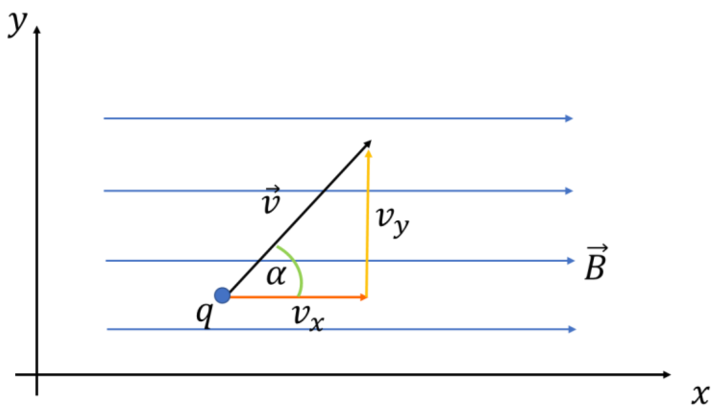
QUESITO 8

Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1,00\ mT$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38,1\ cm$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio r =10,5 cm e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

Soluzione



Supponiamo che il protone entri in un campo magnetico $\vec{B}$ con una velocità $\vec{v}$ e sia α l'angolo formato dalla direzione del campo magnetico $\vec{B}$ con la direzione della velocità $\vec{v}$.

Fissato un piano cartesiano Oxy, la velocità viene scomposta in due componenti, v_x parallela al campo magnetico $\vec{B}$ e v_y perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$:

$$\begin{cases} v_x = v\ cos\alpha \\ v_y = v\ sen\alpha \end{cases}$$

Mentre l'angolo α è ovviamente acuto in quanto lo spostamento Δx, essendo positivo, avviene nello stesso verso dell'asse x.

Il protone all'interno del campo magnetico ha due movimenti, di cui uno circolare uniforme dovuto alla componente v_y , e un altro rettilineo uniforme dovuto alla componente v_x .

La composizione dei due moti determina un moto elicoidale la cui traiettoria è un'elica cilindrica il cui passo è Δx .

La forza di Lorentz

$$\overrightarrow{F_L} = q\ \vec{v} \wedge \vec{B}$$

induce il protone a percorrere una traiettoria circolare di raggio r e periodo T , in quanto la forza magnetica funge da forza centripeta, pertanto partendo dal secondo principio della dinamica, possiamo scrivere:

$$\overrightarrow{F_L} = m\,\overrightarrow{a_c}$$

$$qv_yB = m\,\frac{\left(v_y\right)^2}{r} \quad \rightarrow \quad qB = m\frac{v\;sen\;\alpha}{r}$$

La componente v_x della velocità fa sì che il protone si muova parallelamente al campo magnetico di moto rettilineo uniforme, percorrendo una distanza Δx nel tempo pari al periodo di rotazione T , dove

$$T = \frac{2\pi r}{v_y} = \frac{2\pi r}{v\;sen\alpha}$$

Pertanto

$$v_x = \frac{\Delta x}{T} \quad \rightarrow \quad v\;cos\alpha = \frac{\Delta x\;v\;sen\alpha}{2\pi r} \quad \rightarrow \quad cos\alpha = \frac{\Delta x\;sen\alpha}{2\pi r}$$

Da cui segue

$$tg\alpha = \frac{2\pi r}{\Delta x} = \frac{6{,}28 \cdot 0{,}105}{0{,}381} = 1{,}73$$

e quindi

$$\alpha = 59^{\circ}\,59' \approx 60^{\circ}$$

Mettiamo a sistema quest'ultima relazione con la prima relazione fondamentale della goniometria:

$$\begin{cases} cos\alpha = \dfrac{\Delta x\;sen\alpha}{2\pi r} \\ sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad sen^2\alpha + \left(\frac{\Delta x\;sen\alpha}{2\pi r}\right)^2 = 1$$

$$sen\alpha = \frac{2\pi r}{\sqrt{(2\pi r)^2 + (\Delta x)^2}} = \frac{6{,}28\;\cdot 0{,}105}{\sqrt{(6{,}28 \cdot 0{,}105)^2 + (0{,}381)^2}} = \frac{0{,}6594}{0{,}7616} = 0{,}866$$

Ora sostituendo il valore di $sen\alpha$ ottenuto nella seguente relazione

$$sen\alpha = \frac{qBr}{mv}$$

Ricaviamo il valore della velocità

$$v = \frac{qBr}{m\ sen\alpha} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}105}{1{,}673 \cdot 10^{-27} \cdot 0{,}866} = 11610\,\frac{m}{s} = 1{,}16 \cdot 10^{4} m/s$$

COMMENTO

L'argomento proposto "il moto di una carica elettrica che entra in un campo magnetico" è un argomento che viene trattato nei libri di testo di Fisica, pertanto viene affrontato in classe nelle esercitazioni.