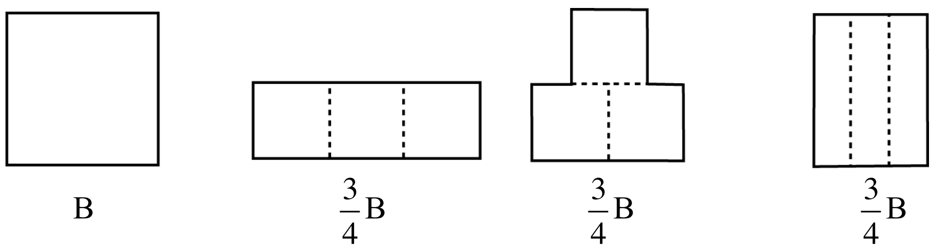
Le origini dell’Aritmetica moderna in Fibonacci. Quali indicazioni didattiche?

Franco Ghione

> *Tutti quelli (per quanto ho visto) che fin hora hanno dato regola al summar, sottrar & partir de rotti, la hanno data di sorte, che l’huomo presto la intende, & presto se la scorda, il che non procede da altro salvo che per ignorar la causa di tal sua regola, over di tal suo operare, volendo adunque rimediare a questo inconveniente, bisogna intendere il modo di ridurre duoi, over piu rotti de diverse denominationi, a una medesima denominatione, il qual atto è al contrario del schisare.*
> **Tartaglia**, General trattato. Prima Parte, Libro VII, c. 110v .

L’insegnamento del calcolo frazionario, che viene principalmente trattato nelle scuole secondarie di primo grado, presenta non poche difficoltà sia cognitive che didattiche legate ad una ancora acerba capacità di astrazione negli alunni di quelle scuole e a una difficoltà intrinseca di un argomento che resta spesso oscuro perfino negli studenti che si affacciano all’Università nelle facoltà scientifiche. Secondo Emma Castelnuovo[1] una delle difficoltà consiste nel fatto che già nella scrittura *m/n* vi sono tre cose da percepire contemporaneamente: l’intero, la parte *1/n* e la somma di *m* di quelle parti, concetti che, anche se presi singolarmente, sono tutt’altro che naturali. Una seconda difficoltà è legata alla relatività di una frazione che finisce per essere trattata riducendo il concetto di frazione a quello di operatore: tre quarti di un segmento, tre quarti di un quadrato, tre quarti di un cesto di 12 uova, ma cosa è 3/4 da solo, senza il segmento, il quadrato o il cesto? Lo stesso Euclide dice che una grandezza A è una frazione **di** B se A è formata da *m* parti ognuna uguale alla *n*-esima parte (aliquota) di B. La cosa è trattabile specificando con esempi concreti cosa sia B (un segmento, un quadrato, un cesto di uova) e come si possano costruire, ad esempio, i tre quarti di B. La cosa diventa problematica già nel caso delle aree, esistendo infiniti modi per dividere un’area B in quattro parti uguali e prenderne tre.



I diversi A che si ottengono hanno generalmente forme diverse ma tutte sono i tre quarti di B. In realtà ciò che si vuole esprimere non è la forma ottenuta ma la sua misura, quello che otteniamo è tre quarti della misura di B ed questo che esprime la frazione: non una forma ma un numero. E’ dunque il concetto astratto di numero da cui non si può prescindere; l’uno *matematico* come diceva Tartaglia, astratto, incorporeo, e non l’uno *naturale* come un quadrato, un centinaio, un cerchio, un cesto di uova. Ed è qui che già appare la prima difficoltà evidenziata dalla Castelnuovo: è impossibile concepire le frazioni senza una solida dimestichezza con il concetto astratto di numero intero, di uno. Le difficoltà aumentano quando si cerca di introdurre le operazioni aritmetiche con le frazioni che, per superare le naturali ostruzioni cognitive, vengono presentate come regole da imparare a memoria (*di sorte* dice Tartaglia) e da saper usare meccanicamente attraverso una lunga

[1] Emma Castelnuovo, L’insegnamento delle frazioni, da La scuola secondaria e i suoi problemi (1952)

e noiosa serie di esercizi che dovrebbero alla fine sviluppare una sicura competenza nel calcolo. Questa pratica per sua natura coercitiva, come avviene nello studio di uno strumento musicale, può produrre dei buoni risultati in quegli allievi dotati di caratteristiche sempre più rare nei nostri studenti: pazienza, volontà, autodisciplina, amore per lo studio, ambiente familiare favorevole. L'esercizio ripetitivo può produrre alla fine quel "pensiero morto" come diceva F. Enriques[2], che procede in automatico senza più bisogno di "pensiero vivo" che può quindi sovrapporsi a quello a un livello più alto. Nella maggioranza dei casi però, a prevalere, è invece un sempre più diffuso e progressivo analfabetismo scientifico che possiamo ben documentare negli esiti fallimentari delle prove di autovalutazione degli studenti che si iscrivono ai corsi di laurea scientifici. Ciò che uno impara a memoria senza un lungo e faticoso esercizio *presto se la scorda* e gli esiti didattici del lavoro dell'insegnante appaiono alla fine sconfortanti.

Una ulteriore difficoltà, riferibile al calcolo con le frazioni, è quella di giustificarne l'utilità: a cosa serve quella complicata teoria quando la divisione tra due interi si può calcolare con un numero arbitrario di cifre dopo la virgola ottenendo un valore approssimato quanto si vuole a quello esatto ma astratto, espresso dalla frazione? L'uso delle calcolatrici e dei computer spinge sempre più a ritenere il calcolo esatto un inutile strumento del passato e il sospetto è che esso possa, prima essere insegnato male per poi, alla fine, sparire dalla nostra cultura di base tornando a livelli pre-scientifici. E' soprattutto questo progressivo imbarbarimento che vediamo all'orizzonte che vorremmo contrastare. Perché le frazioni non sono sempre esistite, gli antichi Babilonesi ad esempio riuscivano a calcolare il risultato di una divisione in modo molto preciso usando il calcolo sessagesimale. Ad esempio 2 settimi equivale a 17 primi (un sessantesimo dell'unità), 8 secondi (un sessantesimo di un primo), 34 terzi (un sessantesimo di un secondo) e la scrittura

$$\frac{2}{7} = 17'\ 8''\ 34'''$$

produce un valore che è più piccolo del valore esatto della frazione di solo 1/756000. Le somme tra frazioni si potevano eseguire sommando numeri interi: i primi con i primi, i secondi con i secondi, i terzi con i terzi ecc facendo attenzione ai riporti. Gli antichi romani usavano solo frazioni con denominatore 12 e potenze o frazioni di 12 per lo più riferite a sottomultipli di unità di misura. Per loro i settimi non esistevano perché nessuna unità di misura era suddivisa in 7 parti e dunque il loro uso era nella pratica inutile. Il rischio, che non ci sembra fuori luogo, è quello di riportare, nella nostra cultura condivisa, l'aritmetica al livello di quella dei Babilonesi o, peggio ancora, degli antichi romani!
Le frazioni e il relativo calcolo nascono tra gli scienziati arabi del medioevo e vengono importate nel mondo cristiano col *Liber abaci* di Fibonacci nel 1202. A partire da allora e con quella nuova aritmetica, l'economia, l'arte, la cultura ebbe uno sviluppo senza precedenti che portò a quell'epoca magica che abbiamo chiamato Rinascimento. Il *Liber abaci* è un'opera monumentale in latino che introduce in Europa la scrittura posizionale dei numeri usando le nove "figure" indiane, nuovi algoritmi di calcolo, vari tipi frazioni con le loro regole di calcolo, moltissimi problemi legati al commercio in tutti i suoi aspetti, dal baratto, alle società commerciali, alla natura delle monete e anche tantissime questioni "erratiche" generalmente riconducibili a equazioni di primo grado, storielle spesso divertenti, altre volte surreali. L'ultima parte è dedicata all'algebra seguendo la lezione araba di al-Khwarizmi e Abu Kamil. L'opera fu editata da Baldassarre Boncompagni[3] nel 1857 trascrivendo a stampa il manoscritto Conv.Soppr. C.1.2616 custodito a Firenze presso la Biblioteca Nazionale Centrale. La traduzione completa del testo di Boncompagni in italiano è in corso di realizzazione e viene via via pubblicata sul sito https://www.progettofibonacci.it/ all'interno di un progetto generale che ha l'obiettivo di portare nella scuola pubblica italiana alcune delle idee oggi fondative espresse in quel testo, allora ai primi passi, in un'ottica di collaborazione

[2] Federigo Enriques, *L'insegnamento dinamico*,
[3] B. Boncompagni, *Liber abaci*,

tra insegnanti di latino, matematica, informatica, storia e storia dell'arte. Il progetto ideato un anno fa insieme a Laura Catastini, che lavora alla traduzione del *Liber*, è già presente in alcune realtà scolastiche attraverso una pratica, in parte riportata nel sito, che nell'approccio storico suscita grande interesse tra gli allievi.
La sfida, che vogliamo lanciare con questo lavoro, consiste in una nova proposta didattica fondata sull'antico insegnamento di Fibonacci, che ha come obiettivo quello di non trascurare il perché delle regole, ma al contrario, sviluppare il pensiero dimostrativo anche in aritmetica riscoprendo tutta la bellezza e l'eleganza che il calcolo con le frazioni possiede.

La teoria euclidea dei rapporti: logos, analogos, alogos.

Prima di poter parlare di come le frazioni e la nuova aritmetica che esse generano entrino a far parte della cultura occidentale, occorre vedere, se pure a grandi linee, la teoria euclidea dei rapporti alla quale le nuove idee si ancorano e ne forniscono un fondamento teorico.
Il termine *logos* utilizzato da Euclide per indicare un rapporto in senso matematico è lo stesso usato in filosofia per denotare una forma di ragionamento razionale. Se **A** e **B** sono due grandezze il rapporto **A** : **B** sembra essere visto come un movimento di pensiero, una qualche costruzione rigorosa, quantitativa che lega **A** a **B**, che permette di dedurre **B** da **A** o, viceversa, **A** da **B,** come una qualunque altra forma di ragionamento. Il rapporto 3:2 non è il numero 1,5, ma l'abbreviazione della seguente argomentazione: se tra **A** e **B** esiste tale rapporto, allora **A** è rispetto a **B** come 3 è rispetto a 2, cioè **B** è 2 volte la terza parte di **A** o **A** è tre volte la metà di **B**. In generale l'espressione

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = n : m$$

significa che **A** è formato sommando n volte la m-esima parte di **B** esattamente come il numero n che è formato sommando n volte la m-esima parte di m che vale 1. In questo caso Euclide dice che **B** è una *frazione* di **A.**

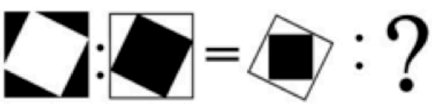
Il termine *analogos* (stesso rapporto) utilizzato da Euclide per indicare l'uguaglianza tra due rapporti assume il significato più generale di analogia e produce un metodo potentissimo per trasferire sul terreno solido dei numeri, situazioni apparentemente lontane. Non è solo nella matematica che l'analogia prende forma, essa si estende, come modo di pensiero, alle diverse forme del giudizio, da quello morale a quello estetico. Troviamo ad esempio negli scritti di Eraclito:

Di fronte al nume è infante l'uomo, come di fronte all'uomo il fanciullo.

Anche in tempi recenti, nei test che misurano il quoziente d'intelligenza troviamo spesso proposti dei rapporti che dovrebbero permettere ad un pensiero colto di determinare il termine assente, il "quarto proporzionale". Troviamo ad esempio il seguente quesito:

Il quadro sta al pittore come un vestito sta ...

L'esercizio consiste nel cercare un concetto abbia rispetto al vestito lo stesso rapporto che ha il pittore col quadro. E' sensato pensare che questo consista nel fatto che l'uno è l'artefice dell'altro e, in questo senso il sarto risolve il problema dal momento che è anch'egli l'artefice del vestito.
In quest'altro quesito di natura visiva



si chiede di trovare il modo con il quale la seconda figura a sinistra è ricavata dalla prima. Essa è ottenuta dalla prima attraverso un processo che scambia il bianco con il nero. La soluzione sarà allora un quadrato uguale a quello rappresentato nella terza figura dove la parte bianca è colorata di nero e la nera di bianco. Anche nel medioevo vi era un test di intelligenza molto diffuso: se 2 fosse 3 cosa sarebbe 10? L'analogia proposta 2 : 10 = 3 : ? il rapporto 2 :10 è analogo al rapporto 3 : ? nel senso che se 2 fosse come 3 cosa sarebbe 10 ? essendo 10 cinque volte 2, se 2 fosse 3, 10 sarebbe 5 volte 3 cioè 15. L'esercizio mentale porta il pensiero a scoprire il rapporto che è la chiave dell'analogia. Se 6 fosse 8 cosa sarebbe 3 ?

La teoria dei rapporti da un punto di vista didattico è stata sviluppata nel testo di Laura Catastini, contenuto nel volume *Quale scuola ?*[4] dove tale idea è al centro di un laboratorio di Musica e Matematica.

Come si vede, si tratta di un concetto, quello di rapporto, molto profondo che può essere pienamente concepito solo mettendosi alla prova in diverse situazioni eseguendo molti esercizi che assicurino all'allievo una sicura expertise che va sviluppata prima di introdurre astrattamente le frazioni. Vi sono, in ambito geometrico, due importanti problemi che lo studente dovrebbe essere in grado dominare con sicurezza. Il primo chiede di costruire un segmento **B,** incognito, conoscendo un segmento **A** e sapendo il rapporto tra i due segmenti. Ad esempio,

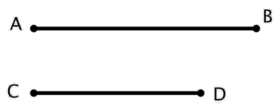
A : B = 3 : 4

Nel caso specifico

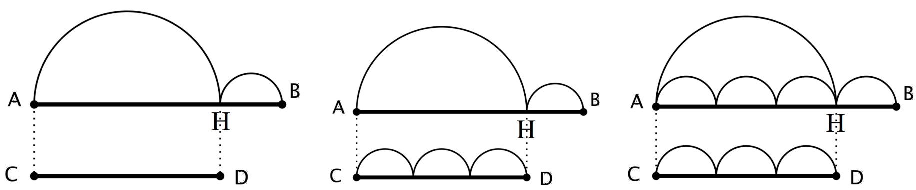
A è il segmento dato | dividiamo **A** in 3 parti uguali | **B** è formato da 4 di quelle parti

Esercizi di questo tipo sono molto formativi ed anzi sono necessari per capire come si costruisce uno strumento musicale (vedi il testo *Quale scuola* già citato).

Il secondo problema parte da due assegnate grandezze omogenee si chiede di trovare il loro rapporto. Il problema appare difficile, se non impossibile da risolvere se non fosse noto un metodo (quasi infallibile) inventato da Euclide noto come il *metodo delle divisioni successive*. Vediamo su un esempio come si possa trovare il rapporto tra due dati segmenti. Siano AB e CD i due segmenti noti



Prima di tutto si cerca quante volte CD (il segmento più piccolo) entra in AB. In generale CD non entrerà in AB un numero esatto di volte (col linguaggio di Euclide CD non sarà *parte* di AB) ma vi sarà un resto HB più piccolo di CD. A questo punto si vede quante volte HB entra in CD e si prosegue in questo modo trovando via via resti sempre più piccoli. Se il processo si ferma, cioè se il resto a un certo punto del processo si annulla allora tra i due segmenti esiste un rapporto. Nell'esempio preso in esame, il resto HB entra esattamente 3 volte in CD



AB : CD = 4 : 3

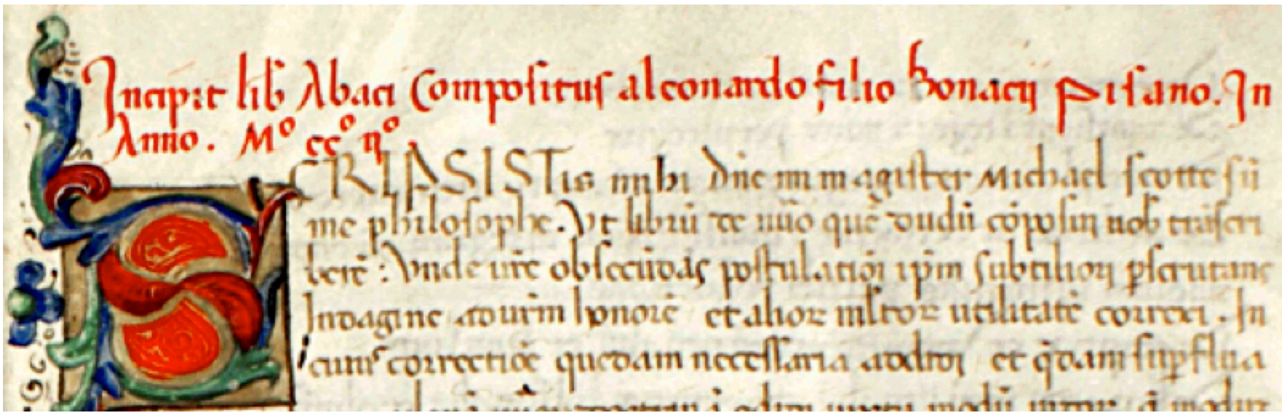
Poiché i resti ad ogni passaggio diventano sempre più piccoli è lecito pensare, e così pensavano i pitagorici, che a un certo punto i resti non potessero diventare più piccoli di una monade, di un atomo e dovessero quindi annullarsi. Ciò è drammaticamente falso poiché è possibile dimostrare che vi sono casi nei quali tale processo non ha termine e, in tali casi, Euclide chiama i due segmenti

4 L. Catastini, *Tra parole, matematica e musica* , da Quale scuola ?, Carocci editore, 2015

incommensurabili. (Euclide[5], Elementi, libro X, def. I). Non è difficile dimostrare che il lato di un pentagono regolare e la sua diagonale sono incommensurabili: l'irrazionale, cioè l'assenza di un rapporto (*alogos* = senza rapporto), fece per la prima volta capolino nel pensiero scientifico. Ma questa è un'altra storia.

La rivoluzione di Fibonacci: i numeri rotti

Nel *Liber abaci* (1202) Leonardo Pisano, detto Fibonacci, ripropone compiutamente in latino, e per la prima volta in occidente, l'aritmetica moderna elaborata tre secoli prima dagli arabi. Si tratta di una straordinaria rivoluzione che renderà possibile, in Italia e poi in tutto il mondo latino, commerci su grande scala, da oriente a occidente, alla base di una rinascita economica e culturale senza precedenti. La prima traduzione integrale del *Liber* è, come abbiamo detto, in corso di realizzazione all'interno di un progetto più ampio che si articola nel sito www.progettofibonacci.it, aperto alle scuole e a una possibile e auspicabile integrazione della lingua latina con la matematica.



Incipit Liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacii Pisano In anno M° CC° II°
dal manoscritto del Liber abaci CS C1. 2616, BNCF

Cambia prima di tutto il modo di scrivere i numeri interi, che prima erano legati al sistema numerico romano, mentre ora vengono introdotte "le 9 figure indiane" per indicare le cifre, lo zero, e il sistema posizionale decimale.

Le 9 figure indiane dal manoscritto del Liber abaci CS C1. 2616, BNCF

La scrittura posizionale permette di elaborare nuovi algoritmi di calcolo basati su procedimenti ricorsivi che è possibile realizzare per iscritto sulla carta che rendono trasparenti e universalmente condivisi e verificabili i risultati ottenuti. In secondo luogo vengono introdotti nuovi oggetti - i *numeri rotti* - ampliando drasticamente non solo le potenzialità e la precisione dei calcoli, ma anche il significato ontologico del concetto di numero ora sganciato da quello di rapporto ma profondamente legato agli algoritmi aritmetici che vengono estesi dal vecchio insieme, quello dei numeri interi, a quello nuovo, mantenendo invariate le proprietà formali delle operazioni (associativa, commutativa, distributiva).

Dopo aver trattato le operazioni con gli interi e i nuovi algoritmi di calcolo per lo più uguali agli attuali, Fibonacci, all'inizio del libro V del *Liber*, introduce una nuova notazione per indicare le frazioni, un nuovo modo di scrivere, tanto efficace da non essere modificato in nulla nei secoli ed

[5] Euclide, Elementi

essere ancora oggi presente in ogni cultura scientifica del pianeta. Ecco come si parla di frazione, in senso moderno, probabilmente per la prima volta, nel mondo latino:

Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato (*denominatus*) e quello superiore è chiamato denominante (*denominans*) Così se sopra al numero 2 sia stata tracciata una linea, e sopra di essa sia scritta l'unità, questa unità attesta una parte delle due parti dell'uno intero, cioè la metà così: $\frac{1}{2}$; e se l'unità fosse stata posta sopra al numero 3 così: $\frac{1}{3}$, denota la terza [parte]; e se sopra al numero 7 così: $\frac{1}{7}$ la settima; e se sopra al 10, la decima, e se sopra al 19, intende una diciannovesima parte dell'uno intero, e così di seguito. Ancora se 2 è stato messo sopra il 3 così $\frac{2}{3}$, intende due parti delle tre parti dell'uno intero, cioè due terzi. (**V.1.2**)

Come si vede l'accento è messo subito sul modo di scrivere questi nuovi numeri e sul loro significato. Il denominatore è il numero denominato, quello cioè che fissa il numero di parti uguali nelle quali è stata divisa l'unità, e il numeratore è quello denominante, cioè quello che denomina quante di quelle parti si debbano prendere, così 3 parti di 4, o 3 di 4, o $\frac{3}{4}$ è una espressione abbreviata per dire che si è "rotto" l'intero in 4 parti uguali e di queste parti se ne prendono tre.

In generale l'1 viene diviso in *n* parti uguali e ognuna di queste parti, oggi chiamata frazione unitaria, ha una sua specifica dignità, un suo essere, un suo nome, un suo valore, una sua carta d'identità e un suo particolare simbolo che la denota:

$$\frac{1}{n}.$$

Ovviamente

$$\frac{1}{1}=1$$

non per convenzione o per definizione ma per ragionamento perché rompere l'unità in una sola parte significa non romperla. E anche

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{m} \quad \text{se} \quad n>m$$

non perché è scritto su un libro di testo, ma per ragionamento perché se si divide 1 in più parti uguali aumentando il numero di parti si ottengono parti più piccole.

Inoltre se sommiamo *n* volte una di queste parti ricostruiamo l'intera unità

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=1$$

(n volte)

Poiché la moltiplicazione di un intero *n* per un numero *a* si intende la somma ripetuta *n* volte del numero *a*, la formula precedente viene scritta come moltiplicazione

$$n\times\frac{1}{n}=1$$

Se invece di *n* parti ne prendiamo *m* ($m < n$) abbiamo un numero che Fibonacci chiama, con una espressione molto significativa, rotto (*ruptus*), numero che oggi chiamiamo, con un termine tecnico, frazione propria. In generale una frazione $\frac{m}{n}$ sarà, per Fibonacci, il numero che si ottiene dividendo l'unità in *n* parti uguali e sommando *m* di quelle parti:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=m\times\frac{1}{n}$$
(m volte)

Se $m > n$ eseguendo la divisione con resto di m per n otteniamo:

$$m = q\times n + r \quad (0 \leq r < n)$$

poiché, sommando n ennesimi si ottiene una unità, sommando q volte n ennesimi si ottengono q unità e dunque

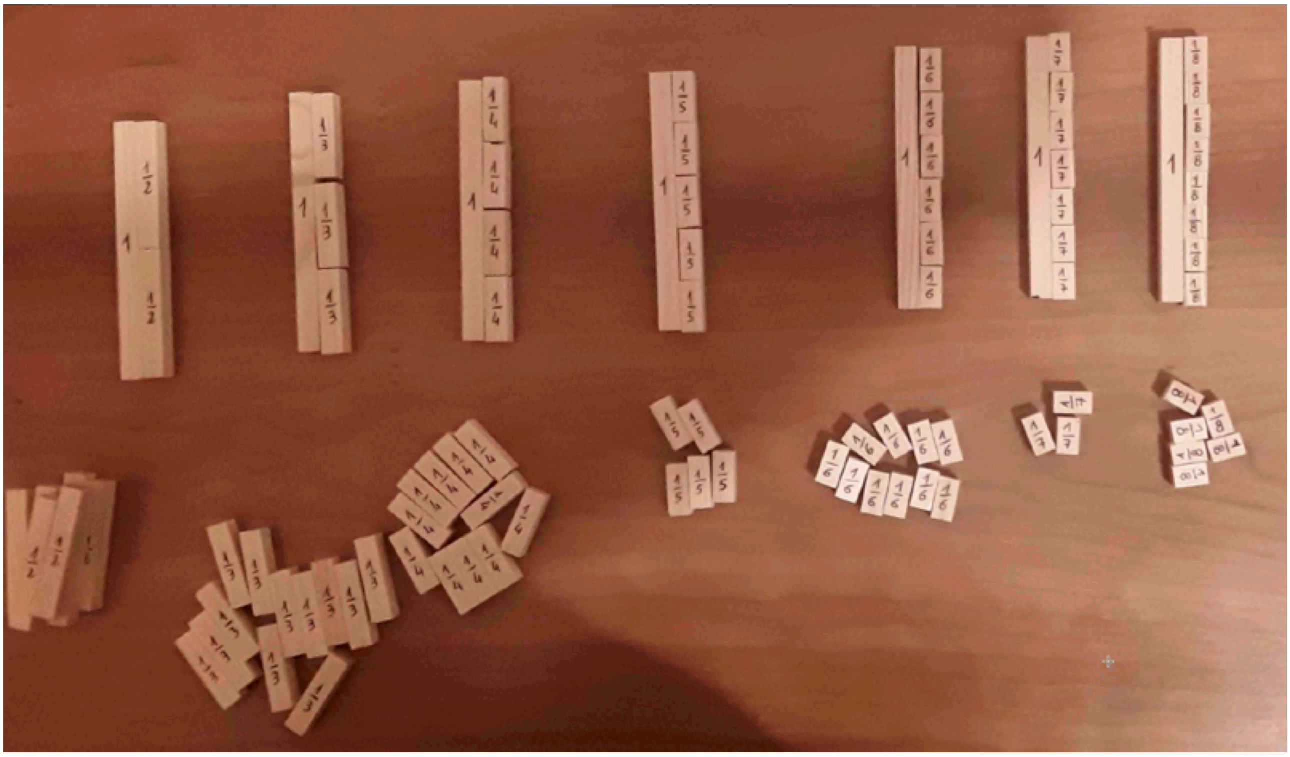
$$\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$$

dove la frazione rimasta, essendo minore di 1, e rappresenta un numero rotto.
Tale scrittura da luogo a ciò che viene chiamato *numero misto* perché è formato da un intero e da un rotto e viene normalmente indicato con $q\,\frac{r}{n}$ sottointendendo il "più" e, per evitare confusione con il "per", pure generalmente sottointeso, il rotto viene scritto più piccolo. Questa è la stessa notazione che troviamo in Fibonacci, scritta alla araba, da destra a sinistra: $\frac{r}{n}\,q$.

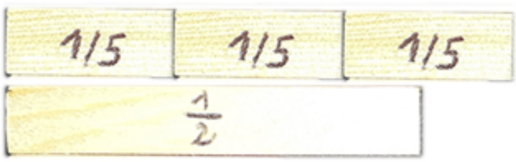
$1\frac{5}{8}$ esprime meglio di $\frac{13}{8}$ la distanza espressa dalla frazione

Pensiamo che la scrittura di una frazione nella forma mista attribuisca alla frazione una maggiore concretezza esplicitando la sua parte intera, che è quella che esprime il valore della frazione a meno di un numero minore di 1, a meno di un rotto, semplificando notevolmente il posizionamento delle frazioni sulla retta numerica. Non è un caso che nei paesi anglosassoni, più pragmatici i noi, la scrittura mista introdotta da Fibonacci continui a essere usata ed insegnata nelle scuole. I numeri misti formano un nuovo insieme numerico: l'insieme dei numeri razionali positivi oggi denotato generalmente col simbolo $\mathbf{Q}^+$. In questo insieme, che contiene come casi particolari tutti i numeri interi (quando r=0), è possibile, come vedremo, trovare degli algoritmi per calcolare la somma e il prodotto di due qualsiasi numeri misti che, nel caso particolare i numeri siano interi, riproduce gli stessi risultati che si otterrebbero con i vecchi procedimenti. Tali algoritmi si ottengono mantengono invariate le proprietà aritmetiche di base, cioè la proprietà associativa, commutativa della somma e del prodotto e la proprietà distributiva, proprietà che permettono di ridurre l'aritmetica dei numeri misti a quella dei numeri rotti.

Per dare concretezza ai numeri rotti abbiamo pensato di rappresentare il *numero* 1 con un'asta unità e di dividere questo "uno" in 2,3,4 ... parti uguali ottenendo le aste $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},$ ... ognuna delle quali con un preciso denominatore che le attribuisce la propria identità e grandezza. La professoressa Silvia Cerasaro ha realizzato questo materiale didattico che utilizza nella sua sperimentazione in classe e che ringrazio per avermi consentito di presentarlo in questo articolo.

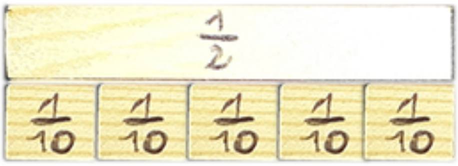


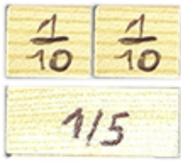
Una frazione sarà dunque una fila di aste dello stesso denominatore e la grandezza che tale frazione esprime è la lunghezza della fila. In questo senso la frazione *m/n* è maggiore della frazione *p/q* se la fila formata da *m* aste di denominatore *n* è più lunga della fila formata da *p* di aste di denominatore *q*.



3/5 è maggiore di 1/2 perché la rispettiva fila è più lunga

Ecco che nasce spontaneo un problema: come sapere se un rotto è maggiore di un altro senza formare le rispettive file per vedere quella più lunga? O ancora se 3/5 è maggiore di 1/2 come calcolare la loro differenza? Ciò che ci aiuta in questo e in molti altri problemi, è che, con i rotti, accade un fatto straordinario: vi sono infiniti modi di realizzare la stessa frazione! Vi sono infiniti modi di realizzare una fila di aste senza modificarne la lunghezza, senza cioè modificarle il valore.



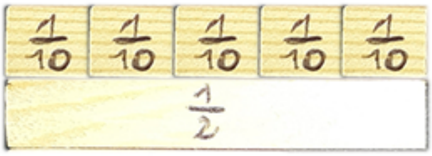


1/2 = 5/10 ma anche 1/5 = 2/10

Infatti se dividiamo l'ennesima parte di 1, cioè $1/n$, in ulteriori q parti uguali, otteniamo in tutto $n\times q$ parti dell'uno e q di queste parti faranno $1/n$. Questo pensiero si può esprimere con il linguaggio compatto ma efficacissimo della matematica nel modo seguente:

$$\frac{q}{n\times q}=\frac{1}{n}$$

Possiamo allora trasformare in decimi sia i mezzi che i quinti: 1/2 = 5/10 e 3/5= 6/10 e 6 decimi sono di più di 5 decimi.



In più la differenza fra questi rotti è 1/10. L'immagine e la manipolazione con le mani delle aste frazionarie non da solo concretezza a questa nuova tipologia di numeri ma ne fissa nella memoria gli aspetti essenziali: composizione, decomposizione, assembramento e confronto.
In generale dati due rotti con denominatori diversi è sempre possibile, e in più modi, esprimere le due frazioni con un unico denominatore. I terzi e i quarti, ad esempio, possono essere ridotti a dodicesimi perché 1/3 = 4/12 e 1/4 = 3/12, ed è facile intuire la regola generale: i due rotti $1/n$ e $1/q$ si possono sempre ridurre allo stesso denominatore $n\times q$

$$\frac{1}{n}=\frac{q}{n\times q} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q}=\frac{n}{n\times q}$$

Non è questo l'unico modo per ridurre due rotti allo stesso denominatore, basta infatti trovare un multiplo sia di n che di q e ridurre le due frazioni a questo denominatore, infatti se s è un multiplo di n (cioè se $s = n\times n'$) ed è anche un multiplo di q (cioè $s=q\times q'$) allora

$$\frac{1}{n}=\frac{n'}{n\times n'}=\frac{n'}{s} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q}=\frac{q'}{q\times q'}=\frac{q'}{s}$$

Ovviamente se prendiamo il più piccolo multiplo comune cioè il m.c.m. di n e q facciamo meno fatica perché le moltiplicazioni che dobbiamo eseguire coinvolgono numeri più piccoli. Ma la scelta è libera! Come abbiamo fatto la differenza tra due rotti così possiamo fare la somma e gli studenti intuiscono facilmente il modo. Non una formula che risolve il problema tutto in una volta ma un procedimento fatto di due passi: prima riduciamo le due frazioni allo stesso denominatore, nel modo che più ci piace e poi sommiamo i numeratori. I due passi debbono essere, per lo meno all'inizio, esplicitati. Tornando all'esempio precedente

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\frac{11}{10}=1\,\frac{1}{10}$$

Fibonacci consiglia di studiare una tavola con la somma di tutte le possibili coppie di rotti che è possibile fare con numeri formati da una sola "figura" cioè minori di 10. Potrebbe essere una buona pratica dividere questo compito tra più studenti con l'obiettivo di realizzare un grande manifesto da appendere in aula nel quale tutte le possibili somme sono riportate. Tutte le possibili somme sono moltissime ma ogni studente potrebbe farne una cinquantina a casa per poi riunire tutto in una grande tabella. L'esercizio ripetitivo è indispensabile per impadronirsi con sicurezza di un metodo di calcolo e la somma di frazioni è l'operazione dove generalmente si sbaglia più di frequente. Il progetto di realizzare questo tabellone potrebbe essere per gli studenti uno stimolo per impegnarsi in un lungo lavoro noioso e ripetitivo.

La somma e la differenza tra numeri misti viene ora da sé: basterà sommare i rotti e le parti intere e poi mettere tutto insieme

$$3\tfrac{3}{4} + 11\tfrac{3}{5} = 14 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = 14 + \frac{15}{20} + \frac{12}{20} = 14 + \frac{27}{20} = 14 + 1\tfrac{7}{20} = 15\tfrac{7}{20}$$

Un esercizio di questo tipo, che richiede diversi passaggi da eseguire ordinatamente, e che alla fine produce il risultato di una somma, ci sembra più formativo di lunghe e inespressive espressioni. Una ulteriore osservazione didatticamente utile è che non esiste un solo modo per eseguire la somma: si potrebbe infatti ridurre i due numeri a frazioni e poi sommare queste:

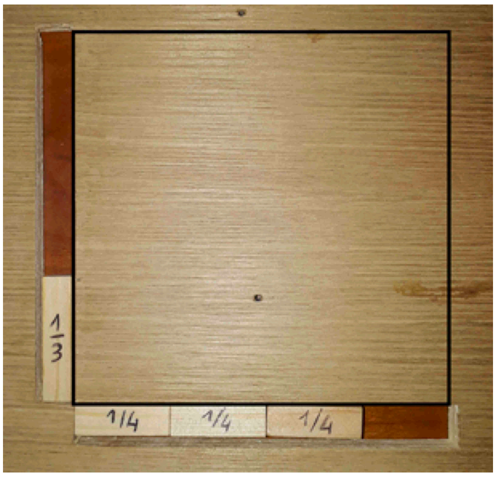
$$3\tfrac{3}{4} + 11\tfrac{3}{5} = \frac{15}{4} + \frac{58}{5} = \frac{75}{20} + \frac{232}{20} = \frac{307}{20} = 15\tfrac{7}{20}$$

La somma tra frazioni, più di una regola da usare meccanicamente, diventa un procedimento all'interno del quale vi sono libere scelte da fare. Man mano che questo procedimento si sia impresso nella memoria con l'esercizio e la manipolazione iniziale di materiale concreto, esso potrà diventare pensiero morto sul quale sarà possibile costruire un nuovo pensiero più complesso, come avviene quando, dopo aver imparato ad usare la bicicletta, il nostro pensiero non più bisognoso di concentrarsi su come non cadere o voltare o frenare ma, pedalando senza accorgersene, potrà rivolgersi ad ogni altro interesse.

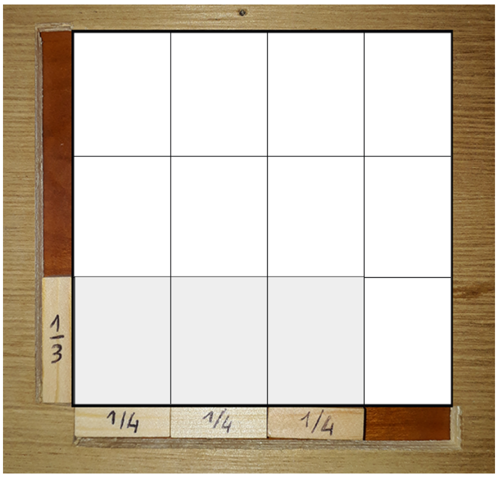
I nuovi significati di moltiplicare e dividere

Maravigliati del atto di multiplicar di rotti, perche in quello sempre si vede riuscire al contrario di quello che dinota tal vocabulo, qual non dinota altro che crescere, overo augumentare, & nel detto multiplicare de rotti sempre seguita (come è detto) tutto al contrario, cioe che il produtto è sempre menore di qual si voglia di duoi precedenti...
Tartaglia, General trattato (Parte Prima, Libro VII, c. 119)

La moltiplicazione di due rotti perde il significato di somma ripetuta: che significato ha sommare mezza volta un numero? O sommare una volta e due terzi una quantità data? Un modo non formale per capire come si debba introdurre il prodotto tra numeri rotti può essere quello di servirsi della geometria. Introducendo una unità di misura U per i segmenti, possiamo associare a biunivocamente a un segmento un numero (la sua misura) e a un numero un segmento. In questo modo la somma tra numeri diventa la congiunzione in linea retta dei corrispondenti segmenti e la moltiplicazione l'area del rettangolo che ha come lati i segmenti corrispondenti ai due numeri. Tale area è calcolata usando come unità di misura per le aree il quadrato di lato U. Possiamo usare la stessa idea per trovare il prodotto di due numeri rotti: costruiamo un rettangolo R i cui lati siano due segmenti le cui misure rispetto ad U siamo i due rotti da moltiplicare, calcoliamo poi il rapporto tra tale area e quella del quadrato di lato U, tale rapporto essendo la misura dell'area del rettangolo R, dovrà corrispondere al prodotto dei due numeri. Per fare questa costruzione ci avvaliamo di un nuovo semplice strumento materiale realizzato dalla professoressa Silvia Cerasaro da utilizzare insieme alle aste che abbiamo utilizzato per introdurre le frazioni. Si tratta di un quadrato di lato uguale all'asta di lunghezza 1 disegnato su una tavola di legno e di due incavi sui due lati del quadrato che possano contenere le aste frazionarie in modo che, una volta posizionate, si trovino allo stesso livello della tavola.



Posizionando un foglio bianco sulla tavola di legno possiamo disegnare con una squadra dei segmenti capaci di suddividere il quadrato unitario in parti uguali utili per calcolare l'area che cerchiamo



In questo esempio il quadrato è diviso in 12 rettangoli uguali e l'area, in grigio, che vogliamo calcolare è formata da 3 di tali rettangoli: in definitiva

$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

La semplificazione finale non ci stupisce per il fatto che il quadrato è formato anche con 4 terne di rettangoli uguali: tre orizzontali e una verticale sulla destra e dunque l'area è 1/4 di tutto il quadrato. Stupisce invece che il risultato del prodotto è più piccolo dei due fattori che si moltiplicano:

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3} \quad \text{e anche} \quad \frac{1}{4}<\frac{3}{4}$$

Facendo varie esperienze con questo strumento gli studenti possono scoprire, gradualmente, le seguenti proprietà sul prodotto tra rotti che noi possiamo scrivere formalmente come

$$\frac{1}{n}\times\frac{1}{q}=\frac{1}{n\times q} \;,$$

$$\frac{m}{n}\times\frac{1}{q}=\left(m\times\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{q}=m\times\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{q}\right)=m\times\frac{1}{n\times q}=\frac{m}{n\times q}$$

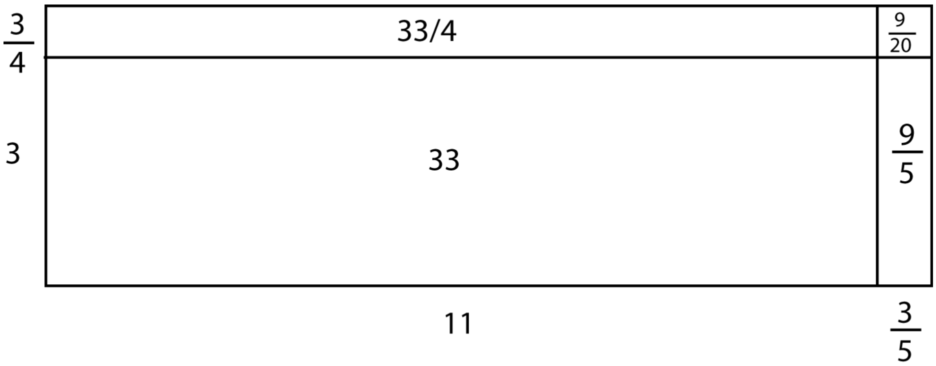
$$\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}=\left(m\times\frac{1}{n}\right)\times\left(p\times\frac{1}{q}\right)=\left(m\times p\right)\times\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{q}\right)=(m\times p)\times\frac{1}{n\times q}=\frac{m\times p}{n\times q}$$

La regola finale, se scoperta, dagli studenti stessi più facilmente si imprimerà stabilmente nella loro memoria.
Come per la somma, il prodotto di due numeri misti si può fare in due modi: distribuendo i fattori o trasformando i numeri misti in frazioni e utilizzando poi la regola generale.
Il primo modo, che è certamente più lungo, permette però di anticipare delle procedure tipiche dell'algebra come il prodotto di binomi o il quadrato di un binomio, abituando gli allievi all'uso della proprietà distributiva che permette di dividere un problema complicato in tanti piccoli problemi più semplici:

$$3\tfrac{3}{4}\ \times 11\tfrac{3}{5}=\ \left(3+\frac{3}{4}\right)\times\left(11+\frac{3}{5}\right)=3\times11+3\times\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\times11+\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=33+\frac{9}{5}+\frac{33}{4}+\frac{9}{20}=$$

$$=\ 33+1+\frac{4}{5}+8+\frac{1}{4}+\frac{9}{20}=42+\frac{16}{20}+\frac{5}{20}+\frac{9}{20}=42+\frac{30}{20}=43\ \tfrac{1}{2}$$

Anche in questo caso un modello geometrico aiuta a passare dal registro del calcolo a quello dell'immagine sicuramente molto formativo



La figura evidenzia i 4 rettangoli nei quali è decomposto il rettangolo iniziale del quale si deve calcolare l'area: le aree dei 4 rettangoli si calcolano immediatamente con calcoli semplici così il problema iniziale è diviso in 4 moltiplicazioni più semplici che vanno poi sommate.

Il secondo modo per eseguire il prodotto tra due numeri misti, come abbiamo detto, consiste ne trasformare i numeri in frazioni e usando poi la regola generale: Vi saranno meno calcoli da fare ma con numeri più grandi:

$$3\tfrac{3}{4}\ \times 11\tfrac{3}{5}\ =\ \frac{15}{4}\times\frac{58}{5}=\frac{15\times58}{20}=\frac{870}{20}=42\ \tfrac{1}{2}$$

Ovviamente vi sono scorciatoie, calcoli che si possono evitare, *evitazioni* dirà Fibonacci, che gli studenti si possono divertire a trovare, magari in forma di gara premiando chi le trova prima.

Ora che sappiamo come moltiplicare due frazioni, ci chiediamo che significato concreto, indipendente dall'interpretazione geometrica, abbia il moltiplicare due tali numeri? Intanto il prodotto di un intero *m* per un numero rotto o misto *a* si interpreta ancora come la somma ripetuta *m* volte

$$m \times a = a + a + \ldots + a$$
(m volte)

Mentre $\frac{1}{n} \times a$ si interpreta come la *ennesima parte **di** a*. Questo osservazione deriva dal fatto che, quando $a = \frac{p}{q}$ allora $\frac{1}{n} \times \frac{p}{q}$ è, come abbiamo visto, la ennesima parte di $\frac{p}{q}$ e, più in generale, $\frac{m}{n} \times a = \left(m \times \frac{1}{n}\right) \times a = m \times \left(\frac{1}{n} \times a\right)$ si interpreta come *m volte la ennesima parte **di** a*. Il risultato mischia in maniera imprevista il moltiplicare e il dividere:

moltiplicare un numero per $\frac{1}{n}$ *significa dividere quel numero per n!*

Vediamo ora più da vicino l'operazione di divisione: se abbiamo due interi *m* ed *n* possiamo eseguire la divisione con resto di *m* per *n* e scoprire quante volte *n* entra dento *m* e cosa resta, il massimo numero di volte è il quoziente *q* della divisione e usando i numeri rotti possiamo scrivere il risultato della divisione *m/n* come

$$\frac{m}{n} = q\ {}^{r}_{n}$$

questo è il valore ESATTO di ciò che si ottiene dividendo *m* in *n* parti uguali nel senso che

$$n \times (q\ {}^{r}_{n}) = m$$

ciò significa che se ripetiamo *n* volte la stessa quantità $q\ {}^{r}_{n}$ otteniamo esattamente il numero che volevamo dividere, esattamente cioè senza resti. Questo stesso significato è quello che serve a Fibonacci per dividere due numeri qualsiasi anche se non sono interi. Dividere un numero *a* per un numero *b* non nullo significa trovare un numero *x* tale che:

$$b \times x = a$$

il risultato *x* della divisione si indica ancora, per uniformità col caso in cui i numeri sono interi, col segno di frazione

$$x = \frac{a}{b}$$

Fibonacci recupera consapevolmente il significato formale dell'operazione di divisione come l'operazione inversa alla moltiplicazione:

Ed è da notare in verità che quando un numero è diviso per un altro numero, allora dalla moltiplicazione del divisore per il risultato ne viene il numero diviso. Per esempio se si divide 40 per 4, risulta 10. Per cui se moltiplichiamo 4 per 10, si ha quaranta, vale a dire il numero diviso. **(V.9)**

ma ora questa divisione è possibile anche nel nuovo insieme numerico e Fibonacci sente l'esigenza di introdurre dei nomi per gli oggetti in questione

E sia da notare che il numero che è diviso si chiama diviso o dividendo *(divisus vel dividendus),* e il numero che divide si chiama divident e o divisore *(dividens vel divisor)* e il numero che risulta dalla divisione si chiama procedente o uscente *(procedens vel exiens).* **(V.10)**

Ma come si calcola questo numero *uscente* se *a* e *b* non sono interi?
L'operazione è trattata da Fibonacci nel capitolo VII del *Liber abaci* con grande attenzione didattica partendo da esempi semplici che diventano via via più complessi. E' interessante notare che

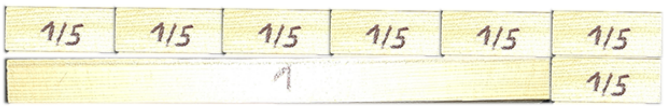
Fibonacci non propone di seguire la via più semplice che consiste nell'applicare meccanicamente una formula generale ma si propone di motivare il procedimento facendo riferimento alla natura dei numeri che si vogliono dividere e al significato della divisione. Ogni numero, intero rotto o misto, si può pensare come una somma di tante *minuzie tra loro simiglianti*, come dirà Tartaglia, cioè di tante frazioni unitarie con lo stesso denominatore, come abbiamo fatto per sommare o sottrarre due numeri. Il risultato della divisione si ottiene, come è intuitivo capire, dividendo tra loro questi numeratori.

Supponiamo ad esempio di voler dividere 2 con $1\frac{1}{5}$, dobbiamo trovare quindi un numero x tale che

$$(1\frac{1}{5}) \times x = 2$$

Rappresentiamo i due numeri con le nostre aste:

Poiché nei due numeri compare il denominatore 5, scriviamo i due numeri come somma di quinti



basterà ora dividere $\frac{10}{5}$ con $\frac{6}{5}$ e questo farà tanto quanto dividere 10 con 6. Il risultato è $1\frac{4}{6}$ cioè, semplificando il rotto, $1\frac{2}{3}$.

$$\frac{2}{1+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{10}{6} = 1 + \frac{4}{6} = 1\frac{2}{3}$$

Per verificare se il risultato è corretto basta vedere se $1\frac{1}{5} \times 1\frac{2}{3}$ fa 2. Eseguendo la moltiplicazione troviamo effettivamente $\frac{6}{5} \times \frac{5}{3} = 2$. Ma ora il significato della divisione è quello originario cioè abbiamo diviso, con resto, invece che 10 interi per 6 interi, 10 quinti con 6 quinti.

Fibonacci fa questo esempio:

(VII.3.2) Se vorrai dividere 83 per $\frac{2}{3}5$, fai i terzi di ciascun numero in questo modo: moltiplicherai 5 per il tre che è sotto la linea, e somma 2, farà 17 terzi: e moltiplica 83 per 3 per farne i terzi da esso, farà 249 terzi: dividi quindi 249 per 17, farà $\frac{11}{17}14$ per la divisione richiesta.

Ma poi giustifica il suo calcolo citando la teoria delle proporzioni di Euclide

Da ciò quindi è manifesto che la divisione di 83 per $\frac{2}{3}\,5$ è uguale a quella di 249 per 17; e questo è per ciò che dichiara Euclide, peritissimo geometra, nel suo libro: cioè che la proporzione che un qualunque numero ha con un qualunque numero è la stessa che c'è tra i loro multipli; e come 17 è multiplo di $\frac{2}{3}\,5$, tanto 249 lo è di 83: infatti 17 è il triplo di $\frac{2}{3}\,5$, e 249 è il triplo di 83.

Ritorna la regola fondamentale delle frazioni anche nel contesto dei nuovi numeri rotti o misti, e cioè: *se si moltiplica numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero, la frazione non cambia*:

$$\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$$

Molto importante è capire il significato della la divisione di un numero con un una frazione unitaria. Ad esempio: quante volte 1/3 entra in 3/4? e quanto resta? Se usiamo il nostro materiale ci accorgiamo che 1/3 entra 2 volte con un certo resto minore di 1/3.

per valutare il resto possiamo eseguire la sottrazione passando a dodicesimi

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 4}$$

In generale, proprio come nel caso dei numeri interi, dato un qualsiasi rotto $a = m/n$ e una frazione unitaria $1/q$ possiamo calcolare il massimo numero s di q-esimi contenuti in a e il resto t minore di $1/q$. In termini più precisi, esiste un **intero** s, eventualmente nullo, e un resto t tale che

$$\frac{m}{n} = s \times \frac{1}{q} + t \quad \text{con} \quad 0 \leq t < \frac{1}{q}$$

per calcolare i due numeri s ed t possiamo sempre usare l'algoritmo delle differenze successive e cioè sottrarre $1/q$ da a fino a quando il resto è maggiore di $1/q$, e contare il numero s di volte per il quale questo è possibile, come abbiamo fatto con le nostre aste, ma possiamo anche eseguire direttamente la divisione

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{q}} = \frac{m \times q}{n} = s + \frac{r}{n} \quad \text{con} \quad 0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{n} \quad \text{e} \quad 0 \leq s < q$$

e quindi

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} \times \left(s + \frac{r}{n} \right) = \frac{s}{q} + \frac{r}{q \times n}$$

questa relazione ci dice che il la frazione m/n è formata da s q-esimi e un resto t minore di $1/q$. Vediamo ad esempio quanti decimi sono contenuti in 2/7. Per fare questo senza usare le aste dividiamo 2/7 per 1/10 il che ci porta a dividere 20 per 7: otteniamo 2 con un resto di 6/7 dunque

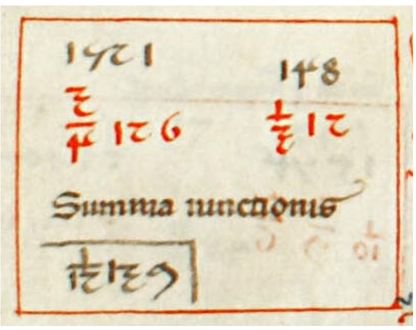
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{10}\times\left(2+\frac{6}{7}\right)=\frac{2}{10}+\frac{6}{10\times 7}.$$

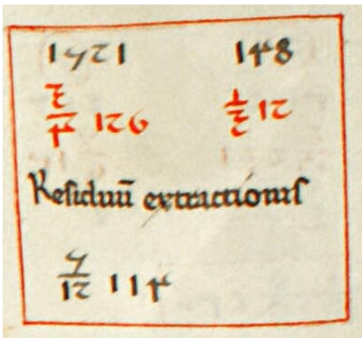
Trovare il numero di decimi contenuti nella frazione 2/7 significa trovare la sua prima cifra decimale, e iterando il procedimento, cioè trovando il numero di decimi contenuti nella frazione 6/7, troviamo la seconda cifra decimale della frazione 2/7, cioè il numero di centesimi nel suo sviluppo decimale:

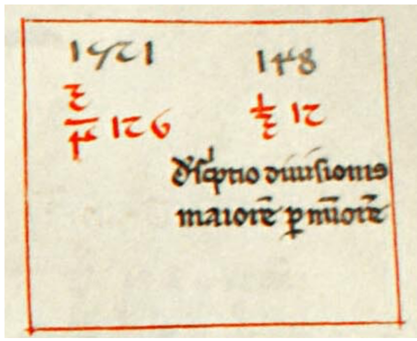
$$\frac{6}{7}=\frac{1}{10}\times\left(8+\frac{4}{7}\right)=\frac{8}{10}+\frac{4}{10\times 7}\quad \text{e quindi}\quad \frac{2}{7}=\frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{4}{100\times 7}\quad \text{cioè}\quad \frac{2}{7}=0,28\ldots\quad .$$

Fibonacci ha una notazione efficacissima per indicare questo tipo di decomposizioni frazionarie che lui chiama frazione multipla graduata e sviluppa una aritmetica completa per eseguire i calcoli con tali frazioni generalizzate che potrebbe essere oggetto di un approfondimento nell'ultimo anno delle suole di primo grado o nel primo anno di quelle di secondo grado.

In definitiva le operazioni di somma, differenza e divisione tra i nuovi numeri introdotti da Fibonacci, si riducono alle analoghe operazioni tra numeri interi (i numeratori) riducendo i due numeri sui quali si opera a delle frazioni con lo stesso denominatore e trasferendo le rispettive operazioni ai numeratori. Facciamo tre esempi attingendo dal manoscritto del *Liber abaci* più sopra citato


summa iunctionis


residuum extractionis


descriptio divisionis maiorem per minorem

Nel primo riquadro si esegue la somma 126 ¾ + 12 ⅓ = (1521+148)/12 = 1669/12 = 139 1/12, nel secondo riquadro la sottrazione degli stessi numeri 126 ¾ - 12 ⅓ = (1521-148)/12 = 1373/12 = 114 5/12 mentre nella terza tabella si annuncia la divisione del numero maggiore per il minore che non viene eseguita e che eseguiamo noi per completezza:

$$\frac{126+\frac{3}{4}}{12+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1521}{12}}{\frac{148}{12}}=\frac{1521}{148}=10\ \frac{41}{148}$$

Viva le frazioni

A ciò che nisuno sia ingannato

Per capire la rivoluzione che il calcolo con le frazioni ha prodotto nel mondo latino, nella sua economia e organizzazione civile, con l'uscita del *Liber abaci* proviamo a metterci nei panni di un mercante pisano del ‘200. A quell’epoca i commerci erano per la maggior parte basati sul baratto: si scambiava una merce di un certo tipo con un’altra il cui valore in denari era noto ai due mercanti e generalmente condiviso. Il capitolo IX del *Liber abaci* contiene una intera sezione dedicata alla pratica del baratto. Leggiamo un problema nel quale due mercanti vogliono barattare del cotone misurato in rotuli (un rotulo è una unità di peso uguale a circa mezzo chilo) con del panno misurato a braccia (1 braccio è poco più di mezzo metro). Queste misure erano molto precise e garantite da concrete unità di misura (recipienti per i liquidi, aste o canne per le lunghezze, bilance per i pesi ecc) custoditi da notai e dai consoli della mercatura. L’inconveniente, non da poco, era che ogni amministrazione aveva le sue unità di misura e le sue monete. Ma, nel nostro problema i due mercanti sono entrambi pisani e quindi con le stesse monete e le stesse unità di misura.

Il mercante di tessuti vuole barattare 50 braccia di panno con del cotone e la quantificazione matematica si rende necessaria per evitare inganni o furberie e garantire giustizia, come dice Piero della Francesca nel suo trattato d’abaco[6], *a ciò che niuno sia ingannato*. Per raggiungere questo obiettivo occorre sapere il prezzo sul mercato del cotone e del panno.

(IX.1.2) 20 braccia di panno valgano 3 lire di pisanini; e 42 rotuli di cotone valgano 5 lire similmente di pisanini

Fibonacci indica un modo grafico, visivo, per sintetizzare i dati del problema che sarà lo stesso in tutti i problemi di baratto analoghi:

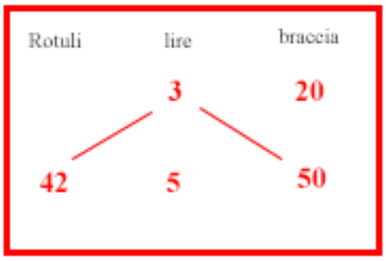
Poni le 20 braccia sulla tavola e alla loro sinistra scrivi le 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto poni le 5 lire; a sinistra di queste poni i 42 rotuli

Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	

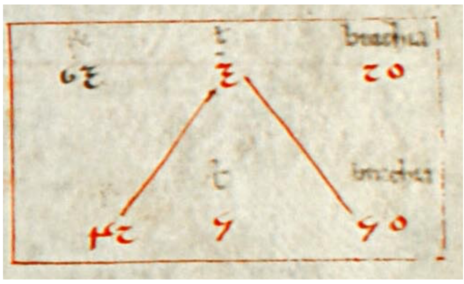
Poiché il valore di una merce è proporzionale alla sua quantità, un braccio di panno vale lire $\frac{3}{20}$ e quindi 50 braccia di panno valgono lire $\frac{3 \times 50}{20} = 7\,\frac{1}{2}$.

6 Piero della Francesca,

Inoltre, con una lira si comprano rotuli $\frac{42}{5} = 8\,\frac{2}{5}$. Il baratto è onesto se le merci che vengono barattate hanno lo stesso valore cioè se in cambio di 50 braccia di panno (che valgono 7 lire e mezzo) si ricevono $8\,\frac{2}{5} \times 7\,\frac{1}{2} = \frac{42}{5} \times \frac{3 \times 50}{20} = 63$ rotuli di cotone.
Fibonacci indica ora non solo un metodo grafico per scrivere i dati del problema, ma anche un modo semplice per memorizzare il tipo di calcolo da fare per risolvere il problema:



Se si vogliono scambiare 50 braccia di panno si scrive 50 sotto il 20 nella colonna del panno e si tracciano le righe diagonali. La giusta quantità di cotone, che corrisponde a 50 braccia di panno, si ottiene moltiplicando i numeri uniti dalle diagonali cioè 50×3×42 = 6300 e dividendo il risultato per gli altri numeri cioè 20×5 = 100. Il risultato è 63 rotuli.
Ecco come nel citato manoscritto è riportata la tavola:



La tavola non solo rappresenta un modo visivo per registrare i dati del problema ma fornisce anche, attraverso le due diagonali, la regola, il metodo da seguire per risolvere il problema in ogni caso analogo, regola che era stata dimostrata nel primo esempio preso inconsiderazione. L'uso di queste tavole, da riempire nel modo detto con i numeri che intervengono nello specifico problema, e la pratica del calcolo con i rotti, consentiva al mercante di muoversi con rapidità contribuendo a sviluppare un nuovo modello economico basato su regole condivise che trovano nella matematica un semplice criterio di equità e giustizia al di sopra delle opinioni.

Insieme al commercio su grande scala e proprio per renderlo possibile nascono anche le prime società di consoci, le prime banche, le società di assicurazioni impensabili senza una matematica in grado di registrare per iscritto e governare un immenso movimento di merci e di numeri sani o rotti in tutto il mediterraneo. Un intero capitolo del *Liber abaci*, il capitolo X, riguarda come si debbano distribuire gli utili ottenuti da una cooperativa di soci. Prendiamo un problema di questo tipo anticipato nel terzo paragrafo del capitolo VIII.

(VIII.3.19) Poniamo il caso di qualcuno, che abbia avuto un capitale di 152 lire, con il quale ci fu un profitto di 56 lire; e si chiede quanto di questo profitto, per lira, si debba rendere a ciascuno dei suoi soci. Innanzitutto, secondo la consuetudine pisana, dal suddetto profitto dobbiamo sottrarne la quarta parte, essendo questa la parte di chi se ne occupava, restano 42 lire.

Fibonacci suppone che il profitto sia proporzionale all'investimento e quindi, se con 152 lire di investimento si è ottenuto un profitto di 42 lire, il profitto prodotto da una lira diventa lire $\frac{42}{152}=\frac{21}{76}$ e quindi il socio che ha partecipato alla cooperativa con *a* lire deve ricevere un guadagno di lire $a\times\frac{21}{76}$. Il problema è molto semplice ma si tratta di saper fare con molta cura i conti *a ciò che nisuno sia ingannato*. Si tratta di dividere la lira in 76 parti e prenderne 21. In realtà nel '200 un ventesimo di una lira era un soldo e un dodicesimo di un soldo era un denaro. Moneta di minor valore non era prevista. Dobbiamo allora calcolare quanti soldi e quanti denari si ricevono in cambio di una lira di investimento. Poiché *a* lire corrispondono a $20\times a$ soldi. Il profitto sarà soldi $\frac{420}{76}=5\,\frac{10}{19}$. Si tratta ora di vedere quanti denari corrispondano a soldi $\frac{10}{19}$. Poiché un soldo è 12 denari, abbiamo denari $\frac{120}{19}=6\,\frac{6}{19}$. Dunque il profitto per una lira di investimenti è 5 soldi 6 denari e circa un terzo di denaro quantità non monetizzabile e quindi non rimborsata all'investitore. E' chiaro che la perdita per il singolo è insignificante, ma per la banca che gestisce l'investimento, il cumulo delle perdite trascurabili di molti investitori fornisce un capitale non più trascurabile che si aggiunge a quel quarto che comunque spetta a *chi se ne occupava*. In questo modo si realizzava, per la prima volta una sorta si miracolo: si potevano produrrei soldi senza lavoro! La sola conoscenza del calcolo e delle sue regole consentiva al "banchiere" di accumulare utili senza produrre valore.

Il metodo che abbiamo utilizzato per calcolare il profitto corrispondente a una lira è quello che Fibonacci chiama "volgare". In realtà per questo e per tutti i calcoli analoghi lui usa le sue frazioni multiple graduate matematicamente molto più raffinate. Nello specifico, essendo un soldo un ventesimo di una lira, bisogna sapere quanti ventesimi contiene la frazione di lira 21/76 e poi quanti dodicesimi sono contenuti nel resto cioè nella frazione di soldo 10/19. Tutto questo lo porta al risultato $\frac{21}{76}=\frac{5}{20}+\frac{6}{20\times 12}+\frac{6}{20\times 12\times 19}$ numero che Fibonacci scrive, compattando l'informazione, come frazione multipla graduata: $\frac{5\ \ 6\ \ 6}{20\ 12\ 19}$.

La teoria matematica che riguarda le frazioni multiple graduate, che comprende come caso particolare le frazioni ordinarie se il grado è uno, è una teoria completa, rigorosa e molto bella che fornisce un quadro teorico generale, oggi dimenticato, nel quale ogni tipo di commercio, di scambio, di operazione bancaria, in un mondo di infinite unità di misura tra loro diverse, trova una semplice formulazione e un conseguente algoritmo risolutivo al di sopra delle opinioni e alla portata di tutti.

Biliografia

N.Tartaglia, *Tutte le opere d'aritmetica del famosissimo Nicolò Tartaglia*, Venezia, 1592-93

E. Castelnuovo, *L'insegnamento delle frazioni*, da La scuola secondaria e i suoi problemi, 1952

F. Enriques, *L'insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, s. IV, vol. 1, pp 6-16, 1921

Leonardo Pisano, *Liber Abbaci*, a cura di B. Boncompagni, Roma, 1857

L. Catastini, *Tra parole, matematica e musica*, da Quale scuola? Carocci, 2015

Euclide, *Elementi*, a cura di A. Frajese, L. Maccioni, UTET, Torino, 1996

Piero della Francesca, *Trattato d'abbaco*, Istituto poligrafico e Zecca dello Stato, Roma, 2012