-9} s$ . Si è mossa pertanto con velocità media pari a

$$\boldsymbol{u = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{25}{2} 10^7 \frac{m}{s} \approx 1{,}25 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$$

Poiché il riferimento della navicella, di origine O', si nuove rispetto a O di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 0{,}80\ c = \frac{4}{5} c$ confrontabile con quella della luce, per passare da un riferimento all'altro applicheremo le leggi della Relatività speciale.

Consideriamo il valore di $c$ uguale a $3 \cdot 10^8\ m/s$

Per determinare la velocità della particella rispetto a O' utilizziamo la legge relativistica di composizione delle velocità

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Nel nostro caso $u = \frac{25}{2} 10^7 \frac{m}{s} = \frac{5}{12} c$ $\quad v = \frac{4}{5} c \quad$ *pertanto*

$$\boldsymbol{u' = \frac{\frac{5}{12} c - \frac{4}{5} c}{1 - \frac{5}{12}\frac{4}{5}} = \frac{-\frac{23}{60}}{\frac{2}{3}} c = -\frac{23}{40} c}$$

Rispetto a O' la particella si muove nel verso negativo dell'asse $x$.

Il moto della particella può essere studiato nel riferimento O' della navicella con le trasformazioni di Lorentz, considerando, in ciascuno dei due riferimenti, le coordinate dei due eventi

$A_1$ = la particella si trova si trova in O

$A_2$ = la particella si trova in B

Trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x'_1 = & \gamma(x_1 - vt_1) \\ t'_1 = & \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) \end{cases} \quad \begin{cases} x'_2 = & \gamma(x_2 - vt_2) \\ t'_2 = & \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) \end{cases} \qquad dove\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$$

Supponiamo che l'evento $A_1$ abbia coordinate (0;0) in entrambi i riferimenti, cioè che nell'istante iniziale le posizioni di O e O' coincidano.

L'evento $A_2$ ha coordinate ($25\cdot 10^{-2}$;$2\cdot 10^{-9}$) nel primo riferimento (l'unità di misura sull'asse $x$ è il metro e sull'asse $t$ è il secondo)

Nel riferimento di O' la distanza spaziale tra i due eventi è uguale a

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \frac{5}{3}\left(25 - \frac{240}{5}\right)10^{-2} = -\frac{115}{3}10^{-2}$$

Pertanto, rispetto a O', la distanza percorsa dalla particella è

$$\boldsymbol{|\Delta x'| = \left|-\frac{115}{3}10^{-2}\right| m \approx 38\ cm}$$

mentre il tempo impiegato è uguale a

$$\boldsymbol{\Delta t' = \frac{\Delta x\prime}{u\prime} = \frac{115}{3}\,\frac{40}{23}\frac{1}{3}10^{-10}\mathrm{s} = \frac{20}{9}10^{-9}s \approx 2{,}2\ ns}$$

APPROFONDIMENTO

La richiesta finale è stata giudicata ambigua da alcuni risolutori che hanno interpretato il problema come un'applicazione delle leggi della dilatazione del tempo e della contrazione delle lunghezze.

Vediamo pertanto come passando attraverso queste due leggi e applicandole correttamente si perviene agli stessi risultati, anche se in modo meno immediato.

**La contrazione delle lunghezze**

La lunghezza di un segmento non è invariante se misurata in un riferimento in moto relativo.

La lunghezza propria è quella misurata in un riferimento in cui il segmento è in quiete e, nel nostro caso, la lunghezza propria $L_0$ del segmento OB è quella misurata nel laboratorio, cioè è uguale a 25 cm.

La stessa lunghezza, misurata da un osservatore sulla navicella sarà uguale a

$L' = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{3}{5}25\ \cdot 10^{-2}m = 15\ cm$ (legge di contrazione delle lunghezze)

Dal punto di vista della navicella la particella e il punto B si muovono entrambi nella direzione dell'asse x e nel verso negativo. Il punto B ha uno svantaggio iniziale di 15 cm rispetto alla particella, la quale si trovava nell'origine, ma si muove più velocemente. L'incontro avverrà dopo un intervallo di tempo $\Delta t'$ tale che

$L' - v\Delta t' = -u'\Delta t' \rightarrow \Delta t' = \frac{L'}{v-u'} = \frac{15\cdot 10^{-3}}{\left(\frac{4}{5}-\frac{23}{40}\right)c}\ s\ = \frac{15}{3\cdot\frac{9}{40}}\cdot 10^{-10}\ \text{s}\ = \frac{20}{9}10^{-9}s\ \approx 2{,}2\ ns$ e in questo intervallo di tempo la particella copre una distanza pari a

$$u'\Delta t' = \left(\frac{23}{40}\ 3\cdot 10^{8}\,\frac{20}{9}10^{-9} \quad = \frac{230}{6}10^{-2} = \frac{115}{2}10^{-2}\right)\ m \approx 38\ cm$$

in accordo coi risultati precedenti

**La dilatazione del tempo**

La durata del fenomeno ha un suo tempo proprio che, nel caso del moto della particella, è quello misurato in un riferimento solidale con la particella stessa. Rispetto alla particella i due eventi, partenza e arrivo o, meglio, passaggio del punto O e del punto B, avvengono nello stesso luogo e sono separati dalla distanza temporale $\tau$ che è minore dell'intervallo di tempo misurato in ogni altro riferimento in moto rispetto alla particella (legge della dilatazione del tempo: $\Delta t' = \gamma\tau$),

Il fattore di Lorentz, $\gamma$ ,nel passaggio dal riferimento della particella a quello del laboratorio è uguale a $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{144}}} \approx 1{,}1$ quindi $\tau = \frac{\Delta t}{\gamma_0} \approx 1{,}8\ ns$

Se invece il confronto avviene con il riferimento della navicella, consideriamo il fattore di Lorentz $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{23}{40}\right)^2}} \cong 1{,}2$

Il rapporto $\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{40}{3\sqrt{119}}\cdot\frac{\sqrt{119}}{12} = \frac{10}{9}$

Pertanto, $\Delta t' = \gamma'\tau = \frac{\gamma'}{\gamma_0}\Delta t\ = \frac{10}{9}\Delta t = \frac{20}{9}10^{-9}s\ \approx 2{,}2\ ns$

in accordo coi risultati precedenti

COMMENTO

Si tratta di un quesito, abbastanza semplice, di cinematica relativistica, la cui tipologia è molto diffusa tra i libri di testo. La formulazione della richiesta è stata però, per alcuni, fuorviante nella scelta della strategia risolutiva.

È necessario un uso consapevole delle formule ed è possibile curare qualche approfondimento sul significato delle stesse.