N° 1 -2 Gen- Ago 2019

# Periodico di matematiche

Volume 11 - Serie XIV - Anno CXXIX


Rivista Quadrimestrale

Organo della Mathesis

Società italiana di scienze matematiche e fisiche fondata nel 1895

Numero 1-2 Gennaio-Agosto 2019 Volume 11 serie XIV anno CXXIX
Rivista quadrimestrale

# Periodico di matematiche

**Organo della MATHESIS**

*Società italiana di scienze matematiche e fisiche fondata nel 1895*

Mathesis

*Direttore grafico editoriale* Maurizio Volante - m.volante@mathesisnazionale.it

Autorizzazioni e supporti Autorizzazione Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Condizioni di vendita Il Periodico di matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su www.mathesisnazionale.it

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia € 60,00 - Per l'Estero € 70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati:

segreteria@mathesisnazionale.it c/c postale, Codice IBAN:
**IT05I0760104000000048597470**

intestato a:
**Mathesis Nazionale** c/o Accademia dei Concordi, Piazza Vittorio Emanuele, 14, 45100 Rovigo (RO),
www.mathesisnazionale.it ISSN 1582-8832

# EDITORIALE

## L’attività della Mathesis per i prossimi anni

## *The activity of Mathesis for the coming years*

***Elisabetta Lorenzetti***

**Abstract**

*Mathesis has a new President, and its “Periodico di Matematiche” a new Director. Unchanged are their aim and direction. The commitment continues, with renewed energy, at the service of teachers, Mathematics and its teaching.*

Si è aperto un nuovo tratto di strada per la nostra Associazione: il più cordiale augurio di buon lavoro a tutto il Direttivo e a tutte le Sezioni, nella convinzione che insieme sapremo ulteriormente rendere autorevole e presente la nostra Associazione, a servizio degli insegnanti di matematica e della scuola italiana tutta.

Ma prima ancora dobbiamo riconoscere, ovvero ripercorrere e ricomprendere, quanto nel suo decennale impegno di Presidente ha fatto per la sua e nostra Mathesis l’Ispettore Emilio Ambrisi e, in un abbraccio affettuoso, maturare la nostra riconoscenza: questo vorrei in queste righe. Per poi indicare il nuovo tratto di strada che in continuità andremo a percorrere.

Il nostro Presidente, fino al febbraio di quest’anno, ha saputo guidare con sapienza la Mathesis, accrescendone l’autorevolezza, ormai ascoltata interlocutrice nelle politiche scolastiche afferenti al settore matematico, ponendola quale risorsa aperta a servizio del docente, dunque entro il perimetro essenziale della didattica. Accompagnare gli insegnanti di matematica nelle modifiche programmatiche e curricolari, orientarli nelle scelte più funzionali alla comprensione del valore trasversale e interdisciplinare del sapere matematico, interloquire con il MIUR o dissentire costruttivamente se il caso, avendo come obiettivo permanente e illuminante il valore formativo della conoscenza scientifica, matematica in particolare; questo il suo riconosciuto impegno e questa la sua preziosa eredità.

Eredità che vorremmo tutti custodire e ora far fruttificare, a vantaggio dei docenti di matematica, nella loro realtà scolastica e nei percorsi didattici e curricolari nei quali sono chiamati a operare.

Ecco la Mathesis, allora, chiamata a impegnarsi e dar supporto con proposte, interventi e iniziative formative sulle problematiche oggi emergenti, creando in particolare opportunità di confronto tra i docenti, così meno soli e più motivati. Esemplificando, non vi è dubbio che la Probabilità e la Statistica, per il loro alto valore formativo e sociale, debbano permeare il curricolo scolastico obbligatorio e non. Uno studente sensibile e formato a questa dimensione sarà un cittadino più responsabile, ed ecco il perché della seconda edizione della scuola estiva di statistica che si è tenuta a Rovigo dal 15 al 17 luglio 2019. E poi la *vexata quaestio* della valutazione nei suoi aspetti docimologici, didattici e relazionali, nonché, per i suoi immediati esiti didattici e sempre al centro della attenzione anche mediatica, l'esame di Stato.

Allora non può che rendersi indispensabile la nostra presenza nei percorsi formativi e nel dibattito nazionale.

Cominciamo con l'incontrarci a Matera, dal 24 al 26 ottobre, in occasione del Congresso nazionale "*La matematica oltre le discipline*" per argomentare e proporre una matematica che possa farsi dimensione metadisciplinare, una conoscenza capace di rendere il sapere all'altezza del nostro tempo e dei nostri studenti.

Ed è proprio questo riferimento ad una Matematica oltre le discipline ad evocare quanto scritto nel dicembre 1937, in occasione del primo anniversario della morte di Pirandello, da Bruno de Finetti: "*Pirandello maestro di logica*".

"...considero Pirandello come uno dei più grandi spiriti matematici; così dicevo a un collega nel giorno della sua morte, e tale affermazione mi parve accolta con meraviglia. Ed essa non può infatti non sembrare paradossale se, cullandosi nelle inveterate illusioni razionalistiche, si considera la Matematica come un complesso di verità assolute che col relativismo pirandelliano sarebbe addirittura agli antipodi".

# Gödel, Escher, Bach: bellezza, eternità, insegnamento

# *Gödel, Escher, Bach: beauty, eternity, teaching*

***Emilio Ambrisi***

**Abstract**

*Forty years after its publication, the book Gödel, Escher, Bach by Douglas R. Hofstadter is very current. The book distills different subjects and leads to perceiving the perenniality and beauty of man's intellectual work with a particular emphasis on the idea of recursion and Gödel's incompleteness theorem. A book, so naturally interdisciplinary, to be useful to indicate the way to follow in the educational and training choices of the future.*

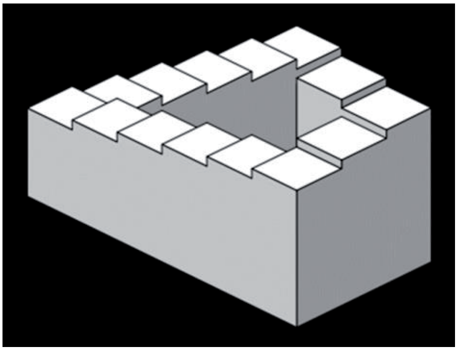


*Fig.1. - Scala di Penrose*

Compie quarant'anni, ma non li dimostra. È un libro nuovo, attuale. Fu pubblicato infatti nel 1979 e rese famoso il suo giovane autore Douglas R. Hofstadter. Tradotto in più lingue, è stato ovunque più volte riedito. In Italia, la prima edizione, da Adelphi, è del 1984. Il titolo è Gödel, Escher, Bach completato da: un'*eterna ghirlanda brillante* e ancora prolungato in un sottotitolo: *una fuga metaforica su menti e macchine nello spirito di Lewis Carroll*. Frasi che, se da una parte liberano una moltitudine di significati che si vorrebbe rincorrere, dall'altra invitano a proseguire nella scelta di sotto-sottotitoli, come in un gioco regolato da una soggiacente procedura ricorsiva. Si è portati cioè ad attivare un processo che è non lontano dallo spirito dell'autore di *Alice nel Paese delle Meraviglie* e a penetrare fin da subito finalità e struttura di un libro marcatamente interdisciplinare vincitore, nel 1980, del premio Pulitzer per la saggistica. Un libro di ragionamenti e di pensiero che sull'onda del giovanile entusiasmo del suo autore, appena trentatreenne, figlio di un Nobel per la fisica[1], lega insieme matematica, arte, musica, logica, macchine, informatica, ingegneria, IA e robotica, neuroscienze in uno "strano anello", qualcosa che fa pensare "*al fatto di ritrovarsi inaspettatamente, salendo o scendendo lungo i gradini di qualche sistema gerarchico, al punto di partenza. Salire una scala e ritrovarsi ai piedi della scala. Un fenomeno che Escher ha disegnato, che Bach ha messo in musica, che Gödel ha posto al centro del suo teorema*". Salire una scala e ritrovarsi ai piedi della scala. Come nell'esempio fornito da Sir Roger Penrose. Ma anche come muoversi sulla superficie dell'anello o nastro di Mobius: camminare sulla faccia esterna e ritrovarsi su quella interna senza averla attraversata.

## 1. **Interdisciplinarità**

Hofstadter è un appassionato di musica, di logica, di computer, di arte. Lo è in un modo naturalmente interdisciplinare, frutto di una formazione sviluppata in un ambiente sociale ricco di voci e registri culturali. Egli ha maturato l'idea che Gödel, Escher e Bach siano solo "ombre" proiettate in diverse direzioni da una qualche solida essenza centrale. Il suo è allora il tentativo di ricostruire questo oggetto centra le. I tre fili del discorso che Gödel, Esher e Bach hanno sviluppato s'intrecciano continuamente in nodi che sono gemme che luccicano, brillanti come sono i prodotti del pensiero e eterni com'è la vera conoscenza, com'è la matematica che non ha nulla di cadùco, di effimero, di transeunte: è ciò che sempre è e non nasce e non perisce[2].

*Fig. 2 - Liberation 1955*

Una narrazione, quella di Hofstadter, non sempre facile da seguire, ma avvincente, quando capìta. La figura di Escher, ad esempio, è quella del liberatore. Il suo è il tentativo continuo di

[1] Robert premio Nobel nel 1963.

[2] Il 7 dicembre 2018 al PAN di Napoli, in occasione della mostra di Escher, si è sviluppato, organizzato da Atalia Del Bene (consigliere nazionale della Mathesis) un discorso interdisciplinare in cui le diverse voci sono venute a raccordarsi come i fili di un'ampia ghirlanda per condurre le menti degli astanti a richiamare, unire, inseguire concetti e immagini per ritrovare quei pensieri che sfidano il tempo e gareggiano con l'eternità, come sono l'arte e la matematica. L'incontro ha visto la partecipazione di Emilio Ambrisi, Francesco de Giovanni, Atalia Del Bene, Emilia Di Lorenzo, Ugo Piscopo e dell'artista Carla Viparelli.

portare fuori dalla mente quelli che ne sono i prodotti, come nella litografia Liberation del 1955. Attraverso il disegno dà rilevanza visiva all'attività del cervello, dà spazio e sostanza a concetti, idee, procedure, grovigli e labirinti mentali. E tra tutte queste attività della mente ce ne sono due che attirano particolarmente l'attenzione di Hofstadter e che hanno per lui un fascino tutto particolare. Sono il teorema di Gödel sull'incompletezza dei sistemi formali e l'idea di ricorsività. "*Escher* –scrive Hofstadter– *è, nel campo dell'arte, la massima approssimazione umanamente concepibile all'idea di ricorsività e cattura in maniera sorprendente in alcune sue immagini lo spirito del teorema di Godel*". Le opere di Escher danno il senso dell'infinito, dell'illimitatezza, della prosecuzione indefinita che è la caratteristica della ricorsività e uguale caratteristica rivela l'opera di Bach, la sua *Offerta musicale*. E così Godel. Il suo teorema è paragonato ad una perla e il metodo per dimostrarlo a un'ostrica: «un complicato essere vivente che nelle sue viscere dà origine a questo gioiello dalla misteriosa semplicità».

## 2. **Ricorsività**

Che cos'è la ricorsività? La definizione di Hofstadter è letterariamente e concettualmente bella e coinvolgente: "l'annidarsi di cose entro cose e le sue variazioni […] Un racconto all'interno di un racconto, una commedia nella commedia, un quadro dentro un quadro, scatole cinesi dentro scatole cinesi (perfino commenti tra parentesi all'interno di commenti tra parentesi!): tutto ciò dà solo una piccola idea del fascino della ricorsività"[3]. Più concretamente, quasi tutte le nostre operazioni sono di tipo ricorsivo: mangiare, camminare, contare, misurare. Si tratta cioè di un metodo dinamico in cui ogni passo si compie a partire dal precedente. Le macchine operano in maniera ricorsiva e una tesi, detta di Church[4], molto importante nel panorama della complessità e della calcolabilità, afferma che tutti e soli i problemi risolubili sono di tipo ricorsivo generale. Ma non meno affascinante è parlarne in termini formali partendo dallo schema che generalmente si associa al concetto di *funzione:* una macchina che trasforma un dato $x_0$ in entrata in un ben determinato e unico $x_1$ in uscita. Ovviamente è importante precisare l'insieme X dove si attingono gli x in entrata, l'insieme sorgente o dominio, e altrettanto importante è l'insieme di arrivo o "bersaglio" (termine privilegiato quando nell'azione didattica si usano le "frecce") o, più formalmente, codominio. Può anche darsi che l'$x_1$ sia della stessa natura di $x_0$, appartenga cioè ancora ad X. Allora si può reintrodur-

[3] Hofstadter il fascino della ricorsività lo vive e si diverte a inventare procedure ricorsive: modifica ad esempio quella che genera la successione dei numeri di Fibonacci e ne parla ancora con gusto nell'intervista rilasciata a Benedetto Scimemi e pubblicata nel Bollettino UMI, sezione A, di aprile 2002.

[4] Alonzo Church (1903-1995). Alla tesi di Church facevano riferimento sia i programmi PNI che i piani di studio Brocca per il liceo scientifico.

re in macchina e, ancora, se il codominio è parte del dominio, cioè se è $f(X) \subset X$, il dato in uscita $x_1$ può essere reintrodotto in ingresso e l' $x_2=f(x_1)=f(f(x_0))$ in uscita, ancora reintrodotto, e così via.

Si tratta dunque di studiare il comportamento di una sequenza di valori

$$x,\ f(x),\ f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots\ldots.$$

che può anche scriversi:

$$f^0(x),\ f^1(x),\ f^2(x),\ \ldots., f^n(x)$$

dove è, con abuso di notazione:
$f^0$=identità in X, $f^1=f,\ f^2=f{\cdot}f, \ldots.,\ f^n=f{\cdot}f{\cdot}\ldots\ldots{\cdot}f$ $n$ volte.

Il valore iniziale di $x$ può essere chiamato "*seme*" e l'idea è quella di continuare a reintrodurre in $f$ il valore di $f$ e vedere se emerge una qualche regolarità o struttura o principio organizzatore. E' questo il punto di vista adoperato nello studio dei *sistemi dinamici* ove l'insieme dei successivi punti

$$\{x_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0),\ \ldots.,\ f^n(x_0),.\ \ldots.\}$$

è detto *orbita* di $x_0$ mentre l'insieme di tutte le orbite del sistema viene detto quadro delle fasi del sistema dinamico. Interessante è anche il caso di orbite periodiche o cicli; può capitare cioè che per qualche $n > 1$ risulti $f^n(x_0) = x_0$. Ad esempio: si possono determinare delle funzioni $h, k$ a valori reali o complessi per le quali risulti $h(h(x)) = -x$ e $k(k(x)) = 1/x$?

Esempi di funzioni che soddisfano la condizione assegnata sono le funzioni $h(x) = ix$ e $k(x) = x^i$. Entrambe sono cicliche di ordine 4 [$h^4(x) = x$] e per entrambe il valore iniziale $x$ costituisce ciò che con termine abbastanza suggestivo si dice *attrattore.*

Una funzione ricorsiva del tipo $x_{n+1} = x_n^2 + c$ per $x$ numero reale dice poco o niente; se però si sposta l'attenzione dalla retta reale al piano, questa fu l'idea sviluppata da Benoit Mandelbrot, cioè si considera $x$ variabile nel campo complesso allora il risultato è ben diverso. Fissando c e facendo variare $x_0$ si ottengono gli insiemi di Julia, viceversa ponendo $x_0 = 0$ e facendo variare c si definiscono gli insiemi di Mandelbrot. Funzioni all'apparenza aride e meccaniche iterazioni producono forme geometriche, i frattali, che la *computer art* rende di una straordinaria bellezza policromatica. Ma c'è di più, da formule espressione di sicuro ordine, prendono corpo immagini e forme geometriche che contengono quel tanto di disordine, irregolarità ed imprevedibilità che pervade la natura e gli oggetti naturali: la forma di un albero, di una nuvola, di una catena montuosa o di una costa difficilmente contengono quegli elementi della geometria euclidea quali rette, angoli diedri, piani, ecc. che distinguono gli artefatti ossia gli oggetti realizzati dall'uomo. Ecco allora i frattali come geometria della Natura, oggetti molto molto complessi immersi in spazi molto molto semplici, dotati, in ogni punto, di continuità ma non di derivabilità, dotati altresì di una spiccata autosimiglianza come in "Pesci e squame" di Escher. La xilografia è del 1959. È rivelatrice di una procedura ricorsiva e per certi versi anticipa l'idea, comune con i frattali, che le parti di un oggetto possono essere copie dell'oggetto stesso. «Naturalmente –scrive Hofstadter– questi pesci e queste squame sono uguali solo se visti a un livello sufficientemente astratto. Tutti sanno che le squame di un pesce non sono veramente piccole copie di un pesce; e neanche le cellule del pesce sono piccole copie del pesce; comunque, il DNA di un pesce, posto all'interno di ogni singola cellula del pesce, è una "copia" molto involuta dell'intero pesce: il quadro di Escher contiene perciò più che un granello di verità. […] La cosa sorprendente è che anche una parte piccolissima di un disegno di Escher o di un pezzo di Bach è sufficiente a rivelarne l'autore. Proprio come all'interno di ogni minuscolo pezzetto di pesce è contenuto il suo DNA, così ogni piccolo frammento di un'opera porta la "firma" del suo autore. Non sappiamo come chiamarla se non "stile", una parola vaga e sfuggente».

*Fig.3. - Pesci e squame, 1959*

## 3. Incompletezza

Nello stile di Escher *La Galleria di Stampe* del 1956 rivela un itinerario di immagini mentali assimilabili ad uno strano anello: un giovane dentro una galleria d'arte che guarda, all'interno di un quadro, una nave che entra nel porto che appartiene alla città che contiene la galleria che contiene il quadro che il giovane di spalle sta guardando. Un procedere ricorsivo, ma anche qualcosa in più: «una parabola pittorica del teore-

*Fig. 4. - La Galleria di stampe, 1956*

ma di incompletezza di Gödel».Una incompletezza che è anche grafica, in quella parte centrale, lasciata bianca, utilizzata per la firma[5]. Un teorema notevole inter e trans-disciplinare. Un teorema che fissa un limite alla qualità dell'umano sapere; un teorema del no, del limite a ciò che si può fare, dell'esistenza di ciò che è indecidibile[6]. Ad esempio: non possiamo provare la completezza dell'aritmetica rimanendo all'interno del sistema «aritmetica». O anche, in un contesto applicativo: un calcolatore per quanto potente ci sarà almeno un problema formulabile nel suo linguaggio che non saprà risolvere. Bisognerà ricorrere a un altro calcolatore e poi ancora ad un altro, in una gerarchia che non vedrà mai raggiunta la risolubilità completa dei problemi ammissibili.

È come quando per vedere meglio ciò che succede intorno a noi dobbiamo cambiare punto di vista, salire su una qualche altura, elevarci. Gödel quindi non è solo negatività, limitazione, incertezza. Insegna anche che ci saranno sempre nuovi gradini da salire, sempre nuovi spazi da esplorare e raccordare, sempre nuovi risultati da aggiungere. Mai porremo la parola "fine" all'impegno intellettuale dell'uomo e la matematica non finirà. Mai ci sarà un ultimo risultato della matematica. Se ci fosse potremmo ordinare l'insieme dei risultati, scegliere un buon ordinamento e risolvere una volta per tutte anche il problema pedagogico: trovare la via regia per insegnare la matematica.

Gödel, Esher e Bach, dunque, un libro che distilla materie diverse e conduce a percepire la bellezza di ciò che è suono, visione, immaginazione, esattezza e coerenza logica. Un libro che offre "cose interessanti a vari livelli" in analogia a quanto avviene nell'*Offerta musicale* di Bach dove, con le parole di Hofstadter: «vi sono giochi di prestigio con note e lettere; variazioni ingegnose… fughe straordinariamente complesse; vi è bellezza ed estrema profondità emotiva. Ne scaturisce un'esultanza che emana dalla molteplicità di livelli dell'opera. L'*Offerta musicale* è una fuga di fughe, una Gerarchia Aggrovigliata come quelle di Gödel e di Escher, una costruzione intellettuale che mi ricorda, in modi che non sono in grado di esprimere, la magnifica fuga a più voci della mente umana. E questo è il motivo per cui nel mio libro i tre fili del discorso sviluppato da Gödel, da Escher e da Bach s'intrecciano insieme in un'Eterna Ghirlanda Brillante».

## 4. Insegnamento

C'è una grande inquietudine oggi, rispetto al futuro. Tutto appare largamente incerto, indeciso, imprevedibile. Il cambiamento è la sola costante e, per ciò stesso, produce disorientamento, rende insicuri. Ne risentono anche, se non soprattutto, le scelte educative. "Un bambino nato oggi - ha scritto Yuval Noah

---

[5] Due matematici dell'università di Leida sono riusciti nel 2003 a "riempire" lo spazio bianco. Una descrizione del lavoro è su: http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf.

[6] In verità si dovrebbe utilizzare il plurale: sono due infatti i teoremi di Gödel. Si veda "I teoremi di incompletezza" il recente riuscito saggio di Gabriele Lolli (Il Mulino, 2019).

Harari[7]- avrà poco più di trent'anni nel 2050. Se tutto gli va bene, sarà ancora in vita intorno al 2100, e potrebbe persino essere un cittadino attivo del XXII secolo. Che cosa dovremmo insegnare a questo bambino per aiutarlo a sopravvivere e avere successo nel mondo del 2050 o in quello del XXII secolo? Quali competenze professionali dovrà avere per trovare un'occupazione, comprendere quello che gli succede intorno ed orientarsi nel labirinto della vita?" La lezione che possiamo trarre da Gödel, Esher e Bach ma anche da altre opere simili è che qualcosa c'è che vale la pena di coltivare e di trasmettere. È quella ghirlanda che possiamo rendere ancora di più intrecciata e brillante e il suo carattere, che riconosciamo eterno, tradurlo in un "invariante" nel cambiamento. Un'invariante al quale radicare la comprensione dell'essere persone, umani in un futuro disumano. Un'invariante inteso come "pane quotidiano" da garantire a tutti i figli e nipoti che abiteranno il pianeta Terra non tanto nell'essenzialità quanto nei valori e nei canoni di semplicità e di bellezza che ancora possiamo cogliere a distanza di duemila anni con gli stessi occhi dell'imperatore Marco Aurelio in un "pensiero" che metaforicamente è sintesi di molto di quanto è stato detto:

> «Mentre il pane si cuoce, alcune sue parti si screpolano e queste venature che vengono così a prodursi, e che in un certo senso contrastano con il risultato che si prefigge la panificazione, hanno una loro eleganza e un modo particolare di stimolare l'appetito. Ancora: i fichi pienamente maturi si presentano aperti. E nelle olive che dopo la maturazione sono ancora sulla pianta è proprio quell'essere vicine a marcire che aggiunge al frutto una particolare bellezza».

I nostri eredi, malgrado tutte le indecisioni e inquietudini emergenti da un mondo che cambia, malgrado anche le mutazioni biologiche[8] che si profilano, potranno così anche loro ancora godere della stimolazione dell'appetito e della sazietà spirituale, intellettuale, fisica, del pane e dei frutti che l'Uomo ha prodotto e che la Natura vorrà ancora, speriamo con il nostro impegno, continuare a donare loro.

## Bibliografia


[1] EMILIO AMBRISI, Ricorsività, in Enciclopedia Pedagogica, Vol. 4, Editrice La Scuola, 1989.

[2] EMILIO AMBRISI, Spunti in Matematica discreta, Quaderno UMI, Olimpiadi 1995

[3] EMILIO AMBRISI, Editoriale, PdM n. 3-2011.

[4] BIAGIO SCOGNAMIGLIO, Matematica e (è) umanesimo PdM n. 2-2016.

[5] BIAGIO SCOGNAMIGLIO, Matematica ed estetica, PdM n. 1-2017. www.matmedia.it.


---

[7] Yuval Noah Harari, storico e saggista israeliano sta riscuotendo un enorme successo a livello internazionale. Il brano è tratto dalle 21 lezioni per il XXI secolo (la lezione: Istruzione), Bompiani, 2019.

[8] È uno degli scenari del futuro descritti nei suoi libri da Yuval Noah Harari. In particolare la disuguaglianza tra gli uomini non sarà più economica ma biologica.

# PREMIO *Bruno Rizzi*
## *XIII Edizione*

## Bruno Rizzi AWARD - XIII Edition

*Elisabetta Lorenzetti*

*Bruno Rizzi (Tripoli 1935- Roma 1995)*

Il premio Bruno Rizzi torna quest'anno agli studenti com'è stato per le sue prime edizioni.

Il concorso, realizzato in collaborazione con l'USR Basilicata, il liceo "Tommaso Stigliani" di Matera e la "Fondazione Matera-Basilicata 2019", è infatti destinato agli studenti e alle studentesse del primo e del secondo ciclo di istruzione e prevede l'assegnazione di tre premi, a singoli studenti o gruppi, distintamente per la scuola primaria, la secondaria di I grado, quella di II grado.

Il tema: "*Le forme nella città di Matera* - Un itinerario matematico, storico e sociale" mira a potenziare e valorizzare lo studio della matematica nelle scuole del territorio nazionale sensibilizzando studenti e adulti a cogliere la presenza della matematica nelle forme e negli aspetti della quotidianità urbana.

I lavori presentati per il concorso saranno valutati da una commissione composta dai proff: Tiziana Bindo e Marcello Pedone (consiglieri nazionali Mathesis), Rosaria Cancelliere, Nicola Caputo, Domenica Di Sorbo e Antonio Scinicariello (dirigenti tecnici del MIUR), Rosanna Papapietro (dirigente scolastica).

La cerimonia di premiazione avverrà nel corso del Congresso di Matera 2019 il giorno 25 ottobre alle ore 11.

# Matematica e capitale umano

## *Mathematics and human capital*

***Atalia Del Bene*[1] *- Emilia Di Lorenzo*[2]**

**Abstract**

*'Mathematics and human capital' is now, more than ever, an inseparable pairing. This can be easily explained in light of ongoing changes in the demand for labor, as well as professional skills and qualifications, brought about by technological advancements affecting the global capital market. Human capital, which currently represents one of the chief growth factors of a country, can be accumulated in two ways: via education, or via technological progress.*

La lettura dei rapporti che periodicamente il MIUR dedica ai dati riguardanti la dispersione scolastica in Italia permette di concentrarsi sulle reali difficoltà della scuola italiana, al di là di opinioni o preconcetti personali.

Rimandando a tali rapporti per osservazioni più puntuali, è un dato di fatto che non solo negli Istituti Professionali si concentra gran parte della dispersione scolastica nella fascia di età corrispondente alla scuola secondaria di II grado, ma anche che la Matematica è, fra le discipline trattate, una delle massime responsabili delle valutazioni negative che concorrono a tale dispersione.

Nonostante si avverta con sempre più forza come l'insegnamento della matematica sia un aspetto non secondario della proposta educativa complessiva, i problemi di apprendimento riguardanti questa disciplina sono in aumento.

Ciò a discapito dell'accrescimento delle competenze chiave degli studenti, con un conseguente impatto negativo sui fattori indicativi della qualità stessa del servizio scolastico, considerato uno dei servizi pubblici essenziali per le potenzialità economiche e sociali del Paese in generale, e del Mezzogiorno in particolare, e, in quanto tale, fra le priorità strategiche della politica di sviluppo.

Le difficoltà (reali e in aumento) degli studenti costringono *de facto* i libri di testo e la prassi didattica a ridimensionare i propri obiettivi e oggi, troppo spesso, l'insegnamento e la valutazione di apprendimento si concentrano sul

---

[1] ATALIA DEL BENE, *Docente di Matematica e Fisica*, Liceo Classico A. Pansini, Napoli.

[2] EMILIA DI LORENZO, *Professore Ordinario di Metodi matematici dell'economia e delle scienze attuariali e finanziarie*, Università degli Studi di Napoli, Federico II.

possesso di competenze formali di calcolo e sulla padronanza di abilità correlate, le quali tuttavia sono generalmente vissute dagli studenti come inutilmente fini a se stesse, dato che assai spesso saranno di scarsa utilità nell'esercizio della professione a cui l'indirizzo di studi scelto dovrebbe avviare.

Cédric Villani, vincitore nel 2010 della medaglia Fields, nel 2015 del premio Peano, istituito dall'Associazione subalpina Mathesis, in un'intervista concessa a *MaddMaths* (sito dedicato alla divulgazione della matematica) afferma che 'La matematica muove il progresso tecnologico'.

Non c'è dunque innovazione, senza le conoscenze matematiche.

Partendo proprio da questo assunto, la nostra attività di studio e ricerca vuole rispondere in qualche modo all'esigenza, sempre più sentita sia nel mondo Accademico che nelle Scuole, di un processo di costruzione del sapere che faccia del moto circolare di andata e ritorno tra il potenziamento cognitivo e motivazionale degli studenti e il crescente ruolo del mercato e dei dettami del 'capitale umano', importanti cartine di tornasole della formazione e della sua identità culturale, la sua dinamica costruttiva.

Le finalità sono sempre le stesse, come migliorare gli esiti degli Studenti in matematica, tenendo conto dell'importanza crescente che questa disciplina assume e per l'inserimento nel mondo del lavoro e come leva per l'innovazione del nostro Paese, un obiettivo a dir poco irrinunciabile per competere con la concorrenza asiatica.

Al di là della questione epistemologica legata alle strategie e alle metodologie dell'apprendimento da mettere in campo per favorire in alunni giovani l'acquisizione e la meccanizzazione degli algoritmi, la memoria di lavoro e l'attenzione, la capacità di lettura e la comprensione dei testi, i processi logici, la formulazione di ipotesi, il controllo critico nella flessibilità e nella fluidità ideativa, va affrontato un problema spinoso e urgente: fornire alcuni suggerimenti riguardanti i contenuti minimi di conoscenze e capacità necessari per affrontare gli insegnamenti matematici dei principali Corsi di laurea scientifici. Il nostro lavoro e la nostra attività di ricerca e studio opera dunque proprio in tale senso e in continuità con quanto discusso negli incontri organizzati dalla Mathesis sui temi del *knowledge-based* e *skill-based* necessario per l'accesso universitario.

Lo scopo è quello di operare una vera 'rivoluzione culturale' che ribalti il comune sentire sulla matematica e le restituisca la dovuta centralità in tutte le scienze, in quanto unica vera leva per il progresso, fondante per la crescita del Paese e fondativa per potenziare la consapevolezza e le conoscenze dei cittadini, consentendo di contrastare la crisi e confrontarsi con i principali modelli europei di competitività economica. Spetta ai docenti, nelle Università e nelle Scuole, trovare le modalità, i raccordi interdisciplinari, i supporti teorici ed applicativi, che favoriscano un apprendimento attivo, superando tecnicismi e meccanismi mnemonici.

La formazione gioca, dunque, un ruolo strategico rispetto alla dotazione umana nella dinamica della nostra economia, in particolare per quanto attiene agli ambiti produttivi ad alto sviluppo tecnologico.

Non ci soffermiamo in queste pagine sul dibattito inerente all'impatto della formazione sugli specifici indicatori quantitativi del capitale umano, ma sottoponiamo alcune riflessioni sul ruolo della formazione scientifica e, più specificamente matematica, rispetto a quello che è l'aspetto fondamentale del capitale umano, cioè, citando la definizione riportata in un articolo del Ceris (Istituto di Ricerca sull'Impresa e lo Sviluppo - CNR) di Milano (cf. Nosvelli2009).

> *"le abilità e le capacità che mettono nelle condizioni chi le possiede di agire/lavorare con modalità innovative e più efficienti".*

La qualità del capitale umano è una variabile essenziale nel funzionamento delle imprese e nell'efficienza del lavoro (cf. Bella et. al. (2018)); il capitale umano è fatto di abilità, competenze, conoscenze, ma anche caratteri qualitativi: aspetti motivazionali, apertura a nuove idee, capacità di lavorare in team. Già dal 2003 l'EU ha riconosciuto la centralità del capitale sociale e umano nella società dei saperi (cf. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea 5.12.2003).

Qual è l'apporto della matematica al capitale umano? La questione è stata più volte affrontata sia da esperti della formazione, sia nell'ambito di ordini professionali; la risposta scaturisce dalla consapevolezza della *"funzione di guida che devono svolgere i risultati degli apprendimenti"* (cf.: Ambrisi, 2015). Una funzione di guida, nell'ambito del processo formativo, che prepari ad affrontare in modo critico e autonomo nuovi e complessi scenari socio-economici: i cambiamenti e le crisi del mercato del lavoro, la creazione di nuove figure professionali, le sfide dell'economia delle *high skill*.

> E' importante costruire, nel percorso didattico, *"un quadro di riferimento finalizzato all'acquisizione del metodo matematico come strumento di indagine".*

Procedendo più concretamente, per dare un'esemplificazione delle idee e linee guida esposte, fissiamo la nostra attenzione sulla "matematica necessaria" in alcuni corsi di studio universitari, in particolare in quelli di ambito economico-aziendale. Non a caso, in molti dei corsi di laurea delle classi economico-aziendali si è avvertita la necessità di erogare "precorsi" di matematica, finalizzati al consolidamento (talvolta all'apprendimento) delle conoscenze di base necessarie per intraprendere il primo anno.

L'organizzazione e gestione dei processi aziendali, la finanza, la gestione finanziaria aziendale si fondano su modelli e strumenti statistico-matematici.

La matematica è uno strumento fondamentale in tutte le applicazioni finanziarie, nell'analisi dei rischi di impresa, nella valutazione di attività assicurative e previdenziali. L'attuale normativa europea, tesa all'armonizzazione e trasparenza delle valutazioni in campo finanziario, prescrive indicazioni e strumenti relativi alla vigilanza, alla solvibilità ed ai controlli interni degli intermediari finanziari, che impongono l'applicazione di indicatori e strumenti costruiti attraverso modelli quantitativi (cf. Direttiva 2009/138/CE; *Basel Committee on Banking Supervision* (2006), *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, Basel* (www.bis.org)). L'implementazione di tali strumenti richiede una solida conoscenza delle discipline matematico-statistiche e delle loro applicazioni; i corsi di laurea in Economia sono, dunque, basati sull'utilizzo di strumenti metodologici quantitativi (tecniche matematico-statistiche, informatica, ecc.). Un ulteriore esempio può riguardare, più in generale, l'approccio metodologico alle scienze sociali: anche quest'ultimo richiede l'utilizzo dell'analisi quantitativa (formulazione delle ipotesi, costruzione delle variabili ed esame delle loro relazioni). Ecco, dunque, l'importanza, per i nostri studenti, di parlare il linguaggio della matematica. E di farlo in modo rigoroso, che non può prescindere dall'acquisizione di saperi fondanti, che ne costituiscono i capisaldi. Tali saperi fondanti, all'interno del percorso scolastico, devono essere inseriti in un contesto interconnesso fra diversi ambiti disciplinari, affinché se ne colga la potenzialità applicativa e la finalizzazione agli ambiti professionali. Ciò è anche a vantaggio dell'attrattività di una disciplina tradizionalmente ritenuta ostica e comprensibile a pochi. E' sempre attuale, anche negli argomenti oggetto di questa analisi, il pensiero del matematico Bruno de Finetti:

> "*Tutte le risorse concettuali vengono messe a servizio della visione pratica dei problemi e tutti i problemi pratici concorrono a servizio dell'elaborazione intellettuale*".

In conclusione, la matematica, in una logica di formazione multidisciplinare, costituisce uno strumento di investimento essenziale ai fini dell'accumulazione di capitale umano, fondamentale per sostenere la crescita economica e la coesione sociale (cf. Visco 2014); come afferma Honsell (2014), "*aumentare il capitale scientifico, aumentando quello umano"*.

Dunque «La matematica non delude mai», come diceva il protagonista del film di François Ozon, *Dans la maison*.

**Note**

Proposte per un *syllabus* spendibile trasversalmente dalla Scuola alla scelta universitaria e che sia essenzialmente di rilevante peso per il *placement*, ovvero per il collocamento nel mercato del lavoro.

Tale obiettivo è raggiungibile mediante l'acquisizione di saperi fondanti, che ne costituiscono i capisaldi.
Tali capisaldi, con riferimento all'accesso alle lauree economico-aziendali, possono essere schematizzati come segue:

- Teoria degli insiemi. Proposizioni, operazioni con le proposizioni, insiemi, operazioni con gli insiemi ed applicazioni.
- Insiemi numerici
- Potenze e radicali
- Algebra elementare (calcolo letterale: monomi, polinomi e prodotti notevoli, risoluzione di equazioni e disequazioni di primo e secondo grado, intere e fratte, sistemi di equazioni e disequazioni).
- Disequazioni algebriche razionali, irrazionali e con valori assoluti. Sistemi di disequazioni.
- Geometria cartesiana: punti e distanze; retta, circonferenza e parabola. Aree e volumi.
- Funzioni: Dominio, grafici e principali proprietà delle funzioni razionali, irrazionali, esponenziali e logaritmiche.
- Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

## Bibliografia

[1] E. AMBRISI: La matematica delle tavole degli apprendimenti. Science & Philosophy, 3(1), (2015) pp. 3-14.

[2] M. BELLA, S. CRISCUOLO, S. DI SANZO, G. GRAZIANO, L. MAURO, S. MELI, L. PATRIGNANI: Rapporto sulle economie territoriali. Rapporto Ufficio Studi Confcommercio, Marzo 2018

[3] Gazzetta ufficiale dell'Unione europea: Lo sviluppo del capitale umano per la coesione sociale e la competitività nella società dei saperi 5.12.2003

[4] F. HONSELL: Metodo scientifico e metodo democratico: un'endiadi per il progresso dell'umanità. In Matematica e democrazia, a cura di A. Guerraggio, EGEA (2014).

[5] M. NOSVELLI: La misurazione del capitale umano: una rassegna della letteratura. *WorkingPaperCeris-Cnr*, N° 2/2009.

[6] I. VISCO: Capitale umano, innovazione e crescita economica.

Convegno biennale del Centro Studi della Confindustria "Il capitale sociale: la forza del Paese" Bari 29/03/2014.

http://www.nuovi-lavori.it/index.php/economia/315-capitale-umano-innovazione-e-crescita-economica.

# La Matematica nella quotidianità[1]

## *Mathematics in everyday life*

***Giuseppe Zappalà***

**Abstract**

*The author goes over some moments in his education: his first experiences at school, his degree, his commitment to research and teaching. He describes his inclination towards sciences and mathematics which - far from dry and sterile - are sources of creativity, beauty and imagination. The author highlights their importance and pervasive presence in the day to day life of an educated person which aims at a comprehensive understanding of the world. The paper ends with an appendix where the author succeds in expressing mathematical formalism through the keys of an ancient typewriter.*

Imitando Nunzio Filocamo, famoso radiocronista all'epoca della mia prima giovinezza, ringrazio gli organizzatori vicini e lontani di questo Convegno che mi ha consentito di trascorrere intensamente, quasi un'intera giornata, assieme ad un pubblico molto qualificato di amici e giovani colleghi, ai quali spero di aver trasmesso un poco della mia esperienza, ed inoltre, preparando la presente relazione, ha fatto maturare la scelta di continuare ad occuparmi di matematica per il resto degli anni che DIO (non ho paura di pronunciare questa parola né di usare la d maiuscola) vorrà ancora concedermi. Chiudo questa introduzione mettendo in rilievo la squisita gentilezza della Preside dell'Istituto Vaccarini, la quale ha pure dimostrato di possedere tutte le doti del “Dirigente Illuminato”.

Il titolo “la matematica nella quotidianità” è molto stimolante e mi ha suggerito di cogliere, questa occasione, per mettere in risalto l'inconsistenza logica di alcuni pseudo-ragionamenti e sentenze fabbricati per denigrarla.

Chiedo scusa per il bisticcio di parole. Inizio (verbo) dall'inizio (sostantivo). La mia insegnante di lettere della scuola media incurante della lezione Pitagorica, secondo la quale i numeri (naturali) sono presenti in tutto

[1] Tema del Convegno Mathesis tenuto presso l’Istituto Vaccarini di Catania il 30 gennaio 2019. Si veda anche: http://www.mathesisnazionale.it/2019/02/11/matematica-e-quotidianita/.

ciò che ci circonda, non perdeva occasione per sentenziare, con evidente disprezzo: “la matematica è la materia dei venditori ambulanti”.

Indispettita dal fatto che la sorte le aveva assegnato, per sua disperazione, una classe con due ragazzini bravi in matematica, materia alla quale andavano le loro preferenze lasciando, nelle retrovie, la lingua latina che una legislazione infelice aveva posto, a quei tempi, al vertice (superiore) di tutti i processi riguardanti l'istruzione pre-universitaria.

Passato al superiore, divenuto allievo di un istituto chiamato ironicamente liceo scientifico, il quale altro non era che una sbiadita copia sia del FISICO MATEMATICO che del LICEO CLASSICO; ho conosciuto ben 4 insegnanti di lettere italiane e latine tre dei quali, ben allineati con la collega di cui sopra, ci ripetevano, ad ogni piè sospinto e con grande monotonia, la frase: “la matematica è arida e astratta” (sottinteso: quindi fa schifo). Ben messa in rilievo anche nel nostro libro di letteratura italiana e seminata, in tutti i testi analoghi che mi sono capitati per le mani, alla voce L. Mascheroni, un poeta che non disdegnava la matematica e famoso, secondo l'Enciclopedia, per essere autore di un elegante poemetto didascalico dal titolo “Invito a Lesbia Cidonia”.

Secondo il Dizionario della lingua italiana, la parola “arido” è un aggettivo che si usa spesso per classificare un terreno che non produce nulla, al suo posto si può usare “sterile” e mi dispiace per chi ama appiccicarlo alla scienza dei numeri, a costoro debbo attribuire perlomeno la qualifica di “male informati”. Altro che sterile! la matematica è uno de settori più prolifici della ricerca scientifica in tutte le parti del mondo, le biblioteche degli Istituti competenti hanno serie difficoltà ad accogliere periodicamente i fascicoli delle riviste specializzate nonostante la proliferazione delle cosiddette riviste “on line”. Inoltre non va dimenticato che dalla scienza del come e del perché provengono, o sono alimentati e sostenuti: “Fisica”, “Fisica-Matematica”, “Astronomia”, “Statistica”, “Calcolo delle probabilità”, Scienza e Tecnica delle Costruzioni, “Informatica”, “Matematica Finanziaria”, “Matematica Attuariale”, “Teoria della Relatività”, “Econometria”, “Meteorologia” ed altre discipline che non nomino solo per brevità.

Se con “sterile” si vuole indicare che “non produce sentimenti”, quella parola è ancora fuori posto; la matematica è amata da chi la coltiva e odiata da persone il cui sistema nervoso non consente studi così impegnativi o, peggio ancora purtroppo, da molte persone coltissime le quali, seguendo giustamente le loro attitudini, hanno scelto studi umanistici. Ma attenzione, si dà il caso che l'amore e l’odio siano moti dell'animo. Un matematico prova soddisfazione quando dimostra un nuovo teorema o introduce una nuova definizione e, ancora di più, se si rende conto di aver aperto un nuovo filone di ricerca; e calma però, la delusione sta sempre in agguato. Infine se, per concludere, arida vuol dire soltanto “non trasmette emozioni e sentimenti” si rimane perplessi; la geografia e la filosofia (volendo anche la storia) non trasmettono emozioni e sentimenti eppure nessuno, per quanto mi risulta, ha mai osato definirle “aride”; e si aggiunga ancora che la matematica, al contrario di quello che si crede, può essere anche molto divertente, caratteristica in possesso di poche altre discipline. Provare per credere, consiglio a tutti di procurarsi una copia del saggio “UN CAVALLO CHE GUIDA UNA MACCHINA”, edito dalla Aracne, nessuno se ne pentirà.

Quanto all'altro attributo “astratta” neppure questo può essere ragionevolmente impiegato con la finalità di squalificare la scienza di Talete infatti, sul Dizionario della lingua italiana, la parola astratto usata per fini denigratori vuol dire: di poca o nessuna pratica utilità. Niente di più sbagliato! Il venditore ambulante, nell'esercizio della sua modesta professione, calcola cliente per cliente il costo della spesa e, a fine giornata, il ricavato. Similmente si comporta un qualsiasi imprenditore; per costruire una scala con le rampe rettilinee, il tecnico progettista applica il teorema di Talete sulle rette parallele. Mio padre, che gestiva un'impresa artigiana, quando doveva sagomare una vite al tornio oppure qualche ingranaggio alla fresatrice, faceva dei calcoli per scegliere le ruote dentate adatte a stabilire un rapporto costante fra la velocità di rotazione del pezzo e la velocità di traslazione dell'utensile, nel primo caso, nel secondo il pezzo traslava mentre l’utensile ruotava. Il geometra, il ragioniere, il perito industriale, l'ingegnere edile esercitando le rispettive professioni adoperano la matematica, lo stesso perito agrario la utilizza, magari con minor frequenza, quando deve misurare l’estensione di un terreno o quando progetta una casa colonica. I mezzi di trasporto e le infrastrutture ad essi destinati vengono costruiti dopo studi accurati, i loro progettisti consegnano, ai tecnici delle rispettive maestranze, i disegni assieme ai risultati dei calcoli precedentemente sviluppati. Ma non basta, autobus, treni, navi, aerei di linea si muovono seguendo orari stabiliti e, per quelli che non si muovono su sedi fisse, le rispettive traiettorie vengono programmate ogni qualvolta entrano in servizio. L'energia elettrica che giunge nelle nostre case è, per lo più, prodotta nelle apposite centrali, termiche, idroelettriche e nucleari per la cui costruzione e funzionamento, si può ripetere quanto già detto qualche rigo fa e quella che proviene dalle fonti rinnovabili, qualcosa alla matematica glielo deve pure lei.

Un libro a me molto caro “motori endotermici alternativi” del Prof. Ingegnere Dante Giacosa, storico progettista capo della Fiat, è pieno di matematica e Fisica. Adottato in molti Istituti Tecnici Industriali, faceva bella mostra nelle biblioteche private di molti ingegneri, conoscendolo bene si può progettare un “motore fatto in casa”. Anche le giornaliere previsioni del tempo, un programma televisivo molto seguito, vengono ottenute mediante l'impiego di opportuni modelli matematici, si parte dalle equazioni della dinamica dei fluidi e si cercano soluzioni, nel campo discreto, col metodo delle differenze finite. Anni fa, gli appassionati delle regate, rimasero esterrefatti nell'apprendere che la “Coppa America” era stata vinta da un veliero progettato usando i più raffinati metodi matematici allora disponibili. Ma non si deve dimenticare che pure i governi delle nazioni hanno un grande bisogno delle scienze derivate da quella tanto derisa. Non è male ricordare che, secondo Napoleone Bonaparte, “la prosperità dei popoli dipende dai progressi delle matematiche”.

Reputo sufficienti, le osservazioni precedentemente elencate, per concludere che quella espressione verbale non è molto intelligente, un errore che si può perdonare all'autore solo se non era un filosofo, in tal caso avrebbe tradito l'ideale di Talete, e se ha acquisito altri meriti. Certamente sarà stato un intellettuale che fa rima con superficiale, però non mi sento di perdonare quanti, per far sfoggio di cultura, per vanità o per darsi delle arie, se ne sono appropriati. Nessun castigo per carità, non tifo per il pensiero unico, ciascuno ha il diritto di pensarla come vuole, giudico sufficiente una buona spiegazione.

Un'altra infamia, meno pomposamente formulata e che serpeggia strisciando, va respinta con altrettanta decisione e consiste nell'affermare che la matematica è un cumulo di rigide regole che vanno applicate con rigide procedure. Secondo questo bizzarro modo di ragionare, sarebbe auspicabile che, ad esempio, il teorema di Pitagora venisse enunciato nel modo seguente “In ogni figura piana che assomiglia ad un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui cateti si può considerare quasi uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa”.

A quei detrattori che, alle accuse precedenti, aggiungono quest'altra “il rigore della matematica mortifica la fantasia”, dedico una riflessione di David Hilbert (un gigante del pensiero vissuto a cavallo del XIX e XX secolo; fu grande matematico, fisico teorico e filosofo della matematica).

Dal testo “Analisi matematica” di G.E. Silov: “Hilbert- Ah, quello là. Ma certo che lo conosco. Una volta è stato uno dei miei allievi. Dopo è diventato poeta: evidentemente gli è mancata la fantasia necessaria per dedicarsi alla matematica”.

E aveva ragione, senza di quella l'invenzione dei numeri naturali non sarebbe mai avvenuta, le stesse figure geometriche sono immagini idealizzate di cose reali, ovvero delle astrazioni e ci si deve convincere che il passaggio dal contingente alla perfezione e all'eternità delle idee, rappresenta la massima espressione dell'attività cerebrale, quella che, per l'appunto, si chiama fantasia e per fare matematica di fantasia ne occorre proprio tanta e non solo per la stessa scienza ma anche, come si suol dire, per l’indotto, posso affermarlo per esperienza. Negli “anni 50” per sostenere gli esami di laurea nella mia Facoltà, agli studenti con la media dal 27 in su, si richiedeva la presentazione di 3 elaborati scritti a macchina, una tesi e due tesine, che sarebbero stati oggetto di discussione. Per due di essi mi sono affidato ad una copisteria che lasciò, alla mia penna, il compito di completare le formule ove era richiesto il simbolo dell'integrale e quello delle derivate parziali. Per il terzo sono riuscito a scriverlo con la mia "Olivetti lettera 22", utilizzando anche simboli di mia invenzione, fu un successo e oggi, dopo 6 decenni, ci riprovo descrivendo, in appendice, la base teorica della "teoria elettromagnetica" della luce. Stavolta utilizzerò l'apostrofo "per indicare le derivate prime, le virgolette" per le derivate seconde, invece delle potenze scriverò moltiplicazioni e userò le basi di quelle per eseguire le estrazioni di radice; alla fine dedicherò alcune righe per elencare le stesse formule elaborate mediante il WORD.

Dalla laurea alla prima classe di collegamento; un giorno, mentre stavo per completare la risoluzione del seguente problema: "Un gioielliere deve mettere in uno scatolo 125 pietre preziose di due tipi diversi, diamanti e rubini, nella proporzione di 4 rubini per ogni diamante. Finita l'operazione, quanti rubini e quanti diamanti ci sono nello scatolo?" venne a farci visita uno zio commerciante col pallino dei numeri il quale, dopo aver visto l'equazione risolvente x+4x=125, osservò subito che era sufficiente dividere semplicemente il numero totale delle pietre per 5 e quindi ottenere 25 diamanti e 100 rubini. Qualche mese dopo, studiavo i sistemi a due incognite, ho risolto lo stesso quesito mediante il sistema: x+y=125; x-4y=0 o (x=4y), provando i 4 metodi classici, se poi si tiene conto che il metodo di sostituzione si può applicare a scelta, partendo da 4 posizioni diverse, nasce l'opportunità di selezionare sia il metodo che il punto di partenza più favorevoli e, per far questo, serve un po' di fantasia, più di quanto si creda.

Chiuso l'argomento ne apro un altro. L'oggetto che, certamente, darà il nome all'epoca convulsa che stiamo vivendo, è il telefonino. Pochi prodotti industriali hanno subito una evoluzione così tumultuosa e si sono diffusi così celermente in tutti i continenti e in tutti gli strati delle società, come il telefono tascabile. Il quale, da semplice ricetrasmittente, è divenuto calcolatrice, archivio, macchina fotografica e molte altre cose ancora. Per un signore, conosciuto poco tempo fa, si deve all'italiano Guglielmo Marconi il grande merito di aver aperto il filone della corrispondente tecnologia e fu, quasi, sconvolto nell'apprendere che il primo gradino, di questa scala divenuta vertiginosa, è solidissimo perché sostenuto da una robustissima base Matematica: le equazioni di Maxwell (1873) e quella delle onde acustiche del francese D'Alembert. Le prime legano la intensità del campo elettrico E alla intensità del campo magnetico H, (supposti entrambi variabili), in ogni regione dello spazio ove queste agiscono simultaneamente, ad esse va aggiunta la seconda (già scoperta in acustica). Da queste equazioni lo stesso Autore dedusse, in teoria, l'esistenza delle onde elettromagnetiche le quali, propagandosi nei mezzi trasparenti con la stessa velocità della luce, ispirarono la teoria elettro-magnetica delle radiazioni luminose.

Fu verso la fine del XIX secolo che un fisico teorico e sperimentale, il tedesco Hertz, costruì due essenziali congegni: uno per emettere, l’altro per ricevere le onde (elettromagnetiche) previste teoricamente dallo scozzese. Fu poi il turno di G. Marconi (inventore italiano) il quale, per niente intimorito dall'ipotesi, prima teorica e poi verificata sperimentalmente, che le onde di Maxwell sono capaci di generare fenomeni luminosi, per provare la possibilità di trasmettere segnali a lunga distanza, dopo opportune modifiche, pose l'emittente in un continente e il ricevitore in un altro, in modo che nessuna retta potesse congiungerli senza intersecare la crosta terrestre. L'ingegno assieme al coraggio, in quella occasione, vinsero la sfida. Per approfondire questo aspetto, può essere sufficiente consultare il II volume dell’ENCICLOPEDIA GARZANTI, Milano 1967.

**Appendice**

**Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche**

In una regione dello spazio vuoto, riferito ad una terna ortogonale cartesiana Oxyz, per ipotesi, coesistono due campi vettoriali variabili: 1)Un campo elettrico di intensità E(x,y,z;t), 2) un campo magnetico di intensità H(x,y,z;t). L'interazione fra i due campi è espressa dal sistema di equazioni di Maxwell le quali, in un dielettrico omogeneo con costante dielettrica rr(=r al quadrato) e permeabilità magnetica pure costante mm(=m al quadrato), privo di correnti e di cariche elettriche, sono :

(1) divergenza di E=0; (2) rotore di E=-mmH't; H't = derivata parziale di H rispetto a t [secondo, in] t;

(3) divergenza di H=0; (4) rotore di H=rrE't; E't= derivata parziale di E in t.

Considerando E=E(t,x) e pure H=H(t,x), ovvero se si suppone che i due vettori dipendono soltanto da x e da t, essi sono costanti su ogni piano ortogonale all'asse x e pertanto le derivate parziali delle componenti Ey,Ez,Hy,Hz dei vettori suddetti, rispetto alle variabili y e z, sono nulle. Quindi dalle (1) e (3) si ottengono:

(5) (Ex)'x=(derivata di Ex in x)=0; (6) (Hx)'x =(derivata di Hx in x)=0 rispettivamente, mentre da (2) e (4), nell'ordine, si deducono i sistemi:

(7) (Hx)'t = (derivata di Hx in t)= 0; (Ez)'x = (derivata di Ez in x) = mm(Hy)'t; (Ey)'x = -mm(Hz)'t;

(8) (Ex)'t = 0; (Hz)'x = -rr(Ey)'t; (Hy)'x = rr(Ez)'t.

Derivando la seconda delle (7) rispetto ad x e la terza delle (8) rispetto a t e poi eliminando la componente Hy si ottiene un'equazione del tipo D'Alembert:

(9) (Ez)"x=(derivata seconda di Ez in x) =mmrr(Ez)"t; (Ez)"t=derivata seconda di Ez in t.
Sinteticamente, introducendo la funzione incognita Z e assumendo mmrrvv=1:
(10) vvZ"x = Z"t equazione a cui soddisfano anche Ex,Ey,Ez,Hx,Hy,Hz.
**Teorema 1**. La funzione M=F(x-vt)+G(x+vt) ove: 1) v=mr=velocità della luce, 2) F e G sono definite su tutte le coppie ordinate di numeri reali, 3) F e G sono arbitrarie, continue e dotate di derivate seconde; è soluzione dell'equazione di D'Alembert, infatti :

(11) M"x=(derivata seconda di M in x) = [F(x-vt) +G(x+vt)]"x= derivata seconda di [F+G] in x,
(12) M"t=(derivata seconda di M in t) = vv[F(x-vt)+G(x+vt)]"x = vvM"x
quindi la coincidenza:
(13) vvM"x= coincidente con =M"t. c.v.d..

**Espressione tradizionale delle formule precedenti**

$$(1)\ divE = 0; \quad (2) rotE = -m^2 \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (3) divH = 0; \quad (4) rotH = r^2 \frac{\partial E}{\partial t};$$

$$(5)\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \quad (6) \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0;$$

$$(7)\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = m^2 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -m^2 \frac{\partial H_z}{\partial t};$$

$$(8)\ \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -r^2 \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = r^2 \frac{\partial E_z}{\partial t};$$

$$(9)\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 x} = m^2 r^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 t}; \quad (10) v^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 t};$$

$$(11) \frac{\partial^2 M}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x};$$

$$(12) \frac{\partial^2 M}{\partial^2 t} = [\frac{\partial^2 F}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 t}] = v^2 [\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x}] = v^2 \frac{\partial^2 M}{\partial^2 x}.$$

**Onde progressive e onde retrograde**

Sia Z(t,x)=F(x-vt) una funzione definita per tutte le coppie ordinate di numeri reali, scelto t=r la Z=Z(r,x) rappresenta una curva del piano Oxz. Per t=0 si ha Z(0,x)=F(x) che supporremo, per semplificare, definita in tutto l'asse reale e crescente, se ne tracci il grafico T.

Fissato x e quindi il punto P[x,F(x)] di T si vuole determinare il punto Q sulla curva T'=Z(t',u) tale che abbia la stessa ordinata di P, essendo t'=(leggasi t primo) > 0.

**Teorema 2.** Se u=x+vt' allora risulta F(u-vt')=F(x). Infatti sostituendo x+vt' al posto di u nella funzione Z(t',u)=F(u-vt') si ha:
(14) F(u-vt') = F(x+vt'-vt')=F(x). c.v.d.

Quindi il punto Q ha per ascissa x+vt'> x. Attribuendo a t il significato di tempo, si può dire che, nel tempo t', il punto P ha raggiunto la posizione Q mediante lo spostamento vt', avvenuto sulla parallela all'asse x passante per la sua posizione iniziale e nel verso positivo dell'asse x. Questa conclusione valida per tutti i punti della curva T, autorizza a definire la funzione Z=F(x-vt) un'onda progressiva e, similmente, Z=G(x+vt) onda retrograda.

In generale, scelti due istanti t' e t", perché si abbia F(x'-vt')=F(x"-vt") è necessario e sufficiente che x'-vt'=x"-vt" ovvero che x"-x'=v(t"-t'), pertanto se t' < t" allora Tt"(T relativa a t") si ottiene da Tt'(T...t') mediante la traslazione, punto per punto, di v(t"-t') > 0 nel verso positivo dell'asse x.
Se la funzione-tipo della famiglia Z=F(x-vt) è non crescente, si perviene alla stessa conclusione, con ragionamenti dello stesso tipo ma più complicati.

**Formule matematiche e linguaggi di composizione**
Si sa che, per comporre formule matematiche, esistono opportuni programmi, avendo già fatto notare quanto sia benefico l'apporto della fantasia nell'inventare quella scienza; tenuto conto che quanto esposto sulle onde elettromagnetiche è noto da tempo, ho voluto provare, nell'epoca dominata dai computers, che alcune formule matematiche relative ad argomenti particolari, possono scriversi anche usando una vetusta “lettera 22”.

**Bibliografia**
[1] ENCICLOPEDIA FELTRINELLI FISCHER, Fisica, Feltrinelli, Milano 1968,
[2] B. FINZI Teoria dei Campi, Tamburini Milano 1958,
[3] L. LANDAU ET E. LIFCHITZ, Thèorie du champ, Edition de la paix, Moscou 1970,
[4] G. MORETTI, Analisi Matematica vol. II parte seconda, HOEPLI, Milano 1969,
[5] E. PERSICO, Introduzione alla Fisica Matematica, Zanichelli, Bologna 1965,
[6] E. PERUCCA, Fisica Generale e Sperimentale II, UTET, Torino 1949,
[7] G.E. SILOV, Analisi matematica Funzioni di una variabile, M.I.R. Mosca 1980.

# I sistemi complessi e l'anima umana: più che una metafora

# *Complex systems and the human soul: more than a metaphor*

***Bruno Carbonaro - Marco Menale***[1]

**Abstract**

*Inthispaper, we aim to suggest a possible way to apply the language and some methods of mathematics (and in particular of mathematical physics) to the description and the analysis of human psychology. More precisely, we try to describe human soul as a complex system, in the sense and in the perspective proposed in recent developments of a new phenomenological theory which has proved to be widely applicable to socio-economic and biological and behavioural problems and is known as the Kinetic Theory for Active Particles (KTAP).*

A dispetto dell'attuale diffusione di convegni e lavori interdisciplinari sugli interventi della matematica nelle scienze umane [4, 11, 12, 14], e su come queste possano riferirsi ad essa o farvi ricorso, al di là dei tentativi di precisare in termini quantitativi considerazioni che per natura ed oggetto nascono e si presentano come essenzialmente qualitative [9], l'idea che la matematica possa avere un ruolo teorico e concettuale nello studio della psicologia può senza dubbio ancora apparire –e senza dubbio a non pochi studiosi, sia psicologi che matematici, appare– alquanto peregrina. Sino a poco tempo fa, in effetti, l'intervento della matematica nella psicologia (e soprattutto in psichiatria, *a valle* della definizione dei diversi caratteri psicologici) passava attraverso l'applicazione, e sovente attraverso l'intelligente elaborazione, del linguaggio e dei metodi della Statistica matematica [9]. Soltanto di recente, ad opera di studiosi di grande rilievo come Matte Blanco [13], ha cominciato ad affiorare l'idea che la *psiche* e le

[1] Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania «Luigi Vanvitelli», viale A. Lincoln, 5 - 81100 Caserta; e-mail: bruno.carbonaro@unicampania.it, marco.menale@unicampania.it.

sue riconosciute componenti potessero rappresentarsi come oggetti matematici. Ma ora, da questa all'idea che le loro relazioni possano studiarsi e descriversi con metodi rigorosamente logico-formali, nell'ambito di opportuni sistemi ipotetico-deduttivi ("modelli matematici"), il passo dovrebbe risultare breve.

E d'altra parte, l'attuale sviluppo della Fisica Matematica, che di giorno in giorno si spinge sempre più oltre i confini dei problemi tradizionali della Fisica, e già da circa trent'anni riconosce l'efficacia di alcuni dei suoi linguaggi e schemi nell'indagine di problemi biologici [2, 3], socio-economici [10] e riguardanti il comportamento di grandi assembramenti di individui in particolari condizioni ambientali, sembra dare un'ulteriore spinta in questa direzione (e in effetti, sia detto di passata, la parola "fisica" –in vista del significato ristretto che le è stato attribuito nei secoli dalla *Fisica* di Aristotele in poi– risulta alquanto fuorviante rispetto alla definizione di ciò che *dovrebbe* essere l'oggetto della Fisica Matematica: il vero significato di questa parola è «riguardante la natura», ed è fuor di dubbio che comportamenti, pensieri, pulsioni e sentimenti rientrano nel novero dei fenomeni naturali).

Questo sviluppo è stato reso possibile dalla nascita, nel secolo XIX, della Teoria Cinetica dei Gas e della Meccanica Statistica, entrambe basate su una concezione rigorosamente "atomistica" dell'universo materiale, che forniva una motivazione a ricondurre i fenomeni termodinamici a quelli meccanici, e in particolare sull'idea che una massa fluida di densità sufficientemente bassa (i gas nel loro stato naturale, appunto) debba considerarsi come un insieme di moltissimi corpuscoli rigidi (particelle) interagenti tra loro e con l'ambiente esterno (tipicamente, le pareti del recipiente che li contiene tutti). Questa prospettiva diede l'impulso alla costruzione di un vero e proprio linguaggio matematico formale capace non soltanto di descrivere rigorosamente i problemi che essa poneva, ma anche di strutturare i metodi capaci di risolverli. Nel frattempo, i più o meno contemporanei sviluppi della Statistica Inferenziale applicata ai problemi sociali, politici, clinici (in particolare, epidemiologici) e biologici mettevano in evidenza come tutto un universo di problemi tradizionalmente considerati estranei al dominio della Fisica (matematica) riguardava di fatto il comportamento di insiemi molto numerosi di individui di natura diversa. Ora, le variabili che descrivevano tale comportamento nell'ambito della Meccanica Statistica erano, appunto, le sole variabili meccaniche o, più precisamente, cinematiche, posizione e velocità. Ma si poneva (e si pone) spontaneamente la domanda: ma cosa impedisce di sostituire queste variabili con altre, dettate di volta in volta dai problemi che desideriamo affrontare, e, una volta eseguita la sostituzione, di applicare anche a tutti questi problemi i metodi della Meccanica Statistica?

La risposta immediata e intuitiva a questa domanda è ovviamente: nulla. Ci sono, è vero, due difficoltà di fondo, la prima *a monte* della sostituzione, e cioè (specialmente in quelle discipline nelle quali i fenomeni si descrivono tradizionalmente in termini puramente qualitativi) la definizione delle variabili appropriate, e l'altra a *valle*, e cioè l'esplicita formulazione della dipendenza delle loro variazioni dalle interazioni tra le particelle-individui; ma la prima è chiaramente di competenza degli studiosi delle varie discipline, ed è logicamente *precedente* allo scopo di adottare lo schema della Meccanica Statistica, poiché dipende da un'esigenza di quantificazione che prescinde da questo, pur se collegata all'uso di strumenti statistici; la seconda, come vedremo in particolare nella Sezione 3, è risolta proprio dal tipo di formulazione statistica che si vuole adottare. Ed è proprio questa circostanza che rende lo schema meccanico-statistico estremamente versatile ed ha prodotto, con particolare impulso a partire dagli anni Ottanta e Novanta del secolo XX, una vasta letteratura riguardante le applicazioni in corso [1-6,10] (cfr. in particolare [10] per una bibliografia ragionevolmente completa). Essa prospetta la possibilità di interventi sempre nuovi in un numero sempre maggiore di problematiche e, in particolare, ci ha suggerito quella della proposta che qui presentiamo. In proposito, sembra particolarmente importante aggiungere che la prospettiva statistica della Meccanica da un lato consente (cfr. Sezione 3) una definizione abbastanza chiara di «complessità» di un sistema di particelle-individui, dall'altro ne è motivata. Ora, probabilmente siamo tutti d'accordo sul fatto che l'anima umana è «complessa» in qualche senso. Speriamo di mostrare come una descrizione nei termini della Meccanica Statistica possa almeno suggerire un significato preciso per questa affermazione.

Nel seguito, richiameremo dapprima brevemente, nella Sezione 2, le origini logiche della prospettiva statistica in meccanica, e– nel suo ambito – la struttura e il significato generale dell'equazione di Boltzmann, che, opportunamente modificata e reinterpretata, si rivelerà lo strumento più potente per le applicazioni; nella Sezione 3, illustreremo lo schema generale modificato ed esteso, con la considerazione della *complessità*; infine, nella Sezione 4 delineeremo alcuni suggerimenti per una possibile applicazione dello schema alla psicologia.

## 1 La Meccanica Statistica e l'equazione di Boltzmann

Come già accennato, nella prospettiva della Meccanica Statistica (classica) ogni fluido a bassa densità (tipicamente, un gas contenuto in un recipiente) deve considerarsi come un insieme, detto «sistema», di particelle che si muovono liberamente ciascuna rispetto a tutte le altre; ogni particella si riguarda come un punto materiale, il cui «stato» è espresso da un vettore $\mathbf{u}$ a sei componenti, le sue tre coordinate in un assegnato sistema di riferimento, e le tre componenti della sua velocità. Le interazioni tra le particelle saranno poi di due tipi: quelle a distanza (attrazione gravitazionale e, se le particelle sono cariche, le forze elettromagnetiche) e *gli urti* vicendevoli, che si verificano allorquando due particelle giungono nella stessa posizione. E, ovviamente, ciascuna particella può interagire negli stessi modi con l'ambiente esterno (ad esempio, le pareti del recipiente). Nello schema classico, deterministico, se $N$ è il numero delle particelle del sistema, e indichiamo con $\mathbf{u}_i$ lo stato dell'$i$-esima particella ($i$ = 1,2, … , $N$), la conoscenza completa dello stato del sistema (ad ogni istante) equivale a quella della $N$-upla ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, … , $\mathbf{u}_N$) dei vettori di stato, e ciò, almeno in linea di principio, può ottenersi *osservando* tale stato *in un assegnato istante* $t_0$ e risolvendo un sistema di equazioni differenziali della forma

$\mathbf{u}'_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N, t)$, $(i = 1,2, \dots, N)$, $(t\varepsilon\, [t_0,+\infty))$,

(dove l'apice significa derivazione rispetto al tempo) sotto le condizioni iniziali

$\mathbf{u}_i(t_0) = \mathbf{u}_{i0}$,

dove $\mathbf{F}_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N, t)$ esprime l'azione complessiva esercitata sull'$i$-esima particella del sistema dall'ambiente esterno e da tutte le altre al generico tempo $t$, e gli $\mathbf{u}_{i0}$ sono gli stati delle particelle *osservati* al tempo $t_0$. Ma è ben noto [8, 15] che già per $N$ = 3 questa procedura è puramente teorica e impossibile da realizzare, non solo e non tanto per la difficoltà di osservare con precisione gli stati iniziali (la gestione di questo tipo di errori fa parte dello schema), ma per l'impossibilità di risolvere il sistema di equazioni; per $N$ grande, tutte queste difficoltà si aggravano: è stato osservato che, ammesso che il precedente sistema di equazioni e condizioni iniziali possa risolversi effettivamente, magari con l'aiuto di un computer sufficientemente potente, il tempo richiesto per fornire ad esso tutti i dati necessari finirebbe con l'essere (per un $N$ realistico) maggiore della durata di una vita umana [8].Sembra dunque necessario abbandonare lo schema deterministico e, soprattutto, la pretesa di conoscere e *prevedere* completamente gli stati di tutte le particelle del sistema. Ci troviamo, in effetti, in una situazione analoga a quelle che hanno dato origine ai metodi statistici (per esempio, quando si studiano i rapporti di causalità tra condizioni di vita ed incidenza di particolari malattie), e siamo quindi indotti ad assumere un atteggiamento statistico: invece di precisare gli stati delle singole particelle, scegliamo degli *indicatori* dello stato complessivo del sistema, come le medie aritmetiche, o le mode (i valori più probabili) sugli insiemi di possibili valori per le coordinate della generica particella del sistema, e per le componenti della sua velocità, e per qualsiasi funzione di queste variabili che possa risultare interessante ed arricchire la nostra conoscenza del sistema, e cerchiamo di giungere alla formulazione di leggi di evoluzione per questi indicatori, e di equazioni che ne descrivano le relazioni.

Un passo fondamentale per la valutazione di qualsiasi indicatore statistico che dipenda dai valori possibili per lo stato $\mathbf{u}$ è la conoscenza della *distribuzione* dei valori di $\mathbf{u}$ sulle $N$ particelle del sistema, cioè la frequenza relativa di ciascun valore, la percentuale di particelle che si trova in ciascuno stato o, ciò che è lo stesso, per ogni **u**, la probabilità $P(\mathbf{u})$ di trovare "per caso" una particella del sistema nello stato **u**. Questa probabilità varia nel tempo per effetto delle interazioni tra le particelle, e perciò va considerata una funzione del tipo $P(\mathbf{u},t)$.

Una legge di evoluzione per $P(\mathbf{u},t)$ è dunque l'obiettivo più importante che si possa e si debba raggiungere per ottenere una descrizione statistica completa e significativa del sistema. Una tale legge fu proposta e discussa da Ludwig Boltzmann (cfr. [8, 15]). Essa, in una versione estremamente semplificata e schematica, ha la forma

$P_{,t}(\mathbf{u},t) + \mathrm{div}(P\boldsymbol{v}) =$ *termine collisionale* .

In questa equazione, si è esplicitato lo stato **u** come coppia (posizione, velocità) cosicché $\mathbf{u}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$, e il termine collisionale tiene conto di tutti i probabili urti delle particelle a due a due. Come vedremo nella Sezione 3, in un contesto più generale sotto il profilo delle applicazioni, ma semplificato riguardo alla struttura matematica, esso rende conto tanto degli urti che portano nello stato **u** particelle che sono in altri stati al momento dell'urto quanto di quelli che *rimuovono* dallo stato **u** le particelle che vi si trovano.

Con ciò, sia per i limiti di spazio imposti a questa esposizione, sia in vista dei nostri scopi, dobbiamo però ritenere questi brevi richiami sufficienti a chiarire l'origine dello schema che svilupperemo nella Sezione 3 e di cui tenteremo di suggerire l'applicabilità ai problemi psicologici.

Quello che ci premeva sottolineare a questo punto è che l'adozione di un tale schema probabilistico svincola dalla postulazione di leggi di forza analoghe a quelle che compaiono nei problemi trattabili nell'ambito dello schema deterministico, e dà la possibilità di ampliare il dominio delle applicazioni del modello considerando sistemi di particelle-individui i cui stati non siano descritti (soltanto) da parametri cinematici, posizione e velocità, ma (anche) da altri parametri. Questo dovrebbe risultare molto più chiaro nella Sezione che segue.

## 2 Lo schema probabilistico per sistemi generici

In questa Sezione, avendo sia pur superficialmente ricordato le origini e la struttura dello schema che intendiamo utilizzare, e l'equazione che da esso discende, cambieremo radicalmente prospettiva: da un lato mostreremo come lo schema (con la conseguente equazione) possa essere opportunamente reinterpretato ed applicato a una vastissima classe di sistemi e problemi di diversa natura *non* meccanica; dall'altro vedremo come la reinterpretazione, elaborata nei modi più appropriati ai nuovi problemi, possa condurre a una semplificazione.

Consideriamo dunque, per cominciare, un sistema S di oggetti di natura qualsiasi. Potrà trattarsi di particelle, ma anche di cellule di un tessuto vivente, di animali o esseri umani, studiati all'interno di collettività opportunamente definite in base all'origine empirica del problema che si intende affrontare (una sufficiente varietà di esempi può trovarsi in [Belca, Belfo, Out, Belosc]). $S$ si suppone finito ma, esattamente come nel caso meccanico, la sua cardinalità $N$ si supporrà molto grande. In prima approssimazione, si assumerà che tutti gli elementi di $S$ (che d'ora in avanti di diranno «individui», con riferimento alla varietà delle interpretazioni) condividano una stessa proprietà *misurabile,* esprimibile tramite una grandezza scalare (riferendoci all'esempio delle cellule, questa proprietà può identificarsi come uno stato di attività più o meno intensa; nel caso di esseri umani, secondo il contesto, potrà essere il potere economico, oppure il livello culturale, etc.), che denoteremo $u$. Nella nostra ipotesi, $u$ varierà su un intervallo reale (eventualmente tutto **R**) che indicheremo col simbolo $I_u$. Nella prospettiva probabilistica illustrata nella Sezione 2, assumendo che le grandezze cinematiche siano irrilevanti nel fenomeno in studio, il termine di divergenza scompare dall'equazione, che assume la forma

$$P_{,t}(u,t) = \textit{termine collisionale}\ ,$$

e dobbiamo esplicitare il termine che abbiamo chiamato ancora «collisionale» ma che, più in generale, dovrebbe essere chiamato «termine di interazione», ed esprime – tramite la legge delle alternative (si veda [7] per i dettagli) – la variazione di probabilità dovuta alle interazioni tra due individui, che ovviamente dipenderà (1) dalla frequenza delle interazioni, (2) dagli stati delle particelle interagenti, e (3) dalla distribuzione di probabilità (condizionata dall'interazione) sugli stati. Nel caso semplice in cui la variabile $u$ si possa supporre discreta, talché si possa porre $I_u = \{u_1, u_2, \dots , u_m\}$, l'equazione precedente si traduce nel sistema

$$P_{,t}(u_i,t) = \mathrm{I}_i(P) = \textit{termine collisionale} \qquad (i=1,\dots,m)$$

e, per ogni $i\ \varepsilon\{1,\dots,n\}$,il termine collisionale si può scrivere nella forma

$$\mathrm{I}_i(P) = -\sum\nolimits_{j\varepsilon\{1,\dots,m\}}\eta(u_i,u_j)\sum\nolimits_{h\varepsilon\{1,\dots,m\}}P(u_h;u_i,u_j)P(u_i,t)P_t(u_j,t) +$$

$$+\sum\nolimits_{h\varepsilon\{1,\dots,m\}}\sum\nolimits_{j\varepsilon\{1,\dots,m\}}\eta(u_h,u_j)P(u_i;u_h,u_j)P(u_h,t)P(u_j,t) =$$

$$= -P(u_i,t)\sum\nolimits_{j\varepsilon\{1,\dots,m\}}\eta(u_i,u_j)P(u_j,t) +$$

$$+\sum\nolimits_{h\varepsilon\{1,\dots,m\}}\sum\nolimits_{j\varepsilon\{1,\dots,m\}}\eta(u_h,u_j)P(u_i;u_h,u_j)P(u_h,t)P(u_j,t),$$

dove il termine $\eta(u_h,u_j)$ si dice «frequenza di interazione», e fornisce la probabilità che un individuo nello stato $u_h$ e uno nello stato $u_j$ interagiscano, il termine $P(u_i;u_h,u_j)$ fornisce la probabilità che un individuo nello stato $u_h$, interagendo con un altro individuo nello stato $u_j$, finisca nello stato $u_i$, e, ovviamente, ciascun termine $P(u_j,t)$ è la probabilità di trovare individui nello stato $u_j$ al tempo $t$. Conseguentemente, il primo addendo al terzo membro si dice «termine di perdita» poiché, come subito si constata [7], esprime la probabilità *congiunta* che un individuo si trovi inizialmente nello stato $u_i$, interagisca con un altro individuo che si trova in un qualsiasi stato, e finisca in un qualsiasi altro stato; il secondo si dice «termine di guadagno», poiché esprime la probabilità *congiunta* che si trovino coppie di individui in una qualsiasi coppia di stati, che interagiscano con altri individui in stati arbitrari e, in seguito all'interazione, e finiscano nello stato $u_i$.

Allorquando la variabile di stato è continua, le sommatorie sono ovviamente sostituite da integrali, e tutte le probabilità devono essere intese come densità di probabilità. Noi tuttavia non scenderemo in ulteriori dettagli nella descrizione di questo schema. Per completezza, ricorderemo soltanto che il precedente sistema può risolversi univocamente solo se ad esso si associano le condizioni iniziali

$$P(u_j,t_0) = P_0(u_j) \qquad (j=1,2,\ \dots\ ,m).$$

Inoltre, varrà la pena di sottolineare che il modello può essere ulteriormente generalizzato supponendo che il sistema $S$ sia unione di una $n$-upla $\{S_1, S_2, \dots , S_n\}$ di sottosistemi, detti «sottosistemi funzionali». In tal caso, il precedente sistema di equazioni andrà sostituito da una $n$-upla di sistemi di identica forma, uno per ciascun sistema, ma si dovrà tenere conto delle interazioni tra individui appartenenti a sottosistemi diversi (e in alcuni schemi descrittivi, come in quello che intendiamo delineare nella Sezione 4, sono le uniche che interessano, perché quelle tra individui appartenenti a uno stesso sottosistema sono nulle o comunque prive di interesse ai fini del modello). Questo produrrà alcune modifiche essenzialmente formali e marginali nelle equazioni riportate sopra. I sottosistemi funzionali saranno descritti da variabili di stato diverse (ciascuna contrassegnata dall'indice del sottosistema cui si riferisce), anche se condividono lo stesso significato nell'interpretazione e nell'applicazione del modello. Ad esempio, se il modello descrive l'evoluzione dell'intera popolazione animale di una data regione della Terra, suddivisa in specie predatrici e specie «prede», ciascuna specie (predatrice o preda che sia) si considererà un sottosistema funzionale, e se per ciascuna specie la variabile di stato si interpreta come la «vitalità» del singolo individuo, è ovvio che si tratterà della stessa variabile, con lo stesso *range* di valori, per tutti i sottosistemi. Tuttavia, per evitare ambiguità, la variabile $u_j$ denoterà la «vitalità» del generico individuo del sottosistema (specie) $S_j$. Se invece stiamo descrivendo un sistema socio-economico, e $S_1$e $S_2$sono rispettivamente la classe politica e la classe imprenditoriale in una data nazione, allora $u_1$ e $u_2$ si interpreteranno rispettivamente come «potere» e «ricchezza», e avranno differenti insiemi di possibili valori.

Allo schema probabilistico qui rapidamente illustrato d'ora in avanti ci riferiremo come al «modello KTAP», utilizzando l'acronimo del nome *Kinetic Theory for Active Particles*, che allude tanto alla sua origine nella teoria cinetica sia al fatto che vuole descrivere il comportamento di «particelle» il cui stato non è identificato (soltanto) da variabili cinematiche.

Per concludere, sembra particolarmente importante evidenziare che il modello KTAP, proprio in virtù della scelta di assegnare le interazioni e i loro effetti in termini stocastici anziché deterministici, risulta notevolmente efficace nella descrizione e nella predizione (probabilistica) dei cosiddetti «sistemi complessi». Una definizione precisa di questo tipo di sistemi, a quanto ne sappiamo, non esiste, e una descrizione sufficientemente completa richiederebbe molto più spazio di quanto sia concesso a una breve nota come questa. Qui ci limiteremo a ricordare che un sistema complesso possiede due proprietà particolarmente rilevanti: in primo luogo, le diverse interazioni di ciascuna particella $\mathbf{x}$ del sistema con un certo numero di altre particelle $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,…, $\mathbf{x}_n$, si influenzano a vicenda in maniera impredicibile, cosicché non è in linea di principio possibile separare l'azione di $\mathbf{x}_i$ su $\mathbf{x}$ da quelle delle altre; in secondo luogo, per effetto delle interazioni, le particelle non soltanto modificano il loro comportamento, ma anche il *modo di reagire* alle interazioni successive. Quest'ultima proprietà si descrive talvolta come una sorta di «apprendimento», che produce l'emergere di «comportamenti complessivi organizzati». Un esempio tipico che spesso se ne dà è quello dei formicai. Nessuna delle formiche, si suppone, «conosce» il progetto del formicaio, eppure contribuisce alla sua costruzione con le azioni appropriate, indotte da quelle delle altre formiche, presumibilmente in base ad «abitudini» di reazione alle interazioni createsi in milioni di anni di evoluzione.

## 3 La psiche umana come sistema complesso

La psiche umana è un sistema complesso? A patto di interpretare opportunamente la parola «sistema», è molto probabile che siamo tutti (psicologi e no) d'accordo sul fatto che la risposta a questa domanda debba essere affermativa. Tutti, nel regolare i nostri comportamenti, percepiamo in molte occasioni conflitti interiori, che in qualche caso ci paralizzano; e spesso proviamo, nei confronti delle nostre esperienze, emozioni contrastanti, che ci rendono talvolta quasi impossibile stabilire preferenze nette e prendere decisioni o, una volta che la decisione sia stata presa, tenere un comportamento coerente con essa. Probabilmente molti descriverebbero queste esperienze proprio come momentanei conflitti tra personalità, *individui* diversi che sembrano albergare insieme dentro di noi e che si contendono il dominio, o almeno la guida, del nostro comportamento.

È proprio questo sentire (presumibilmente) diffuso che –insieme con le considerazioni svolte, sia pur superficialmente, nelle Sezioni precedenti– suggerisce l'applicabilità del modello KTAP alla descrizione complessiva della psiche umana pensata come un tutto. Per dovere di cronaca, rileveremo che sono già statti fatti alcuni tentativi di applicare questo modello almeno ai *comportamenti* umani, e in riferimento a particolari casi di relazioni interpersonali [1,5,6]. Ma in questa nota, vogliamo proporre di spingerci molto più avanti su questa strada, e suggerire che il modello possa applicarsi alla psiche di un singolo, generico individuo (indipendentemente dalle sue relazioni e interazioni con altri), in quanto concepibile come un sistema complesso nel senso descritto nelle Sezioni precedenti.

In un tale schema, almeno in prima approssimazione, quelli che siamo soliti chiamare «stati d'animo» (rabbia, dolore, avversione, amore, … eccetera), che sappiamo spesso coesistere –e talvolta competere– anche in corrispondenza di una singola esperienza, potrebbero considerarsi come sottosistemi funzionali di uno stesso sistema $S$ che dovrebbe rappresentare la psiche nel suo complesso. L'intensità di ciascuno stato d'animo potrebbe essere espressa da una variabile di stato $u$. Convenendo di poter assegnare a questa variabile tanto valori positivi che negativi, stati d'animo solitamente considerati come antitetici sarebbero semplicemente gli estremi di variabilità di $u$ nell'intervallo corrispondente a un dato sottosistema funzionale. Più precisamente, e tanto per esemplificare, possiamo definire un sottosistema funzionale che chiameremo «disposizione affettiva» e denoteremo con $A$. Lo stato $u$ su $A$ potrebbe variare su un intervallo reale $[-a, a]$. I suoi valori negativi corrisponderebbero allora all'*avversione*, quelli positivi all'*amore.* Una distribuzione di probabilità simmetrica su $[-a, a]$ che abbia un'unica moda nel valore $u = 0$ rappresenterebbe *indifferenza*, mentre una distribuzione simmetrica su $[-a, a]$ bimodale, le cui mode siano $u_1 < 0$ e $u_2 > 0$, rappresenterebbe una condizione auto-conflittuale di compresenza di amore e avversione. E si possono dare, naturalmente, molti altri esempi, come il sottosistema funzionale $D$ con una variabile di stato il cui minimo valore esprima dolore, il valore nullo di nuovo indifferenza e il valore massimo piacere, e così via.

In questa prospettiva, le dinamiche che producono comportamenti emergenti sono interazioni tra stati d'animo diversi. Il tasso d'interazione $\eta(u_h,u_j)$ (dove stavolta i pedici identificano i sottosistemi funzionali, *non* valori discreti della variabile) e le probabilità di transizione $P(u_i;v_i,u_j)$ caratterizzeranno allora il particolare soggetto in esame, colui (o colei) le cui dinamiche psicologiche si vogliano interpretare e, almeno in senso probabilistico, predire.

Questo modello, che comunque –gioverà ribadirlo– si propone qui come puro spunto per successive approfondite analisi, presenta alcune ovvie difficoltà. In primo luogo, si può obiettare che il modello è basato più o meno esplicitamente sull'idea che ogni sottosistema funzionale sia un insieme di (numerosi) individui, cosicché ogni interazione tra sottosistemi è un'interazione tra differenti coppie di individui dell'uno e dell'altro. Questa, tuttavia, è un'obiezione facilmente confutabile, se si riconosce che la pluralità degli individui ha quale unico effetto l'identificazione delle probabilità con frequenze relative, e dunque ha importanza solo quando una tale identificazione sia necessaria per il problema in esame. In linea generale, nulla vieta che ciascun sottosistema funzionale contenga un unico elemento. Nel contesto dell'indagine psicologica, una tale identificazione risulta evidentemente pleonastica, e possiamo trattare le distribuzioni di probabilità come tali, senza fare ricorso alle frequenze relative.

Altre difficoltà sono invece di carattere interpretativo e riguardano essenzialmente il numero e l'identificazione più opportuna dei sottosistemi funzionali, ed è ben difficile che possano essere affrontate e risolte dai soli matematici, senza il supporto di psicologici esperti. Sotto il profilo matematico, tuttavia, è particolarmente importante domandarsi se occorra distinguere tra stati d'animo consci e inconsci (raddoppiando di fatto il numero di sottosistemi funzionali), oppure tale distinzione risulti inutile nel modello KTAP. Ma, ancora più importante per una seria applicabilità del modello, e più delicata dal punto di vista matematico, è l'osservazione che probabilmente i parametri $\eta(u_h,u_j)$ e $P(u_i;v_i,u_j)$ andrebbero considerati funzioni delle circostanze o, se si vuole, degli stimoli che innescano i conflitti tra stati d'animo (o ancora, se preferiamo, del tempo tramite gli stimoli). Così com'è scritto, il modello può fornire solo descrizioni limitate nel tempo e condizionate a stimoli assegnati e costanti.

Queste ultime considerazioni, che dovrebbero costituire lo spunto per ulteriori, lunghe e profonde ricerche, mostrano una volta di più (ammesso che ce ne fosse bisogno) quanto inevitabilmente superficiale, e limitata a poche considerazioni iniziali, sia questa esposizione. Tuttavia è nostra speranza che questa proposta possa diventare, nelle mani di studiosi competenti, uno strumento efficace di descrizione delle dinamiche psicologiche e, possibilmente, di diagnosi di disagi psicologici. Così com'è, è inevitabilmente monca e troppo astratta. Ma probabilmente diverrebbe un utile strumento di analisi, se –come non possiamo fare a meno di auspicare– qualche psicologo volesse impegnarsi a completarla e a precisarla. Se ciò accadesse, questa breve nota avrebbe raggiunto il suo scopo.

## Bibliografia


[1] N. Bellomo And B. Carbonaro, On the modeling of complex socio-psychological systems with some reasonings about Kate, Jules, and Jim, *International Journal of Differential Equations*2006 (2006), 1-26.

[2] N. Bellomo And B. Carbonaro, Toward a mathematical theory of living systems focusing on developmental biology and evolution: a review and perspectives, *Physics of Life Reviews* 8(1) (2011), 1-18.

[3] N. Bellomo And G. Forni, Looking for new paradigms towards a biological-mathematical theory of complex multicellular systems, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 16(7) (2006), 1001-1029.

[4] B. Carbonaro And A. Russo (a cura di), *Overlapping of Mathematics and Humanities*, Quaderni di Matematica 29, (2017).

[5] B. Carbonaro And N. Serra, Towards mathematical models in psychology: a stochastic description of human feelings, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12(10) (2002), 1453-1490.

[6] B. Carbonaro And C. Giordano, A second step towards mathematical a stochastic mathematical description of human feelings, *Mathematical and Computer Modelling* 41(4-5) (2005), 587-614.

[7] B. Carbonaro And F. Vitale, *Fondamenti di Probabilità e Statistica*, CEA, Milano (2010).

[8] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer, Berlin (1988).

[9] A.L. Comrey And E. B. Lee, *Introduzione all'Analisi Fattoriale*, LED, Milano (1995).

[10] M. Dolfin, L. Leonida And N. Outada, Modeling human behavior in economics and social science, *Physics of Life Reviews* 22(2017), 1-21.

[11] P. Maroscia, C. Toffalori, F. S. Tortoriello And G. Vincenzi (a cura di), *Matematica e Letteratura. Analogie e convergenze*, Nuove Convergenze UMI-CIIM, UTET De Agostini, Novara (2016).

[12] P. Maroscia, C. Toffalori, F. S. Tortoriello And G. Vincenzi (a cura di), *Matematica e Letteratura 2016. Alla scoperta di nuove convergenze*, (2017).

[13] I. Matte Blanco, *The Unconscius as Infinite Sets: An Essay in Bi-Logic*, Karnac, London (1998).

[14] A.I. Telloni And C. Toffalori, Note sparse per un libro su Matematica e Letteratura, in *Overlapping of Mathematics and Humanities* (a cura di B. Carbonaro e A. Russo) (2017),

[15] R. C. Tolman, *The Principles of Statistical Mechanics*, Dover Publications, New York (1980).

# Le novità degli esami di Stato 2019 oggetto di rilevazione nazionale. Cosa ne pensano i docenti?

Si chiude il 31 agosto un anno scolastico non facile. Un anno in cui importanti provvedimenti, per lo più tardivi e scarsamente motivati, hanno influito sulla certezza delle mete didattiche da perseguire e tanto da agitare il sonno dei docenti di matematica e di fisica dei licei scientifici (ne parla Serenella Iacino su www.matmedia.it).

Superata però l'ansia dell'esordio di giugno, s'impone una fase di riflessione collettiva. Una fase dedicata a valutare quanto i novelli "quadri di riferimento" e la seconda prova scritta, pluridisciplinare e riferita all'intero quinquennio, possano efficacemente concorrere a migliorare insegnamento e apprendimento.

A tale scopo mira la rilevazione nazionale che il Consiglio Nazionale della Mathesis intende realizzare attraverso il questionario predisposto dai consiglieri nazionali Annalisa Santini e Marcello Pedone.

Il questionario è articolato in tre parti relative alle finalità dell'indagine proposta: gli esempi di seconda prova, i quadri di riferimento correlati alle indicazioni nazionali, il tema assegnato per la seconda prova. Il questionario, disponibile sul sito www.mathesisnazionale.it, potrà essere compilato direttamente online alle date che saranno specificate.

Una lettera della presidente Elisabetta Lorenzetti, inviata a tutte le sezioni, inviterà i presidenti locali ad attivarsi a che la rilevazione richiami la più larga e attenta partecipazione di iscritti e non iscritti assumendo altresì il carattere di iniziativa qualificante la vitalità dell'azione svolta dalla Mathesis in Italia. (el).

# Come è piccolo il mondo!

## *How small the world is!*

***Giuseppe D'Accampo*** *

**Abstract**

*In the late sixties, a well-known Harvard psychologist, Stanley Milgram, put into practice an original scientific experiment: he wanted to find out how many degrees of separation existed on the global network of friendships or kinships of the United States, a sort of US "social network". On a network of nearly two hundred million people, he was surprised to find that, on average, there were only 6 degrees of separation between senders and targets. Practically, the social network of the United States seemed to be, evidently, a "smallworld". With the advent of computers, it was shown that the entire world social network was a small world. Every person on the planet seems to be on average connected to any other person by a chain of only fou-rintermediaries.*

**Introduzione**

Verso la fine degli anni sessanta un noto psicologo di Harward, Stanley Milgram, mise in atto un originale esperimento scientifico: voleva scoprire quanti gradi di separazione[1] esistessero mediamente nella rete globale delle amicizie o parentele degli Stati Uniti, ossia in quello che oggi chiameremmo il social network statunitense. I nodi della rete erano i 184 milioni di abitanti dell'epoca (oggi sono 314 milioni), mentre i link erano i loro legami di amicizia o parentela reciproca. Questi nodi però, non erano collegati tutti con tutti, quindi non era chiaro quanti passaggi intermedi separassero due nodi qualunque della rete. Per effettuare il suo esperimento Milgram scelse, come nodi di partenza, un campione di 160 persone prese a caso ad Omaha nel Nebraska e chiese loro se conoscevano un certo tizio, un

* GIUSEPPE D'ACCAMPO, docente di Matematica e Scienze, sez. Mathesis-Catania, gv.dacca@gmail.com.

[1] Con il termine "gradi di separazione" si intende, in generale, il minimo numero di link che si devono percorrere per raggiungere un certo nodo partendo da un qualunque altro nodo della rete.

normalissimo agente della Borsa di Boston (nodo di arrivo, target dell'esperimento). Nessuna delle persone contattate aveva sentito parlare di questo agente. Milgram li pregò quindi di inviare una lettera a uno dei loro conoscenti, magari qualcuno che avesse più familiarità con l'ambiente finanziario dell'East Coast e quindi più probabilità di conoscere l'agente di Boston. A loro volta, i destinatari di quelle prime lettere (all'epoca non esistevano ancora le e-mail), nel caso non conoscessero neanche loro l'agente di Boston, avrebbero dovuto rispedirle ad uno dei loro conoscenti con la medesima richiesta, e così via. Prima o poi, pensava Milgram, quelle lettere sarebbero arrivate a destinazione e, dal numero di francobolli presenti in ciascuna di esse, lo scienziato sarebbe potuto risalire al numero di passaggi intermedi che separavano, mediamente, quei 160 cittadini del Nebraska dal trader del Massachusetts. Su una rete di quasi duecento milioni di persone, si aspettava di trovare su quelle lettere centinaia di francobolli. Grande fu invece la sorpresa quando si accorse che, in media, tra mittenti e destinatario, esistevano solo 6 gradi di separazione. Praticamente la rete sociale degli Stati Uniti sembrava essere, evidentemente, un "piccolo mondo".

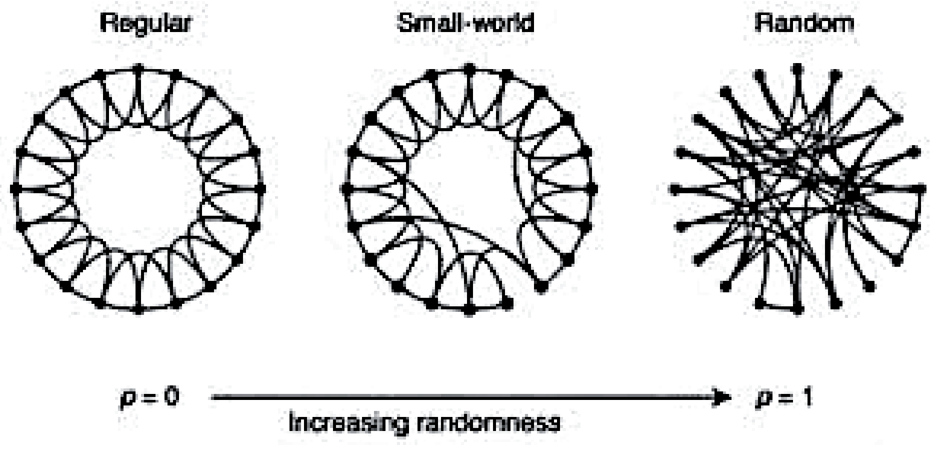
Con l'avvento dei computer, si dimostrò che l'intera rete sociale mondiale era un piccolo mondo. Ogni persona del pianeta, sembra dunque mediamente connessa a qualunque altra da una catena di soli quattro intermediari. Come i personaggi della serie televisiva *Sixdegree*[2], co-prodotta da J.J. Abrams e lanciata negli USA nel 2006-07 contemporaneamente alla più nota serie *Lost*, tutti noi viviamo normalmente la nostra esistenza senza renderci conto che essa è irrimediabilmente legata a quella di decine e decine di altri sconosciuti, che vivono a pochi gradi di separazione da noi, nella nostra città o dall'altra parte del mondo, e che ogni singolo incontro, ogni singolo evento, può cambiare il corso della nostra vita. Ma come può una rete con più di sei miliardi di nodi, come la rete sociale planetaria, avere questa incredibile proprietà?

Negli anni Cinquanta del secolo scorso i matematici si erano già cimentati con questi problemi, utilizzando la Teoria dei Grafi (un grafo, esattamente come una rete, è un oggetto composto esclusivamente da nodi, detti anche vertici, e dai link che li collegano). A quell'epoca si conoscevano essenzialmente due tipi di grafi: il grafo regolare e il grafo random. Rappresentando i nodi di un grafo

---

[2] Si veda http:// it.wikipedia.org/wiki/Six_Degrees_-_Sei_gradi_di_separazione. Più recentemente, il tema della stretta interconnessione tra persone diverse del mondo è stato trattato nella serie televisiva statunitense *Touch*, di cui è protagonista l'attore Kiefer Sutherland (https://it.wikipedia.org/wiki/Touch). A questo proposito, è interessante notare che la rete delle collaborazioni cinematografiche internazionali è anch'essa un "piccolo mondo", nel senso che, pur essendo la rete molto grande, la maggior parte degli attori sono legati tra loro da pochissimi passaggi intermedi.

disposti lungo una circonferenza (vedi figura), si vede chiaramente che in un grafo regolare, in cui ogni nodo è collegato (ad esempio) solo ai suoi primi quattro vicini, non si ha l'effetto "piccolo mondo": se infatti si prendono due nodi agli antipodi sulla circonferenza, già in una rete di soli 20 nodi come quelli in figura, occorrono ben 5 passaggi intermedi per passare dall'uno all'altro (in una rete con 1000 nodi ce ne vorrebbero 250, e così via). Viceversa, se consideriamo un grafo random, dove ogni nodo è collegato sempre con quattro altri nodi, ma stavolta scelti completamente a caso nella rete, si vede che bastano sempre pochi passaggi intermedi per passare da un nodo all'altro: quindi il grafo random sembrerebbe un buon modello a rappresentare le reti "piccolo mondo". Ma è veramente così? La rete sociale mondiale può essere considerata un grafo random?




Lavorando con questo tipo di grafi, già parecchi anni fa il celebre matematico ungherese Paul Erdös, si era accorto che una rete di amicizie casuali somiglia a un albero che si ramifica: un dato individuo (il tronco dell'albero) avrà ad esempio 50 amici a caso (i primi 50 rami), ciascuno dei quali avrà a sua volta altri 50 amici a caso (altri 50 rami ciascuno), e così via. Lungo questo albero, poiché il numero di rami cresce in modo esponenziale, in soli tre passaggi il nostro individuo iniziale arriverà a raggiungere ben 125.000 persone ($50^3$), in quattro passaggi 6.259.000 ($50^4$), in cinque 312.500.000($50^5$) e nei fatidici sei passaggi 15.625.000.000 ($50^6$), più della popolazione mondiale! Se però analizziamo con attenzione questo albero di amicizie casuali, manca una proprietà fondamentale delle vere reti sociali. Vediamo quale.

In una rete sociale reale come quella ad esempio di Facebook, gli amici dei vostri amici sono spesso amici tra di loro, dunque questa rete non assomiglierà per nulla ad un grafo casuale che si ramifica ad albero, dove non esistono amici in comune (non esistono cioè "triangoli" costituiti da tre nodi, ciascuno collegato agli altri due). Al contrario, una vera rete sociale è costituita da diverse "comunità", cioè da aggregazioni di nodi più fittamente connessi tra loro da legami di amicizia o parentela più stretti, i cosiddetti "legami forti"( di solito tra persone che vivono nella stessa famiglia, città, provincia o regione); nodi appartenenti a comunità diverse, saranno invece legati tra loro da un numero inferiore di legami cosiddetti "deboli", a lunga distanza ( ad esempio un amico che vive o lavora in altre regioni o addirittura all'estero). Questi legami deboli sembrano a prima vista meno importanti di quelli forti, e dal punto di vista del singolo individuo certamente lo sono (ad esempio, litigare con il nostro migliore amico o parente, non è certo la stessa cosa che tagliare definitivamente i ponti con un lontano conoscente, magari trasferitosi anni fa a Singapore e che sentiamo solo raramente via Facebook). Dal punto di vista della rete sociale nel suo complesso, però, come aveva intuito per primo il sociologo statunitense Mark Granovetter nel 1973, i legami deboli svolgono un ruolo fondamentale: assicurano infatti la coesione globale del sistema, impedendo che esso si frammenti in tante piccole comunità che non comunicano tra di loro (nell'esempio di prima, il litigio col mio migliore amico non influenzerà più di tanto la mia rete locale di amicizie, ma tagliare il legame con il conoscente di Singapore interromperà –in assenza di altri legami deboli– le potenziali comunicazioni tra la mia comunità in Italia e quella del mio contatto in Estremo Oriente, che prima si trovavano a un solo grado di separazione).

In definitiva, per essere un buon modello di una rete sociale reale, un grafo deve possedere entrambe le proprietà che abbiamo visto: deve essere un "piccolo mondo", cioè avere pochi gradi di separazione tra i suoi nodi, ma deve anche mostrare una discreta "aggregazione", cioè avere una struttura fatta di comunità, con legami forti e legami deboli. Il problema che negli anni Settanta i matematici e i sociologi si trovavano di fronte era, però, che né le reti regolari, né le reti random avevano entrambe queste proprietà: le prime mostravano aggregazione ma non erano "piccoli mondi", le seconde erano "piccoli mondi" ma non mostravano aggregazione. La risposta a questo dilemma è arrivata solo dopo una trentina di anni.

Nel 1998 due matematici della Cornell University, Duncan Watts e Steven Strogats, mostrarono infatti che la struttura di una rete sociale non era né perfettamente regolare, né completamente casuale, ma una via di mezzo tra le due. Bastava prendere un grafo regolare, dotato solo di legami forti tra nodi vicini, e sostituire alcuni di questi legami con legami deboli, a lunga distanza, collegandoli con altri nodi scelti a caso (vedi la figura precedente): la rete così ottenuta, che i due matematici battezzarono con l'appellativo di rete "small-world" (*small-world network*), risultava magicamente possedere entrambe le caratteristiche tipiche dei sistemi sociali. I molti legami forti assicuravano l'aggregazione locale, mentre i pochi legami deboli garantivano la possibilità di saltare da un nodo qualunque ad un altro con pochi passaggi, mantenendo così la coesione a livello globale (come aveva correttamente intuito Granovetter quasi trent' anni prima). Tra gli esempi di reti sociali con cui confrontare le previsioni del loro modello, i due matematici scelsero il network delle collaborazioni cinematografiche tra attori, legati tra loro dai film girati insieme. Costruendo una rete small-world artificiale, con le stesse caratteristiche della rete degli attori (stesso numero di nodi e stesso numero medio di connessioni per nodo), scoprirono che entrambe le reti mostravano pressappoco gli stessi valori sia per quanto riguardava il piccolo numero medio di gradi di separazione tra coppie di nodi, sia per quanto riguardava il "coefficiente di aggregazione" (essenzialmente, il numero di triangoli di nodi presenti nella rete): il network degli attori era effettivamente uno small-world, un piccolo mondo. Ma i due ricercatori non si fermarono qui. Considerarono altri due esempi di reti, scelti in ambiti apparentemente molto distanti da quello cinematografico: la rete elettrica degli Stati Uniti e la rete neuronale di un piccolo verme molto diffuso, chiamato C. Elegans. In entrambi i casi poterono dimostrare che si trattava ancora di reti small-world: in poche parole, che si considerassero attori, centrali elettriche o neuroni, a contare era solo la struttura topologica dei collegamenti tra i nodi. A contare era solo "chi era connesso con chi".

Un punto importante era che le reti small-world analizzate da Watts e Strogats mostravano tutte una caratteristica comune: avevano una scala tipica, rappresentata dal valore medio del numero di link uscenti da ogni nodo. Questo numero si chiama *degree* e di solito si indica con la lettera $k$. Le distribuzioni di probabilità $P(k)$ dei link per il network delle collaborazioni cinematografiche, per la rete elettrica degli Stati Uniti e per il sistema nervoso del C. Elegans erano infatti delle Gaussiane (le note curve a campana), centrate su certi valori medi: ogni attore era infatti collegato, mediamente, ad altri 61 attori, ogni centrale a circa 3 centrali e ogni neurone ad altri 14 neuroni. E in queste reti non esistevano nodi con un numero di link molto più grande o molto più piccolo di questi valori. Ben presto ci si accorse, però, che la maggior parte delle reti complesse che è possibile trovare in natura o nella società, pur essendo dei "piccoli mondi", non mostravano nessuna scala tipica. Al contrario, sembravano caratterizzate da invarianza di scala (cioè mantengono le stesse proprietà a diverse scale di osservazione). Pensiamo alla rete mondiale dei trasporti aerei. È noto che la maggior parte dei collegamenti intercontinentali è assicurata, nelle varie nazioni, da un numero relativamente piccolo di aeroporti, chiamati *hub*: ad esempio, in Italia, gli hub sono gli aeroporti di Roma e Milano, mentre negli stati Uniti sono quelli di Los Angeles, Chicago e Atlanta. La stragrande maggioranza degli aeroporti periferici, invece, ha un numero limitato di collegamenti diretti, e si appoggia agli hub per raggiungere le città principali sparse per il mondo. Riportando in un grafico la distribuzione di probabilità P($k$) dei link di questa rete, si vede che la curva rappresentata non è una Gaussiana con la consueta curva simmetrica a campana, bensì una curva che prevede un'alta probabilità di trovare nodi (aeroporti) con pochi link e una probabilità sempre più bassa di trovare nodi con un numero crescente di link, fino ad arrivare agli hub, cioè ai nodi iper connessi, con centinaia o addirittura migliaia di link. Questa curva viene chiamata "Legge di Potenza".[3]

In un articolo su *Nature* del 1999, un'equipe guidata dal fisico ungherese Albert-Laszlò Barabàsi mostrò per la prima volta che la struttura del World Wide Web (dove i nodi sono le pagine web e i link sono i collegamenti ipertestuali ad altre pagine web) era una rete "piccolo mondo" con distribuzione dei link a legge di potenza. Questo tipo di reti, prive di una scala tipica, presero il nome di *scale-free networks* e, nel giro di pochi anni, centinaia di scienziati da tutto il mondo cominciarono a scoprire che sbucavano fuori un po' ovunque: dalla struttura di Internet alla rete delle collaborazioni scientifiche, dalle reti alimentari negli ecosistemi alle reti di contatti sessuali o alle reti linguistiche, dalle reti geniche alle reti di proteine e a quelle metaboliche. Insomma, sembrava proprio che un numero enorme di sistemi biologici, sociali o tecnologici, se descritti in termini di reti complesse, mostrassero delle caratteristiche universali, contrassegnate dalla medesima firma matematica della legge di potenza nella distribuzione dei link: erano "piccoli mondi" dotati di invarianza di scala, con comunità o gruppi funzionali di nodi legati tra loro da legami a lunga distanza (vedi figura sotto), e con molti nodi periferici e pochi nodi iperconnessi (gli hub).

Ma rimaneva ancora un problema: come potevano essersi formate tutte queste reti?

Evidentemente nessuno le aveva progettate in questo modo di proposito, ed era chiaro che non erano nemmeno sbucate fuori dal nulla belle e pronte. Sempre nel 1999, fu proposto, dallo stesso Barabàsi, un meccanismo evolutivo molto semplice, in parte deterministico e in parte casuale, in grado di generare una rete scale-free con distribuzione dei link a legge di potenza. Vediamo di che cosa si tratta.

In uno strano passo del Vangelo secondo Matteo, al versetto 25-29 del

[3]La legge di Potenza è una funzione matematica che differisce dall'esponenziale in quanto, in essa, la variabile indipendente (x) compare nella base della potenza e l'esponente (b) è costante (del tipo $y = x^{-b}$ ),mentre nell'esponenziale la variabile indipendente compare come esponente ed è la base ad essere costante (del tipo $y = b^{-x}$), dove b di solito è pari a 2, 10 o *e*). È per questo che la legge di potenza con esponente negativo decresce molto più lentamente di un esponenziale con esponente negativo.

capitolo xxv, si legge: «*...a chi ha verrà dato, in modo che abbia ancor più in abbondanza, ma a chi non ha, verrà tolto anche quello che sembra avere*». A dire il vero, lungi dal rispecchiare quelli che dovrebbero essere i principi evangelici di uguaglianza e condivisione, questo passaggio di Matteo sembra essere piuttosto un precursore del noto adagio "i ricchi diventano sempre più ricchi", che sicuramente cattura una proprietà manifestata da molti sistemi sociali ed economici. I sociologi chiamano questa proprietà "effetto San Matteo": è evidente che un miliardario ha la possibilità enormemente maggiori di accumulare ulteriore ricchezza rispetto a un nullatenente, così come un individuo con molti amici avrà maggiori occasioni di fare nuove amicizie, una città con molti abitanti avrà una probabilità più alta di incrementare la sua popolazione, un sito web con molti collegamenti tenderà ad attrarne sempre di più, una pubblicazione scientifica con molte citazioni tenderà a ricevere sempre più citazioni, e così via. L'intuizione di Baràbasi fu proprio quella di sfruttare l'effetto San Matteo per generare reti scale-free, attraverso un meccanismo chiamato "attacco preferenziale" (*preferential attachment*): partendo da pochi nodi connessi tra di loro, si iniziano ad aggiungere, uno dopo l'altro, nuovi nodi alla rete, attaccandoli ai nodi preesistenti con una probabilità proporzionale al loro numero di primi vicini. In questo modo, nodi già molto connessi tenderanno a ricevere sempre più collegamenti trasformandosi in hub, mentre nodi poco connessi resteranno tali divenendo così dei nodi periferici. Se non ci sono costi o limiti di carico legati all'aggiunta di una nuova coppia "nodo+link" ad un nodo preesistente, come accade ad esempio per i nuovi collegamenti ad un sito web, la rete finale avrà una distribuzione dei link a legge di potenza, sarà cioè una rete scale-free. Se invece esistono costi o limiti di carico, come ad esempio quando si cerca di aggiungere nuove centrali elettriche o nuovi neuroni alle rispettive reti preesistenti, la formazione di hub iperconnessi verrà ostacolata e la rete finale sarà una rete small-world con distribuzione Gaussiana dei link. In questo modo, con un unico meccanismo automatico, e senza bisogno di alcun progetto, si possono quindi generare sia le reti small-world, caratterizzate da una scala tipica, che quelle prive di scala.

La scoperta delle reti small-world e scale-free, di cui in queste pagine abbiamo cercato di dare qualche cenno introduttivo, ha dato l'avvio alla cosiddetta "Teoria delle Reti Complesse", uno dei settori più fiorenti della scienza della complessità, che negli ultimi vent'anni ha chiarito molte proprietà e meccanismi alla base di numerosi sistemi biologici, ecologici, sociali ed economici, e che nei prossimi anni promette di regalarci ancora tante sorprese.

## Bibliografia

[1] A. PLUCHINO, *La firma della complessità, una passeggiata al margine del caos*, Malcor D'Edizione- (2015).

# L’angolo giro non esiste!

## *Corner ride does not exist*

***Alfio Grasso***[1]

**Abstract**

*In this paper the contradictions originated by the angle definition as a “part of a plane” are highlights. They have arisen, from an unclear terminology on one side, and from the confusion between the angle and its measure as well as from the notion difficulty on the other side. This entails that the sum of two angles cannot be always defined and that it makes no sense speaking about multiples and measures of angles. More over in this article it is proved that the full rotation angle does not exist, so that the demonstrations on theorems using it are meaningless. Finally, it is presented a possible way to overcome the pointed out inconsistences and coherent with the famous Erlangen Program (Klein - 1872), based on using plane transformations.*

Il concetto di angolo è senza dubbio quello che solleva le maggiori difficoltà nell’insegnamento della geometria. Esse sono dovute, in parte a una terminologia imprecisa, in parte alla confusione tra angolo e sua misura e anche alla difficoltà della nozione.

**Definizioni**

Iniziamo, naturalmente, da Euclide, che, nel IX dei Termini degli *Elementi*, scrive:

«Angolo piano rettilineo è l’inclinazione reciproca di due linee rette sul piano, le quali s’incontrino e non giacciano in linea retta».

È innanzitutto opportuno notare che quella euclidea, più che una definizione, è una *descrizione* che serve a rendere riconoscibile l’ente in oggetto mediante una soddisfacente nomenclatura. Come definizione è autoreferenziale –non è stata definita “l’inclinazione reciproca” di due rette– esclude l’angolo nullo e quello piatto e si limita agli altri angoli convessi.

In seguito, Apollonio, Pappo, Proclo e successivamente altri ne dànno varie definizioni anch’esse non chiare.

[1] Email: grassoalfino@yahoo.it.

Nel 1667 Arnauld, teologo e filosofo più che matematico, prospetta l'angolo come "parte di piano". Questa definizione, è avversata fortemente, per le incongruenze che comporta, da matematici come Clairaut nel 1741 e nel 1892 da Veronese, secondo cui «l'angolo è una parte del fascio di semirette cui appartiene (questa visione può favorire l'introduzione dell'angolo come rotazione dal punto di vista intuitivo). E inoltre, in Italia, da esperti di didattica come E. Castelnuovo e G. Prodi.

Nel 1899Hilbert pubblica i *Fondamenti della geometria*, una versione riveduta e corretta nei, degli *Elementi* per renderli *completi*:

- Leibniz aveva scoperto che neppure la Proposizione 1 del I Libro degli *Elementi* si può dedurre dai cinque assiomi euclidei;
- Schopenhauer aveva provato che da essi non derivava la Proposizione 4 del I Libro, che comunemente chiamiamo il Primo criterio di congruenza dei triangoli.

Nei *Fondamenti* il genio di Könisberg dà la seguente definizione:

«Dato un qualsiasi piano α chiamiamo angolo il sistema di due semirette *distinte* di α, (h,k) o (k,h), uscenti da un stesso punto O, che appartengono a rette diverse».

Anche tale visione –astratta– esclude l'angolo nullo e quello piatto.

Allora, la definizione di Arnauld è *una* tra le tante, e, riguardo agli inspiegabili motivi della sua persistenza tutt'oggi, sono illuminanti le parole del professore G. Prodi:

> «*La matematica deve conservare i suoi risultati fondamentali, ma finisce spesso per prolungare certi abiti mentali al di là del loro limite naturale di sopravvivenza*».

Concludo questa parte relativa alle definizioni con un'osservazione di carattere linguistico.

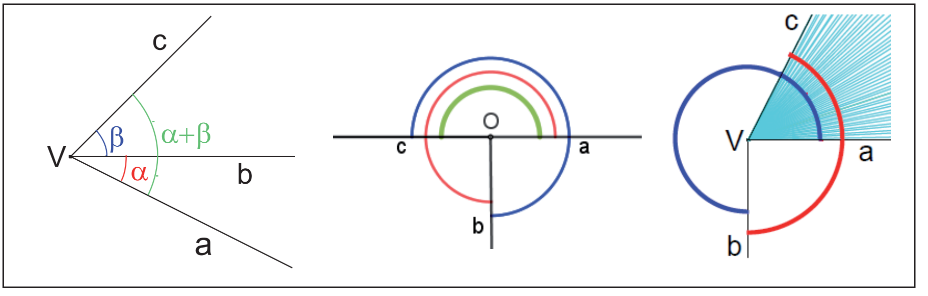
Il termine angolo deriva dalla radice indoeuropea "ank" che significa curvare, piegare. Ma curvare dalla "retta" via verso sinistra non produce lo stesso effetto che ruotare a destra: sembra che l'angolo nasca "naturalmente" orientato.

Occupiamoci ora dell'*angolo somma di due angoli*.

Sappiamo che è definito *solo* quando essi sono consecutivi, cioè hanno un *solo* lato comune. É presentato *sempre* con angoli "piccoli" e ordinati (prima figura) –*come se fossero orientati*– cosicché si possono realmente addizionare. Ma angoli "abbastanza grandi" come $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ (seconda figura), hanno l'angolo $\widehat{ac}$ in comune: *non* si possono addizionare.

Allora, se consideriamo il multiplo secondo il numero 2 dell'angolo concavo aÔb, dobbiamo addizionare ad aÔb l'angolo concavo bÔc a esso congruente (terza figura): ma tale operazione è impossibile perché i due angoli *non* sono consecutivi avendo in comune l'angolo piatto aÔc.

Così: *non ha senso parlare di multiplo di un angolo, né, conseguentemente, di una sua misura*.




*L'insieme degli angoli non costituisce una classe di grandezze omogenee*.

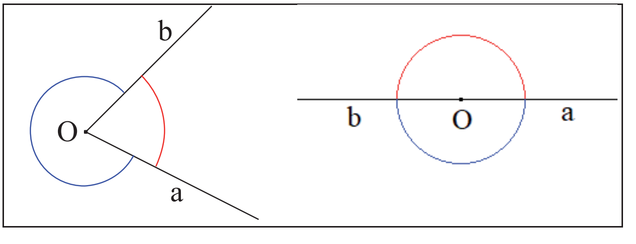
La definizione di Arnauld comporta quindi della criticità.

**Mi prendi in…** ***giro?*!**

Occupiamoci ora del *cosiddetto* angolo giro.

*Se esistesse*, sarebbe convesso o concavo a seconda della definizione di convessità usata per gli angoli.

Infatti, se diciamo convesso un angolo in cui il segmento che congiunge due qualsiasi suoi punti è sottoinsieme dell'angolo, risulta *convesso*. Se invece chiamiamo convesso un angolo che non contiene i prolungamenti dei suoi lati, è *concavo*, perché l'angolo giro li contiene.




Inoltre: *nessuna* coppia di angoli ha per somma l'angolo giro, né per semirette generiche (figura a sinistra), né per semirette opposte di una retta (a destra). Ma queste coppie di angoli *non* sono consecutivi poiché *hanno in comune due* lati *–a* e *b–* non uno solo: *non* si possono quindi addizionare.

Invece, si dice che la loro somma è l'angolo giro, cioè tutto il piano, che sarebbe così la somma di due angoli piatti.

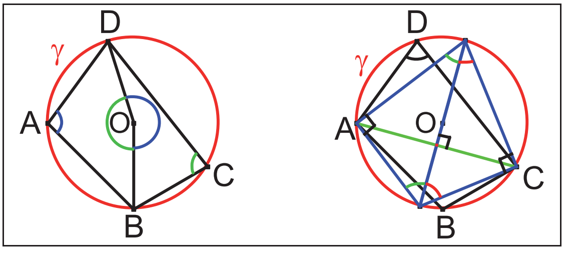
Si "dimostrano" poi, servendosi dell'angolo giro, alcuni teoremi, tra i quali:

1. *La somma degli angoli interni di un poligono(convesso)di n lati è uguale a n-2 angoli piatti.*

Allora, se consideriamo un ennagono, l'angolo somma sarebbe sette angoli piatti, cioè, tre piani più un semipiano, tre piani più…mansarda?! Così l'angolo somma è, per definizione una parte di piano, e, in forza del "teorema", ha come sottoinsieme proprio il piano stesso: *ciò è assurdo*.
Questa contraddizione deriva dalla confusione tra angolo e sue misure.

2. *Un quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.*

La "dimostrazione" riportata in molti libri è illustrata nella figura sopra a sinistra. L'angolo BÂD è metà dell'angolo concavo BÔD e BĈD metà dall'angolo convesso BÔD: poiché la somma degli angoli in O "è" l'angolo giro, Â+Ĉ è uguale a un angolo piatto.




Ma gli angoli in O *non* sono consecutivi avendo due lati comuni, quindi *la loro somma non esiste*!

A destra è delineata una semplice dimostrazione che si ottiene in virtù della simmetria di una circonferenza rispetto a ogni retta per il suo centro, considerando l'asse di una delle diagonali, nella figura di AC.

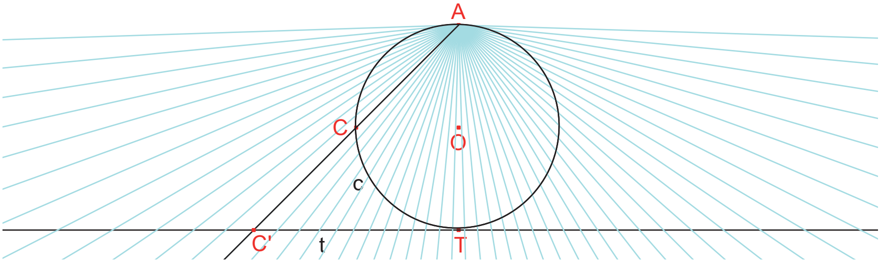
Il cosiddetto angolo giro presenta quindi delle incoerenze.

*La continuità della circonferenza, cioè di R, consente di provare che l'angolo giro non esiste*.

In funzione di quanto sarà dimostrato è opportuna la seguente considerazione.

Sia *c* una qualsiasi circonferenza e O il suo centro. Indichiamo con T un suo qualsiasi punto, con t la tangente a c in T, con A il simmetrico di T rispetto a

O. Consideriamo l'insieme S delle semirette di origine A e passanti per i punti di c (figura).




Detto C un generico punto di c la semiretta AC interseca t nel punto C'; al variare di C si genera una biiezione tra c-{A} e t. Poiché un teorema della Teoria degli insiemi (di immediata evidenza intuitiva) assicura che:

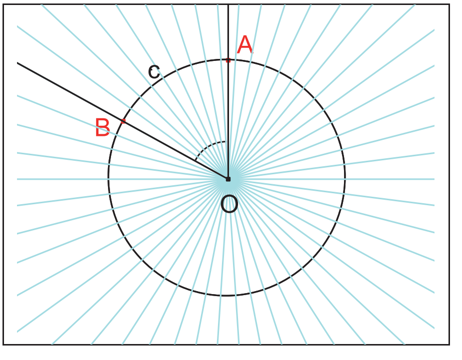
*Aggiungendo a (o sottraendo da) un insieme infinito un numero finito di elementi la sua cardinalità non cambia*, c ed S hanno la stessa cardinalità della retta t, cioè di R:

*Ogni circonferenza gode della proprietà di continuità di R*.

(Agli studenti si può fare il seguente esempio chiarificatore. Siano dati N-{0} ed N; assegniamo la funzione f: N-{0} → N tale che ∀ m ∈N-{0} associa n ∈N \ n=m-1: f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra N-{0} ed N).

*Proviamo che l'angolo giro non esiste*.

Siano date una circonferenza ce il fascio di semirette di centro O. Detti A un punto *assegnato* di c e B uno *qualunque* su essa, è individuato AÔB (figura).




Se B≡A, AÔB è l'angolo nullo. Al variare di B, l'angolo AÔB descrive, *riempie*, il piano per la continuità della circonferenza, cioè di R. Nessuna semiretta *generica* OB coincide con OA: *l'angolo giro non esiste!*

È interessante notare che *tutti* noi insegnanti di matematica abbiamo utilizzato *sempre*, "a nostra insaputa", la proprietà dimostrata.

Infatti, sia Φ il fascio di rette di centro un punto O. Esso descrive, *riempie* tutto il piano rigato. Consideriamo un riferimento cartesiano di origine O. C'è una corrispondenza biunivoca tra le rette di Φ e le equazioni ax+by=0, con a e b non contemporaneamente nulli. Se b=0 l'equazione associata è x=0, cioè l'asse y; per b≠0 la retta generica di Φ presenta equazione y= $-\frac{a}{b}$x, che indichiamo con y=m·x, con m∈ **R**:

***non esiste*** *alcuna retta generica che si sovrappone all'asse y*.

Per superare le incoerenze originate dalla definizione di angolo come parte di piano, si può adottare l'assetto esposto da Choquet –insigne matematico francese– al *Congresso internazionale di Royamont* del 1959 e pubblicato ne *L'insegnamento della geometria* nel 1964.

La trattazione si fonda sulle proprietà dei *Gruppi di trasformazioni del piano*, secondo l'indirizzo tracciato dal celebre *Programma di Erlangen* di da Klein (1872) e fatto proprio dalla comunità matematica. In esso Kleinrealizza una sintesi creativa delle geometrie parabolica, iperbolica, ellittica e proiettiva: *Una geometria è lo studio delle proprietà che rimangono invariate quando si sottopone il piano (lo spazio) a un gruppo di trasformazioni*.

La sistemazione di Choquet presenta *sette* assiomi –oltre *venti* quelli di Hilbert– semplici, intuitivi ma *forti*, cioè che consentono di scoprire dall'inizio proprietà interessanti. Permette d'introdurre al primo anno di superiore la geometria analitica che, oltre a essere utile ai colleghi di fisica, risulta interessante per gli studenti per il suo aspetto grafico.

L'impianto di Choquetè stato utilizzato negli interessanti libri di testo:

*Geometria Elementare* di Morin e Busulini, *Il metodo matematico* di Lombardo Radice e Mancini Proia, *La scoperta matematica* di Prodi.

Choquet definisce rotazione: l'isometria che ha un solo punto unito o l'identità. (Didatticamente è opportuno introdurre la nozione di rotazione ricorrendo all'inizio a esperienze abituali che richiamano alla mente la rotazione: ruota, orologio, giostra, tergicristalli, radar, pale eoliche…).

Chiama angolo di due semirette *a* e *b nell'ordine*, di comune origine O, la rotazione di centro O che trasforma *a* in b, in un dato senso.

In particolare, l'assioma di misura degli angoli *soddisfa* le proprietà di *linearità e monotonia* caratteristiche della misura e *rende coerenti* geometria e goniometria.

**Assioma di misura degli angoli**

È data una funzione suriettiva di R sul gruppo abeliano (*A,+*) degli angoli tale che:

*A ogni numero reale* ***r≥0*** *è associato un angolo* ***α(r)****, di cui* ***r*** *è detto misura, tale che l'angolo corrispondente alla somma di due qualsiasi numeri reali* ***x*** *e* ***y*** *è la somma degli angoli immagini di* ***x*** *e* ***y***:

$$\boldsymbol{\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)}.$$

La linearità è nell'assioma, e la monotonia si ottiene, come segue.

Siano **x** e **y∈R** tali che: **x>y**; allora: ∃ **z** ∈ **R** \ **x=y+z**. Quindi: **α(x)=α(y+z)**; ma per la linearità **α(y+z)=α(y)+α(z)**, dunque, in definitiva **α(x)=α(y)+α(z)**. Allora:

da **x>y** segue che **α(x)> α(y);** ciò assicurala monotonia della misura degli angoli.

(La proprietà espressa dall'assioma si può introdurre anche in modo meno formale).

La coerenza tra geometria e goniometria, si può poi ottenere dalle seguenti osservazioni.

Se p è il numero reale cui si associa l'angolo piatto, α(2p) è l'angolo nullo; quindi, ∀ k ∈ Z, α(2pk) è l'angolo nullo. Infatti:

$$\alpha(2pk)=\underset{1,}{\alpha(2p)}+\underset{2,\ \ldots\ldots,}{\alpha(2p)}+\ldots.+\underset{k}{\alpha(2p)}.$$

Detto allora $x_0$ un numero reale, con $0 \leq x_0 < 2p$, per l'additività della misura:

$\alpha(x_0+2pk)=\alpha(x_0)+\alpha(2pk)=\alpha(x_0)$; allora*: ogni numero reale $x_0+2pk$ è una misura di $\alpha(x_0)$.*

*Un angolo ha quindi infinite misure, congrue tra loro rispetto al modulo 2p*. E infatti, in goniometria, se consideriamo a esempio le equazioni sen$x=\frac{1}{2}$ e cos$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, esse hanno in radianti rispettivamente per soluzioni:

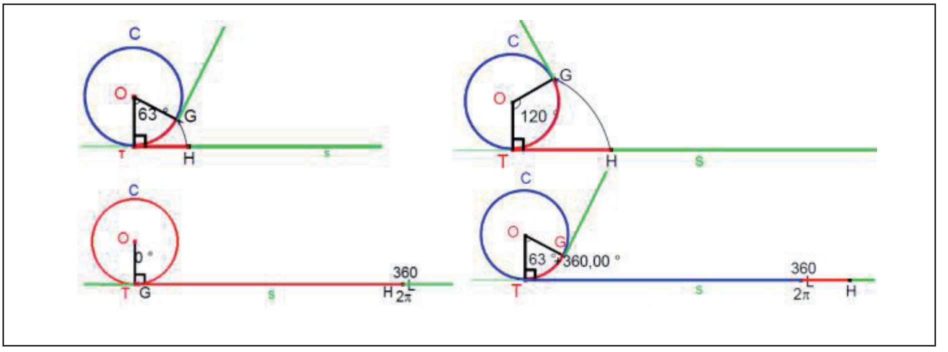
- sen$x=\frac{1}{2}$:$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$vel$x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, con k ∈ Z;
- cos$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$:$x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, con k ∈ Z.

Nessuno di noi docenti ha mai detto che per k=1 *x* è la misura dell'angolo giro, né che per k=2 *x* e la misura dell'angolo due giri, e così via: l'angolo giro "muore naturalmente" in goniometria.

Torniamo alle misure degli angoli:

- In radianti, posto $0 \leq x_0 < 2\pi$, ogni misura è $x= x_0+2k\pi$, con k ∈ *Z*.
- In gradi sessagesimali, posto$0° \leq x_0° < 360°$, ogni misura è $x° = x_0°+k360°$, con k ∈ *Z.*

L'assioma si può chiarire mediante gli esempi del calcolo del giro vita o di una semiretta che si "avvolge" su una circonferenza (ho ottenuto le figure sotto




con Cabrì circa venticinque anni addietro: un software dinamico è molto più esplicativo delle immagini).

Nelle figure precedenti il punto L di s è quello per cui il segmento TL avvolge in senso antiorario l'intera circonferenza. Se associamo a L il numero 360, diciamo che l'angolo orientato TÔG, individuato dall'arco $\widehat{TG}$ , è misurato in gradi sessagesimali; se invece $\overline{TL}$ =2π - lunghezza della circonferenza di raggio unitario -la misura si dice espressa in radianti.

Concludo chiedendo se non sia opportuno (necessario) che noi docenti modifichiamo metodologia e didattica così da rendere coerenti le nozioni introdotte, e altrettanto facciano i redattori dei libri di testo. E che Istituzioni le quali hanno come finalità la valorizzazione ed il progresso dell'insegnamento della matematica, segnalino le incongruenze rilevate e contribuiscano a un loro superamento.

**Bibliografia**.

[1] A. Arnauld. *Nuovi elementi di geometria*

[2] D. Hilbert *Fondamenti della Geometria*

[3] E. Castelnuovo *Scoprire la matematica - Geometria del piano. Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria*

[4] G. Choquet *L'insegnamento della geometria*:

[5] L. Lombardo Radice - L. Mancini Proia *Il Metodo matematico*:

[6] G. Prodi - A. Bastianoni *Scoprire la matematica - Geometria del piano*:

# Una risoluzione geometrica delle equazioni di secondo grado

## *A geometric resolution of second degree equations*

***Francesco Daddi***[1]

**Abstract**

*A particular geometric resolution of second degree equation sys dispayed in this short article, based on Carlyle's circle. From an educational standpoint, itis possible to follow the simple steps described in third year at a scientific secondary school, as an in-depth study after having introduced the circumference in the Cartesian plane. It is interesting to analyse the link between the geometric situation and the values assumed by the various parameters involved.*

In questo breve articolo è esposta una particolare risoluzione geometrica delle equazioni di secondo grado. Dal punto di vista didattico, è possibile percorrere i passi descritti in una terza liceo scientifico, come approfondimento dopo aver introdotto la circonferenza nel piano cartesiano. Si noti che i recenti Quadri di Riferimento, emanati dal MIUR nel novembre 2018, pongono in risalto il fatto che "*i problemi potranno avere carattere astratto, applicativo o anche contenente riferimenti a testi classici o momenti storici significativi della matematica*". Sempre nei Quadri si legge che la prova scritta del nuovo Esame di Stato "*intende accertare che il candidato sia in grado di [...] dimostrare proposizioni di geometria euclidea, con metodo sintetico o analitico*". La presente proposta didattica cerca di inserirsi in questa prospettiva.

### 1. Costruiamo le soluzioni

Assegnata l'equazione di secondo grado monica

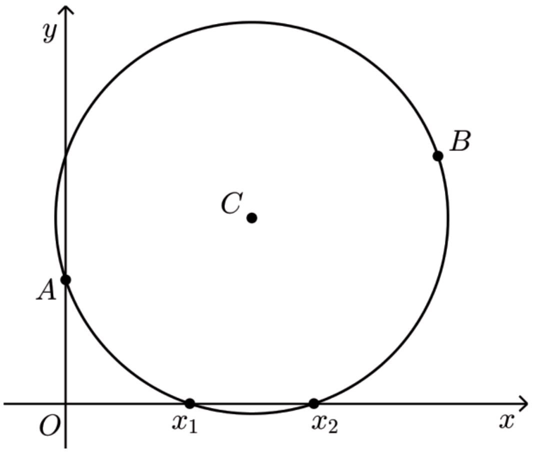
$$x^2 - ax + b = 0 \quad [*]$$

Avente almeno una soluzione reale($\Delta = a^2 - 4b \geq 0$), si considerino nel piano cartesiano i punti

[1] *Liceo Scientifico "E. Fermi"* Cecina (LI).

$$A = (0,1) \quad , \quad B(a,b)$$

e la circonferenza $\delta$ di diametro $AB$, nota come *cerchio di Carlyle*: le soluzioni reali dell'equazione assegnata [*] sono le ascisse dei due punti (eventualmente coincidenti) di intersezione di $\delta$con l'asse delle $x$ (si veda [1], [2], [3], [4]). Dimostriamolo.




La circonferenza $\delta$ ha centro $C\left(\frac{a}{2};\frac{b+1}{2}\right)$ e raggio

$$r = \overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{b+1}{2}-1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+(b-1)^2} \ ,$$

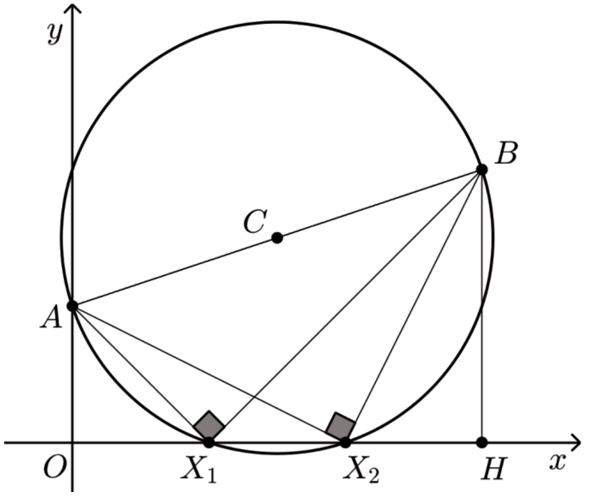
quindi ha equazione cartesiana

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2+(b-1)^2}{4} \rightarrow$$

$$x^2+y^2-ax-(b+1)y+b=0\,.$$

La circonferenza $\delta$ interseca la retta $y=0$ se e solo se $x^2-ax+b=0$: le ascisse dei punti di intersezione risolvono dunque l'equazione [*].

Un altro modo per dimostrare la correttezza della costruzione, senza ricorrere alla geometria analitica, consiste nel ragionare semplicemente sul fatto che i due triangoli$AX_1B$ e$AX_2B$, essendo inscritti in una semicirconferenza, sono rettangoli. Si veda la figura.




Dalla similitudine dei triangoli rettangoli $AOX_1$ e$X_1HB$ si ottiene

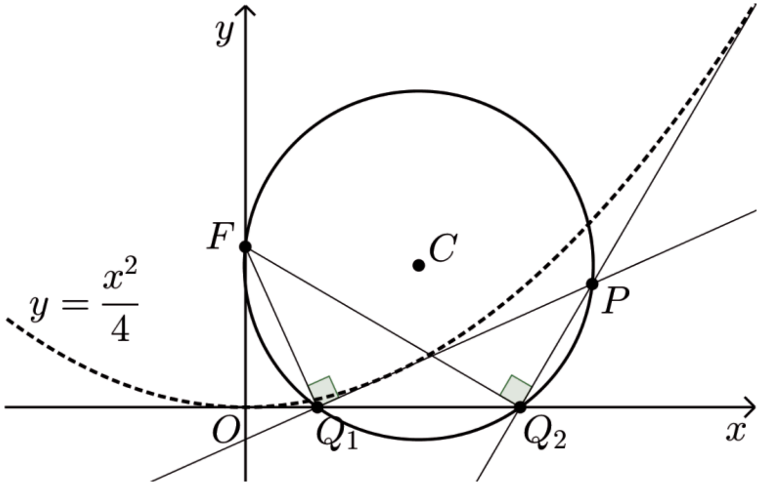
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OX_1}} = \frac{\overline{X_1H}}{\overline{HB}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x_1} = \frac{a - x_1}{b} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (a - x_1)x_1 = b \quad \rightarrow \quad x_1^2 - ax_1 + b = 0$$

e quindi la costruzione è corretta. Si osservi che lo stesso ragionamento può essere ripetuto anche per i triangoli rettangoli simili $AOX_2$ e$X_2HB$, arrivando così a $x_2^2 - ax_2 + b = 0$.

***Osservazione 1.*** Il metodo descritto è un caso particolare del più generale metodo di Lill; per i dettagli si veda [5].

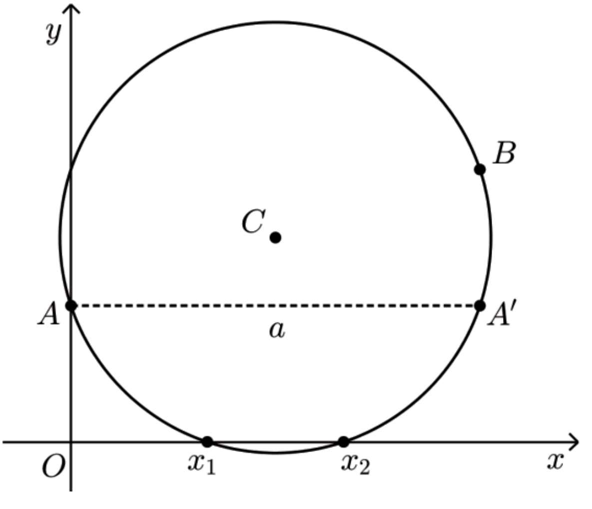
***Osservazione 2.*** Consideriamo la parabola di equazione cartesiana $y = \frac{x^2}{4}$, avente fuoco $F(0,1)$, e poniamoci il problema di tracciare le rette tangenti ad essa condotte dal punto $P(a, b)$. Si può dimostrare che la costruzione descritta in precedenza (con $F$ al posto di $A$ e $P$ al posto di $B$) individua le intersezioni$Q_1$, $Q_2$delle tangenti cercate con l'asse delle ascisse e permette quindi una semplice costruzione geometrica delle stesse tangenti. Si osservi infine che la pendenza di ciascuna tangente è uguale all'ascissa in cui incontra l'asse delle $x$, cioè la sua equazione è della forma $y = m(x - m)$.




## 2. Limitazioni delle soluzioni

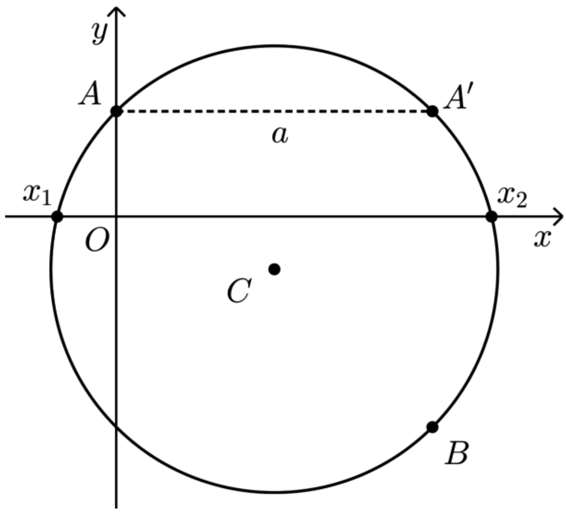
Esaminando con attenzione la costruzione (si veda la figura seguente), è possibile fornire, sotto l'ipotesi $\Delta = a^2 - 4b > 0$, una limitazione qualitativa per le due soluzioni reali distinte $x_1$ , $x_2$.

Nel caso $a > 0, b > 0$ risulta $0 < x_1 < \frac{a}{2} < x_2 < a$.




Sfruttando la simmetria rispetto all'asse $y$, nel caso $a < 0, b > 0$ si ottiene $a < x_1 < \frac{a}{2} < x_2 < 0$.

Si noti che, se $b < 0$, i punti $A$ e $B$ si trovano da parti opposte rispetto all'asse delle ascisse, quindi la circonferenza $\delta$ interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti: l'equazione [*] pertanto ha due soluzioni reali e distinte.



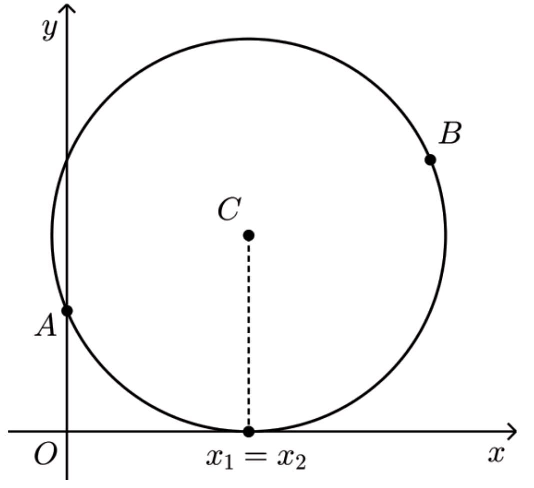

Per quanto riguarda le limitazioni possiamo osservare che, se $a > 0, b < 0$, abbiamo $x_1 < 0$, $x_2 > a > 0$. Analogamente, se abbiamo $a < 0, b < 0$, si verifica che risulta $x_1 < a < 0$ , $x_2 > 0$. Lasciamo al lettore l'analisi degli altri casi particolari che non sono stati esaminati.

## 3. Interpretazione geometrica del discriminante

Vediamo ora come sia possibile, facendo ancora leva su considerazioni geometriche, ritrovare la condizione $a^2 - 4b \geq 0$ nel caso di soluzioni reali. Osserviamo che, affinché la circonferenza$\delta$ intersechi l'asse delle ascisse,la distanza del centro $C$dall'asse $x$, cioè $|y_C|$, deve essere minore (o al massimo uguale, nel caso della tangenza) rispetto al raggio di $\delta$:

$$|y_C| \leq r \quad \rightarrow \quad \frac{|b+1|}{2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b-1)^2} \rightarrow a^2 - 4b \geq 0 \, .$$

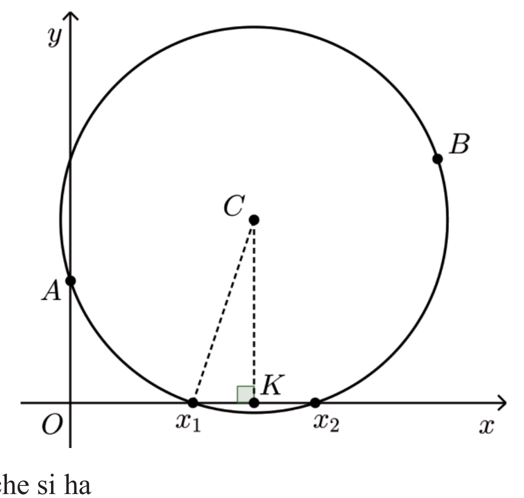
Abbiamo quindi un'immediata interpretazione geometrica del discriminante$\Delta = a^2 - 4b$ : nel caso in cui$\Delta > 0$, il cerchio di Carlyle interseca l'asse $x$ in due punti distinti; se invece è$\Delta < 0$, il cerchio non interseca l'asse delle ascisse. La situazione particolare $\Delta = 0$ corrisponde al caso in cui $\delta$ risulta tangente all'asse $x$ (come si può vedere nella figura seguente) e l'ascissa del punto di contatto è la soluzione (con molteplicità 2) dell'equazione [*].




***Osservazione3***. Se analizziamo di nuovo la situazione descritta nell'osservazione 2, l'equazione [*] ammette soluzioni reali se e solo se esistono le rette tangenti (o la retta tangente come caso particolare) a $y = \frac{x^2}{4}$condotte dal punto $P(a, b)$, e ciò accadesse e solo se $P$ si trova al di sotto della parabola(o al massimo sulla curva), condizione che si traduce algebricamente in $b \leq \frac{a^2}{4}$, equivalente a $a^2 - 4b \geq 0$.

## 4. Formula risolutiva

Cerchiamo ora di ricavare la formula risolutiva per l'equazione [*], nel caso delle radici reali ($a^2 - 4b \geq 0$).




Dal momento che si ha

$$x_K = x_C = \frac{a}{2} \quad , \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b-1)^2} \quad , \quad \overline{CK} = |y_C| = \frac{|b+1|}{2}$$

applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo in figura risulta

$$x_{1,2} = x_K \pm \sqrt{r^2 - \overline{CK}^2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 + (b-1)^2}{4} - \frac{(b+1)^2}{4}} \quad \rightarrow$$

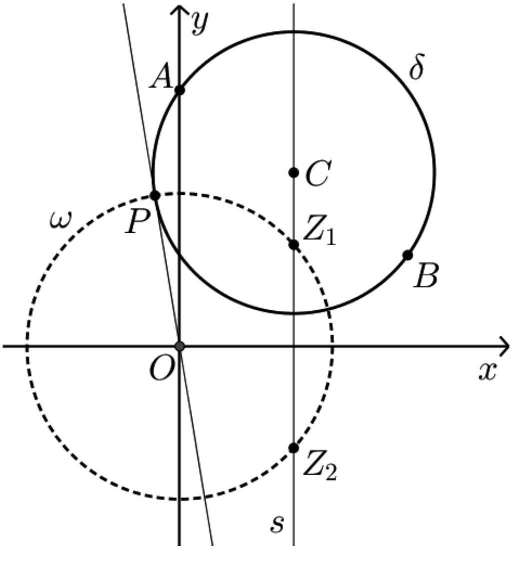
$$\rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4b}{4}} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \;.$$

Abbiamo così ritrovato la nota formula per l'equazione di secondo grado, relativa alla nostra speciale forma "ridotta" $x^2 - a\,x + b = 0$.

## 5. Caso delle soluzioni complesse

Vediamo ora che cosa accade quando l'equazione [*] non ha soluzioni reali, ossia quando il discriminante è negativo ($\Delta = a^2 - 4b < 0$). Prima di tutto osserviamo che, in questo caso, la circonferenza $\delta$ non interseca l'asse delle ascisse.

Seguendo quanto riportato in [6], per costruire geometricamente le soluzioni complesse$z_{1,2}$ si considera la circonferenza $\omega$ di centro $O$ e ortogonale alla circonferenza $\delta$: i punti $Z_1$ e $Z_2$ che rappresentano le soluzioni complesse dell'equazione assegnata [*] si ottengono intersecando $\omega$ con la retta $s$ parallela all'asse delle ordinate e passante per il centro $C$ di $\delta$. Si veda la figura.



Per determinare il raggio della circonferenza $\omega$ è sufficiente osservare che essa passa dai punti di contatto (nella figura è presente solo uno di essi, indicato con $P$) delle due rette tangenti condotte da $O$ a $\delta$.Per individuare con riga e compasso questi punti di tangenza, basta intersecare $\delta$ con la circonferenza che ha come diametro il segmento $OC$.

Poiché il raggio di $\omega$ è pari a $\overline{OP} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{PC}^2} = \sqrt{\overline{OC}^2 - r_\delta^2}$, risulta

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + (b-1)^2}{4}} = \sqrt{b}\,,$$

e, per quanto riguarda l'equazione cartesiana, si ha$\omega: \ x^2 + y^2 = b$.
Intersecando la retta $s$ (di equazione $x = \frac{a}{2}$)conla circonferenza $\omega$, risolvendo cioè il sistema

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a^2}{4} + y^2 = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \end{cases}$$

si ottengono le coordinate dei punti di intersezione

$$Z_1\left(\frac{a}{2}\,;\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right) \quad ; \quad Z_2\left(\frac{a}{2}\,;-\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right).$$

Essendo sotto l'ipotesi$a^2 - 4b < 0$, il radicando comune è positivo e la retta $s$è in effetti secante$\omega$. L'ascissa e le ordinate dei punti $Z_{1,2}$ sono uguali, rispettivamente, alla parte reale e alle parti immaginarie delle soluzioni complesse dell'equazione [*]; infatti, essendo $4b - a^2 = i^2 \cdot (a^2 - 4b)$, le sue radici sono

$$z_{1,2} = \frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}.$$

Si evidenzia infine il fatto che, poiché l'equazione di partenza è a coefficienti reali, le radici sono complesse coniugate e ciò trova conferma nel fatto che i punti $Z_1$ e$Z_2$si corrispondono nella simmetria rispetto all'asse delle ascisse.

## Bibliografia


[1] B. BOLD (1982), *Famous problems of Geometry and How to Solve Them,* Dover Publications.

[2] S. CHERUBINO (1951), *Applicazioni dell'algebra alla geometria,*capitolo del Repertorio di matematiche (a cura di M. Villa), Cedam, Padova, pag. 343.

[3] TOGLIATTI E. G.(1932), *Equazioni di 2º, 3º, 4º grado ed altre equazioni algebriche particolari. Sistemi di equazioni algebriche di tipo elementare* - Enciclopedia delle Matematiche Elementari*,* vol. 1 - parte 2, Hoepli, Milano.

[4] http://mathworld.wolfram.com/CarlyleCircle.html

[5] E. LILL (1867), Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à uneseul inconnu, et description d'un instrument inventé dansce but*, Nouvelle sannales de mathématiques 2e série, vol. 6, pagg. 359-362*. L'articolo è consultabile all'indirizzo
http://ARCHIVE.numdam.org/article/NAM_1867_2_6__359_0.pdf

[6] T. DANTZIG (2018), *Numero, Storia dell'idea che ha rivoluzionato il mondo.* Ed. Il Saggiatore, pag. 275.

# Excursus matematico/filosofico sulla forma della mandorla

# *Mathematical/Philosophical Excursus on the shape of the almond*

***Corrado Simone Binetti***[1]

**Abstract**

*Analyzing the culinary traditions of Easter cakes in which the main ingredient is almond, the work focuses on the shape of the almond, analyzing it in the threefold mathematical, religious and philosophical value. We started from its origins, which according to the philosophical and religious tradition have to be traced back to Sacred Geometry, passing through its symbolic meaning that recalls the "fish belly" and finally analyzing the close link with the Catholic religion through the Gospel passage of John, concerning "the miracle of the fish".*

Analizzando le tradizioni culinarie dei dolci pasquali nei quali l'ingrediente principale è la mandorla, ho voluto concentrare l'attenzione sulla forma della mandorla, analizzandola nella triplice valenza matematica, religiosa e filosofica.

Le origini della forma della mandorla (Mandorla Mistica o Vesica Piscis) vanno fatte risalire secondo la tradizione filosofica e religiosa, ad una branca della geometria chiamata: "Geometria Sacra".

La Geometria Sacra studia le Leggi dell'Universo attraverso la Scienza delle Forme e delle Divine Proporzioni, al fine di identificarne i principi fondamentali ed i rapporti che governano ed interconnettono Macrocosmo e Microcosmo. Non esiste niente di puramente casuale nel Cosmo (che infatti in greco significa letteralmente "ordine") e lo studio delle leggi morfogenetiche permette di avvicinarci a Dio, in quanto la Creazione rispecchia perfettamente il suo Creatore.

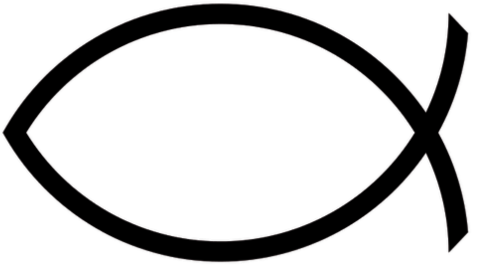
La geometria sacra è usata, spesso in Architettura, nella pianificazione e costruzione di edifici religiosi come chiese, templi, moschee, monumenti e

---

[1]Docente di Matematica presso l'IPSSAR Alberghiero Molfetta, settore Prodotti Dolciari e socio della Mathesis Nazionale, Città Metropolitana di Bari.

complessi vari, altari, tabernacoli o dipinti, sculture o anche spazi sacri. Secondo Paul Calter, nella geometria sacra, significati simbolici e sacri sono attribuiti a certe forme o proporzioni geometriche. Nel mondo antico certi numeri e forme che vennero presto correlate ai numeri (poligoni, pentagoni, triangoli, quadrati, esagoni, circonferenze) avevano anche un significato simbolico.

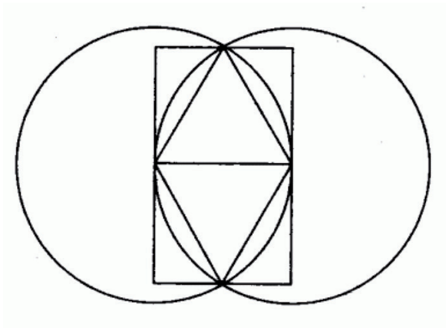
Uno dei simboli più significativi della Geometria Sacra è quello della "Struttura Madre", cioè la Vesica Piscis o Mandorla Mistica, di per sé è un simbolo arcaico semplice ma dalla grande forza evocativa e simbolica che accompagna la spiritualità umana da millenni.

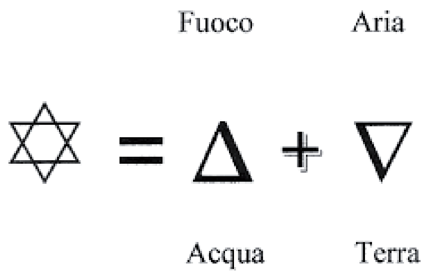


Questa figura ha differenti proprietà geometriche che l'hanno resa oggetto di numerose speculazioni e studi filosofici e matematici nel corso dei secoli.

Innanzitutto, essa indica una figura simbolica che deriva geometricamente dall'intersezione di due cerchi aventi lo stesso raggio ed i cui centri giacciono l'uno sulla circonferenza dell'altro. Il nome latino, che letteralmente significa "vescica di pesce", deriva dall'osservazione che la forma di questa figura ricorda quella della vescica natatoria dei pesci. Il simbolo era già noto in India, nell'antica Mesopotamia, in Africa e nelle civiltà asiatiche, ma si diffuse ampiamente soprattutto nel contesto cristiano, mediante l'associazione della figura del pesce a Cristo (con la figura dell'Ichthys). Successivamente, nelle elaborazioni iconografiche che seguirono, soprattutto negli affreschi e nei codici miniati medievali, la "vesica" viene associata all'immagine del Cristo e della Vergine in maestà, nell'iconografia nota anche come "mandorla mistica".

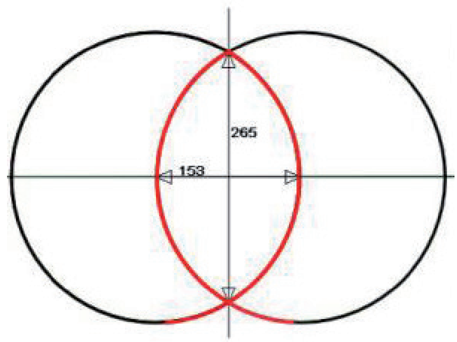
Se si vogliono analizzare nei dettagli le sue proprietà geometriche, si può innanzitutto osservare che tracciando il tratto orizzontale mediano e unendo i suoi estremi con i due vertici, si vengono a formare al suo interno due triangoli equilateri "perfettamente identici" e contrapposti. In pratica, essi simbolicamente rappresentano il "Doppio Ternario", attivo e passivo, maschile e femminile, che traslati l'uno sull'altro formano un altro ben noto simbolo della Tradizione Religiosa: l'Esagramma, o Stella di Davide.






La particolare costruzione della Vesica Piscis fa sì che il rapporto tra la sua altezza e la sua larghezza sia pari alla radice quadrata di 3, ovvero 1.7320508…, un numero irrazionale, illimitato ed aperiodico, un numero sacro ai pitagorici chiamato proprio “la misura del pesce”. Già il famoso filosofo Archimede di Siracusa dimostrò, nel suo trattato sulla misurazione del cerchio, che questo rapporto era compreso tra due ben determinati valori razionali. In particolare, il rapporto tra 265 e 153 è quello che potremo definire “approssimazione per eccesso” del numero irrazionale $\sqrt{3}$.

$$\frac{1351}{780} < \sqrt{3} < \frac{265}{153}$$




Si può dimostrare che non esistono altre frazioni ottenibili con fattori minori di questi che forniscano un’approssimazione migliore di questo valore. Ebbene, il più piccolo di questi numeri, il 153, viene citato da Giovanni nel suo Vangelo (21:11), quale numero di pesci miracolosamente catturati nella rete a seguito di un miracolo operato da Gesù, dopo la sua resurrezione. Molti studi e speculazioni sono stati fatti su questo numero e sui suoi significati esoterici, e sul perché sia stato citato nel passo del Vangelo. Tutti sono concordi, tuttavia che nel contesto del racconto del miracolo citare il numero esatto di pesci catturati non ha senso (coincidenza o riferimento esoterico al credo pitagorico?), Giovanni, tuttavia, non sta redigendo un libro contabile, ma sta scrivendo un Vangelo, ossia un libro di fede e di insegnamenti mistici.

Già Sant'Agostino, in uno scritto intitolato "De Diversis Quaestionibus Octoginta Tribus" (Su ottantatre diverse questioni), aveva posto l'attenzione su questo versetto del Vangelo e ne aveva fornito una spiegazione simbolica. Il Signore, spiega il Santo di Ippona, aveva regalato all'umanità, sin dal principio, due grandi doni: il Decalogo, ossia un gruppo di 10 comandamenti, e i doni dello Spirito Santo, che sono 7. Questi due valori, il denario e il settenario, combinati insieme danno il numero 17. Ora, è noto che 153 è un multiplo di 17 tramite il fattore 9 (ossia 153 = 9 x 17), ma è anche la somma dei primi 17 numeri, ossia:

$$153 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 16 + 17$$

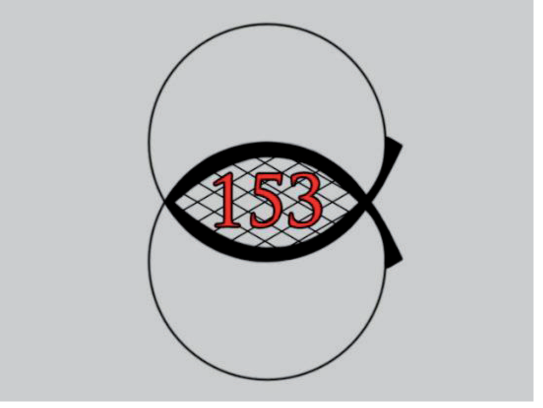
Quindi, questo numero è uno di quelli che in matematica vengono definiti "numeri figurati triangolari".

Ma il numero 153 possiede anche molte altre proprietà algebriche. Ad esempio è la somma dei primi cinque fattoriali:

$$153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120$$

Ed inoltre è anche un numero "narcisistico", cioè uno di quegli strani numeri che si possono ottenere da particolari combinazioni delle loro cifre componenti. In particolare, il numero 153 può essere ottenuto sommando i cubi delle sue cifre componenti:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27$$




## Bibliografia

[1] misteryhunters.wordpress.com/2017/12/01/la-madre-geometrica-vesica-piscis/.
[2] www.angolohermes.com/simboli/vesica_piscis/vesica.html.
[3] it.wikipedia.org/wiki/Geometria_sacra.

# Numeri primi di Sophie Germain

## *Sophie Germain's prime numbers*

***Antonino Giambò***[1]

**Abstract**.

*In this article some reflections on Germain primes are developed. These considerations, which are not devoid of originality, link those numbers to Polignac primes.*

### 1. Marie Sophie Germain (1776-1831).

Nel corso dell'anno 1804 fu recapitata a Carl F. Gauss (1777-1855) una missiva inviata da un certo *monsieur* Le Blanc, il quale si diffondeva su alcune proprietà dei numeri, suscitando l'interesse di colui che qualche anno prima (1801) aveva pubblicato il suo principale contributo alla teoria dei numeri, le *Disquisitiones arithmeticae*, opera che "*monsieur* Le Blanc" aveva studiato con entusiasmo. Gauss rispose e fra i due personaggi ebbe inizio una proficua corrispondenza che si sarebbe conclusa 4 anni dopo, nel 1808.

In realtà, *monsieur* Le Blanc non era affatto un *monsieur* ma una *mademoiselle*, una giovane francese coetanea di Gauss, innamorata della matematica, il cui vero nome era *Marie Sophie Germain*, la quale aveva deciso di servirsi di uno pseudonimo maschile poiché temeva che, sapendola donna, il grande matematico non l'avrebbe presa in considerazione. Bisogna sapere che a quell'epoca alle donne era vietata l'istruzione superiore, particolarmente in campo scientifico.

Sembra che Sophie si sia innamorata della matematica in seguito alla lettura di una biografia di Archimede e, in particolare, delle modalità della sua morte. Il padre, un ricco mercante parigino, che inizialmente guardò con scetticismo e non senza ostilità agli interessi della figlia, una volta costatatane la determinazione, non solo finì per acconsentire a che ella coltivasse il suo interesse e la sua passione per la matematica, ma la sostenne economicamente, finanziando i suoi studi. Studi che la giovane condusse per lo più da autodidatta o con l'aiuto di insegnanti privati, che però non la soddisfacevano.

---

[1] Ispettore MIUR in pensione.

In realtà, Sophie si iscrisse all'*École polytechnique* di Parigi. Siccome non vi erano ammesse le donne, lo fece seguendo lo stesso stratagemma che avrebbe usato in seguito con Gauss, ossia servendosi dello pseudonimo maschile Antoine-August Le Blanc. Ovviamente *monsieur* Le Blanc non frequentò mai le lezioni, non poteva proprio farlo, ma riusciva ad averne le dispense e a fare elaborazioni che poi inviava ai docenti per una valutazione. Uno dei docenti era il matematico italo-francese Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), il quale, favorevolmente impressionato dalla qualità del lavoro di *monsieur* Le Blanc, insistette per conoscerlo di persona. Fu così che Sophie fu costretta a rivelare la propria identità. Ma, contrariamente a quanto paventava, il prof Lagrange non solo non si adirò per essere stato ingannato, ma la incoraggiò a proseguire gli studi e divenne addirittura il suo mentore.

Anche Gauss finì per scoprire la vera identità di *monsieur* Le Blanc ed anch'egli non fu condizionato da pregiudizio alcuno ed anzi elogiò Sophie per il valore delle sue scoperte. È illuminante il suo pensiero al riguardo (cfr.: [1], pag. 267):

> *«... quando una persona di sesso femminile che, secondo il nostro giudizio e i nostri pregiudizi maschili, deve urtare in difficoltà infinitamente superiori a quelle che incontrano gli uomini per giungere a familiarizzarsi con le spinose ricerche della matematica, quando questa persona riesce, nonostante tutto, a sormontare simili ostacoli e a penetrare fino alle regioni più oscure della scienza, ella deve senza dubbio possedere un nobile coraggio, un talento assolutamente straordinario ed un genio superiore».*

Come già accennato, il rapporto epistolare tra Gauss e Sophie, che peraltro mai ebbero modo d'incontrarsi, si concluse nel 1808, quando il "principe dei matematici" fu nominato professore di astronomia all'università di Gottinga e lasciò la città di Brunswick, dove era nato e vissuto.

Con l'interruzione della corrispondenza con Gauss, cessarono anche gli studi di Sophie sulla teoria dei numeri, che ella riprese tuttavia qualche anno più tardi per occuparsi del *grande teorema di Fermat*, alla cui risoluzione, che però sarebbe avvenuta quasi due secoli dopo, diede in ogni caso un valido contributo.

Non cessò comunque il suo interesse per la matematica. Ella, infatti, incoraggiata dal suo mentore Lagrange, si dedicò, anche qui con successo, alle applicazioni della disciplina che amava, specialmente in fisica. In particolare, approfittando di un concorso bandito dall'Accademia delle Scienze di Parigi, presentò come contributo una *Memoria sulle vibrazioni delle piastre elastiche*, un lavoro in cui sono le basi dei moderni studi sull'elasticità, scritto con la supervisione di Lagrange. Compare nella *Memoria*, come soluzione del problema affrontato, un'equazione differenziale che oggigiorno è chiamata *equazione di Germain-Lagrange*. La giuria, dopo varie vicissitudini e diversi contrasti, protrattisi per alcuni anni, assegnò il premio a Sophie e, fatto straordinario, la Germain fu ammessa alla frequenza delle sessioni di lavoro dell'Accademia stessa.

*Marie Sophie Germain*

Marie Sophie Germain, per i notevoli risultati conseguiti, avrebbe ben meritato una laurea in matematica, che però non ottenne mai. Non riuscì a vedersi accordata neppure la *laurea honoris causa* che le avrebbe voluto conferire l'Università di Gottinga su proposta di Gauss, poiché morì di tumore al seno prima che la stessa le fosse consegnata.

Nella teoria dei numeri, a parte il già citato apporto alla risoluzione del *grande teorema di Fermat*, il contributo più conosciuto di Sophie è lo studio di quelli che sarebbero stati definiti *numeri primi di Germain*.

## 2. Numeri primi di Germain.

Un numero primo $p_0$ è denominato *numero primo di Germain* se anche il numero $2p_0+1$ è un numero primo.

Per esempio: 2 è un numero primo di Germain, 7 non lo è.

Su questi numeri è stato scritto e detto molto.

Per esempio, se $p_0$ è un numero primo di Germain, il numero $p_1=2p_0+1$ è certamente un numero primo. È forse quest'ultimo un numero primo di Germain? Lo è se il numero $p_2=2p_1+1$ è a sua volta un numero primo. Proseguendo, se anche $p_1$, come $p_0$, è un numero primo di Germain, è forse pure $p_2$ un numero primo di Germain? Lo è evidentemente se il numero $p_3=2p_2+1$ è un numero primo. E così via.

Si capisce allora che è possibile stabilire una gerarchia tra i numeri primi di Germain.

Tutto questo ed altro ancora è noto in ambito matematico. Ma su un aspetto dei numeri di Germain, almeno per quanto mi risulta, nessuno ha mai indagato. Mi propongo di farlo in questo articolo.

## 3. Alcune proprietà dei numeri primi di Germain.

Incominciamo con alcune semplici considerazioni che, ai fini di quanto diremo più avanti, interessano solamente i numeri primi $p_0$ e $p_1$, indipendentemente dalle caratteristiche di $p_2$, che può essere primo o non esserlo.

È evidente che $p_0$ non può essere un numero primo se termina con cifra pari o per 5. Fatta eccezione per il numero 2 e per il numero 5.

Di conseguenza, per trovare numeri primi di Germain occorre indagare fra i numeri primi che terminano per 1 o per 3 o per 7 o per 9.

Fanno eccezione, come abbiamo anticipato, i numeri 2 e 5, che effettivamente sono numeri primi di Germain.

In realtà, non serve indagare neppure tra i numeri che terminano per 7. Vale infatti la seguente proprietà.

- PROPRIETÀ 1. **Non esistono numeri primi di Germain terminanti per 7**.
  DIMOSTRAZIONE. Tali numeri infatti dovrebbero essere del tipo $p_0=10a+7$, essendo a un numero naturale. Ma in tal caso si ha:

$$p_1 = 2p_0+1 = 2(10a+7)+1 = 20a+15 = (2a+1)\cdot 10+5.$$

Quindi $p_1$ termina per 5 e perciò non può essere un numero primo.

Possiamo allora concludere che i numeri primi di Germain vanno cercati fra i numeri primi che terminano per 1 o per 3 o per 9.

- PROPRIETÀ 2. **Se $p>3$ è un numero primo di Germain allora esiste un numero naturale k tale che $p=5+6k$**.

Oppure, come recitano i matematici: p è congruo di 5 rispetto al modulo 6. In simboli: $p\equiv 5 \pmod 6$ o anche $p\equiv_6 5$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo subito che, se p è un numero primo, non esiste alcun numero naturale k per il quale p possa essere uguale a 6k oppure a $6k+2=2(3k+1)$ o a $6k+3=3(2k+1)$ o a $6k+4=2(3k+2)$, dal momento che questi numeri non sono primi. Se poi p è un numero primo di Germain, non può essere uguale a $6k+1$, giacché in questo caso sarebbe $2p+1=2(6k+1)+1=12k+3=3(4k+1)$ e perciò $2p+1$ non sarebbe un numero primo. Rimane l'unica alternativa che sia $p=5+6k$. [c.v.d.]

- PROPRIETÀ 3. **Se p, q sono numeri primi di Germain, con $3<p<q$, allora esiste un numero naturale m tale che $q-p=6m$**.

DIMOSTRAZIONE. Per la precedente proprietà 2, esistono due numeri naturali h, k tali che $p=5+6h$, $q=5+6k$. Pertanto: $q-p=6(k-h)$. La proprietà è così dimostrata ponendo $k-h=m$.

## 4. Numeri primi di Germain e numeri primi gemelli.

Continuiamo ad occuparci dei numeri primi di Germain, ma in stretto collegamento con i numeri primi gemelli, ricordando che due numeri primi si dicono *gemelli* se formano una coppia ordinata (p, p+2).

La prima coppia di numeri primi gemelli è la coppia (3, 5).

Evidentemente questa coppia è anche una coppia di numeri primi di Germain. Ci domandiamo: **esistono altre coppie di numeri primi gemelli che siano anche numeri primi di Germain?**

La risposta è NO. In effetti, considerata una coppia (p, p+2) di numeri primi gemelli, con $p>3$, questi numeri non possono essere numeri primi di Germain poiché soddisfano alla proprietà 4.

## 5. Numeri primi di Germain e numeri primi di Polignac.

La congettura dei numeri primi gemelli è un caso particolare di una congettura più generale, nota come congettura di Polignac, formulata nel 1849 dal matematico francese Alphonse de Polignac (1817-1890):

**Per ogni numero naturale 2m non nullo esistono, nella successione dei numeri primi, infinite coppie ordinate di numeri CONSECUTIVI (p,q) tali che 2m=q–p[(2)].**

Per comodità di ragionamento chiamiamo *numeri primi di Polignac distanti* 2m una coppia di numeri siffatti e indichiamo con Polignac(2m) l'insieme di tali coppie.

Cosicché, per esempio, per m=2 ed m=3, rispettivamente:

- Polignac(4) = $\{(7,11),(13,17),(19,23),\dots\}$;
- Polignac(6) = $\{(23,29),(31,37),(47,53),\dots\}$.

Di nuovo ci domandiamo se, in ognuno degli insiemi Polignac(2m), esistono coppie di numeri che siano anche numeri primi di Germain.

Abbiamo già visto cosa succede nell'insieme Polignac(2), vale a dire nell'insieme dei numeri primi gemelli.

Come immediata conseguenza della precedente proprietà 3 si ha che:

**Negli insiemi Polignac(6k+2) e Polignac(6k+4), dove k è un qualsiasi numero naturale, non esistono coppie di numeri che siano anche numeri primi di Germain. Fatta eccezione per l'anomalia segnalata riguardo l'insieme Polignac(2).**

Pertanto, solamente nell'insieme Polignac(6k), dove k è un qualsiasi naturale non nullo, possono esistere coppie di numeri primi che siano nel contempo numeri primi di Germain.

Di fatto, i seguenti esempi mostrano che tali coppie esistono. Per ragioni di spazio ci limitiamo ad indicare le prime coppie dei corrispondenti insiemi, ovvero quelle per le quali p ha il minimo valore.

---

[2] Se questa congettura fosse vera, vorrebbe ben dire che, pensando un numero pari grande quanto si vuole, per esempio $100^{100^{100}}$ (ma anche molto più grande), esistono, nella successione dei numeri primi, infinite coppie di numeri consecutivi p, q tali che $q–p=100^{100^{100}}$. Ossia, tra p e q ci sono $100^{100^{100}}$ numeri, ma nessuno di essi è primo. Veramente ed a ragione si può parlare di "solitudine dei numeri primi".

In realtà, a prescindere dalla congettura di Polignac, si dimostra che esistono catene lunghe quanto si vuole di numeri consecutivi tutti composti. Si considerino al riguardo i seguenti n-1 numeri consecutivi:

$$n!+2,\quad n!+3,\quad n!+4,\quad \dots\quad ,\quad n!+n.$$

Il primo di essi è certamente divisibile per 2, il secondo per 3, il terzo per 4, … , l'ultimo è divisibile per n. Abbiamo così ottenuto una catena di n-1 numeri consecutivi tutti composti. Questo non significa però che i due numeri naturali che li racchiudono, vale a dire (n!+2)-1 e(n!+n)+1 siano numeri primi.

Coppie di numeri degli insiemi Polignac(6), Polignac(12), Polignac(18)
che sono numeri primi di Germain

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 23 | p | 1.499 | p | 3.803 |
| p+6 | 29 | p+12 | 1.511 | p+18 | 3.821 |
| 2p+1 | 47 | 2p+1 | 2.999 | 2p+1 | 7.607 |
| 2(p+6)+1 | 59 | 2(p+12)+1 | 3.023 | 2(p+18)+1 | 7.643 |

Coppie di numeri degli insiemi Polignac(24), Polignac(30), Polignac(36)
che sono numeri primi di Germain

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 7.079 | p | 27.551 | p | 62.423 |
| p+24 | 7.103 | p+30 | 27.581 | p+36 | 62.459 |
| 2p+1 | 14.159 | 2p+1 | 55.103 | 2p+1 | 124.847 |
| 2(p+24)+1 | 14.207 | 2(p+30)+1 | 55163 | 2(p+36)+1 | 124.919 |

Coppie di numeri degli insiemi Polignac(42), Polignac(48), Polignac(54)
che sono numeri primi di Germain

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 180.959 | p | 233.021 | p | 1.231.889 |
| p+42 | 181.001 | p+48 | 233.069 | p+54 | 1.231.943 |
| 2p+1 | 361.919 | 2p+1 | 466.043 | 2p+1 | 2.463.779 |
| 2(p+42)+1 | 362.003 | 2(p+48)+1 | 466.139 | 2(p+54)+1 | 2.463.887 |

Non è detto, però, che tutte le quaterne di numeri primi $(p, p+6k, 2p+1, 2(p+6k)+1)$, siano quaterne del tipo che stiamo analizzando. Giacché, infatti, esistono quaterne siffatte, in cui però p e p+6k non sono primi ***consecutivi***. Giusto per fornire un paio di esempi:

- nella quaterna di numeri primi (1.439, 1451, 2.879, 2.903), ottenuta per k=1. i numeri 1.439 e 1.451 non sono primi consecutivi, dal momento che fra essi s'inserisce il numero primo 1.447;
- nella quaterna di numeri primi (284.969, 285.023, 569.939, 570.047), ottenuta per k=9, i numeri 284.969 e 285.023 non sono primi consecutivi, dal momento che fra essi s'inseriscono i numeri primi 284.989 e 285.007.

Giunti a questo punto, appare naturale domandarsi se le coppie di numeri degli insiemi Polignac(6k), che siano anche numeri primi di Germain, sono in numero finito o infinito.

In altri termini, è vera o falsa la seguente proposizione?

***Per ogni numero naturale k non nullo, nell'insieme Polignac(6k) esistono infinite coppie di numeri che sono anche numeri primi di Germain.***

Personalmente credo che sia vera, ma la mia è solo una **congettura**, poiché non sono in grado di dimostrarla.

In realtà, una spiegazione della proposizione precedente ci sarebbe, ma non definitiva giacché sposta solamente il problema. Tale spiegazione infatti è basata su un'altra congettura, la cosiddetta congettura di Dickson, formulata nel 1904 dal matematico statunitense Leonard Eugene Dickson (1874-1954).

## 6. La congettura di Dickson.

Questo è l'enunciato della **congettura di Dickson:**

*Indicato con* $s$ *un intero positivo, siano le funzioni* $f_i(n) = a_i n + b_i$ *con* $a_i, b_i$ *numeri interi e* $a_i$ *positivi (per* $i = 1, \dots, s$*). Supponiamo che non esista alcun intero positivo* $m>1$ *che divida ciascun prodotto* $\prod_{i=1}^{s} f_i(n), \forall n \in \mathbb{Z}$*. Allora esistono infiniti numeri naturali* $n$ *tali che* $f_1(n), f_2(n), \dots, f_s(n)$ *sono tutti contemporaneamente primi.*

Ebbene, se vale la congettura di Dickson, si dimostra che:

*Per ogni intero positivo k esistono infiniti numeri primi consecutivi* $p$, $p+6k$ *che sono primi di Germain.*

Vogliamo proporre tale dimostrazione dal momento che la comunità dei matematici scommette sulla verità della congettura di Dickson e ovviamente sulle sue implicazioni, che non sono poche.

Tanto per dire, questa congettura, se è vera, implica l'esistenza di infiniti primi gemelli, l'esistenza di infiniti primi di Germain e la congettura di Polignac. Cosa peraltro nota agli studiosi dell'argomento.

Comunque, noi vogliamo qui dimostrare che essa implica l'esistenza di infiniti primi consecutivi p, p+6k che sono primi di Germain.

Per questo sono necessarie un paio di premesse, ottenute mediante un adattamento di Ribenboim, [3].

- LEMMA 1. Sia $f(n)=\alpha n+\beta$, con $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, una funzione lineare del numero naturale n. Sia inoltre q un intero positivo primo con $\alpha$. Esiste ed è unico $n_0\in\mathbb{Z}_q$ ($\mathbb{Z}_q$ è l'insieme dei resti modulo q) tale che $f(n_0)$ è multiplo di q.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente costatare che gli insiemi $\mathbb{Z}_q$ e $\{\alpha n+\beta \mid n\in\mathbb{Z}_q\}$ sono strutturalmente isomorfi. Ne consegue che esiste ed e unico $n_0\in\mathbb{Z}_q$ tale che $\alpha n+\beta\equiv_q 0$.Come dire che esiste ed è unico $n_0\in\mathbb{Z}_q$ tale che $f(n_0)$ è multiplo di q.

- LEMMA 2. Se vale la congettura di Dickson, fissato un intero k>1, esistono infiniti numeri naturali n tali che, posto p=6n+5, i numeri p, p+6k sono numeri primi di Germain.

DIMOSTRAZIONE (lunga e complessa). Fissato k>1, si considerino le seguenti funzioni lineari del numero naturale n:

$$f_1(n)=p, \quad f_2(n)=p+6k, \quad f_3(n)=2p+1, \quad f_4(n)=2(p+6k)+1,$$

dove $p=6n+5$.

Consideriamo il prodotto $\Pi(n)$ di queste funzioni e fermiamo la nostra attenzione sui valori che esso assume per $n=0,1,2,3,4$.Si trova che:

$$\Pi(0) = 5\cdot 11\cdot(5+6k)\cdot(11+12k),$$
$$\Pi(1) = 11\cdot 23\cdot(11+6k)\cdot(23+12k),$$
$$\Pi(2) = 17\cdot 5\cdot 7\cdot(17+6k)\cdot(35+12k),$$
$$\Pi(3) = 23\cdot 47\cdot(23+6k)\cdot(47+12k),$$
$$\Pi(4) = 29\cdot 59\cdot(29+6k)\cdot(59+12k).$$

Indaghiamo su questi 5 prodotti al fine di dimostrare che non esiste alcun intero positivo m>1 che li divida tutti.

Nel prodotto $\Pi(0)$ figura il fattore 5, numero che divide anche $\Pi(2)$. Ammettiamo che questo numero divida anche gli altri 3 prodotti.

Per quanto riguarda $\Pi(1)$, costatato che 5 non divide né 11 né 23, delle due l'una: o divide 11+6k o divide23+12k.

Ammettiamo che 5 divida 11+6k e ragioniamo su $\Pi(3)$. Costatato che 5 non divide 23 né 47, osserviamo che non divide neppure 23+6k, poiché in caso contrario dovrebbe dividere anche $(23+6k)-(11+6k)=12$ e ciò non è. Quindi, riflettendo sempre su $\Pi(3)$, il numero 5 deve dividere 47+12k.

Passiamo adesso a $\Pi(4)$. Costatiamo che 5 non divide 29 né 59. Esso non divide neppure 29+6k, poiché in caso contrario dovrebbe dividere anche $(29+6k)-(11+6k)=18$ e ciò non è. Ma 5 non divide neppure 59+12k, dal momento che in caso contrario dovrebbe dividere pure $(59+12k)-(47+12k)=12$ e ciò non è.

Quindi l'ipotesi che 5 divida il fattore 11+6k di $\Pi(1)$ è falsa.

Allo stesso modo si dimostra che 5 non può dividere il fattore 23+12k.

Ne consegue che il numero 5 non è un fattore comune a tutti e 5 i prodotti $\Pi(n)$. Con ragionamento analogo si dimostra che il numero 11 non è un fattore comune a tutti i prodotti $\Pi(n)$.

Ci sono altri due fattori di $\Pi(0)$: 5+6k e 11+12k. Esaminiamoli.

Ammettiamo che q sia un fattore primo di 5+6k e supponiamo che divida gli altri 4 prodotti $\Pi(n)$. Con considerazioni analoghe a quelle già esposte per il numero 5, si dimostra che questo numero q non può essere 23 e siccome abbiamo già visto che non può essere 11, delle due l'una: o q divide 11+6k oppure divide 23+12k.

Ammettiamo che q divida 11+6k. Allora divide anche $(11+6k)-(5+6k)=6$. Dunque $q=2$ e ciò non può essere poiché 5+6k è un numero dispari; oppure $q=3$ e neppure questo può essere poiché 3, che divide 6k, dovrebbe dividere 5 e ciò non è. Insomma è falsa l'ammissione che q divida 11+6k. Deve dividere perciò 23+12k.

A questo punto, ragionando sul fatto che q divide $\Pi(2)$, con considerazioni analoghe a quelle viste in precedenza per 5, si prova che q non può essere 7 né 17 e siccome abbiamo già visto che non può essere 5, delle due l'una: o q divide 17+6k oppure divide 35+12k. Esso però non può dividere 17+6k poiché altrimenti dovrebbe dividere anche $(17+6k)-(5+6k)=12$ e di nuovo dovrebbe essere $q=2$ oppure $q=3$ e abbiamo visto che ciò non è. Ma q non può dividere neppure 35+12k poiché altrimenti dovrebbe dividere $(35+12k)-(23+12k)=12$, per cui ancora una volta dovrebbe essere $q=2$ oppure $q=3$, cosa che non è possibile. Perciò q non può dividere $\Pi(2)$. Di conseguenza, non esiste un fattore primo di 5+6k che divida tutti e 5 i prodotti $\Pi(n)$.

Con un ragionamento analogo si dimostra che non esiste un fattore primo di 23+12k, che divida tutti e 5 i prodotti $\Pi(n)$.

In conclusione, nessuno dei fattori primi di $\Pi(0)$ divide tutti e 5 i fattori $\Pi(0), \Pi(1), \Pi(2), \Pi(3), \Pi(4)$.

Se vale la congettura di Dickson, bisogna concludere che esistono infiniti naturali n tali che, posto $p=6n+5$, i numeri p, p+6k sono numeri primi di Germain.

Ma, fino a questo punto, nulla assicura che tali numeri siano primi consecutivi. Questo deve essere ancor dimostrato. Lo andiamo a fare.

- TEOREMA. **Se vale la congettura di Dickson**, e**sistono infiniti numeri primi consecutivi che sono anche numeri primi di Germain**.

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero $k\geq 1$, dal precedente lemma 2 segue l'esistenza di infinite coppie $(h, h+6k)$ di numeri primi di Germain. Ricordiamo che, per la già dimostrata proprietà 2, deve essere $h\equiv_6 5$. Sia h grande abbastanza da poter supporre $h>6k$ e sia:

$$b=\frac{(h+6k-1)!}{h}=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(h-1)\cdot(h+1)\cdot\ldots\cdot(h+6k-1)\,.$$

Si può notare che né h né h+6k dividono b.

Consideriamo ora le seguenti funzioni del numero naturale n:

$$f_1(n)=p,\quad f_2(n)=p+6k,\quad f_3(n)=2p+1,\quad f_4(n)=2(p+6k)+1,$$

dove $p=bn+h$.

Sia $\Pi(n)$ il loro prodotto.Dimostriamo che non esiste un fattore comune a tutti i possibili prodotti $\Pi(n)$. Al riguardo, ragionando per assurdo, supponiamo che esista un fattore comune a tali prodotti: chiamiamolo q. Allora q divide $\Pi(0)=h\cdot(h+6k)\cdot(2h+1)\cdot(2(h+6k)+1)$.

Dal lemma 2 sappiamo che i 4 fattori di questo prodotto sono tutti numeri primi e perciò q non può essere che uno di tali fattori e deve essere perciò $q\geq h>6$. Inoltre, q non può dividere b (e perciò neppure 2b). Questo, in virtù del lemma 1, implica che, per ciascuna delle 4 precedenti funzioni $f_i(n)$, esiste un unico numero $m_i\in\mathbb{Z}_q$ tale che $f(m_i)$ sia multiplo di q. Il che farebbe concludere che q è un fattore comune ai numeri $f_i(n)$ se fosse q=4, cioè tanto quante le funzioni $f_i(n)$. Ma q>4. Per cui, esiste in $\mathbb{Z}_q$un numero $n_0$ tale che q non divide nessuno delle $f_i(n_0)$, per i=1,2,3,4. Dunque q non può essere un fattore di $\Pi(n_0)$. È pertanto falsa l'ipotesi fatta che esista un fattore q comune a tutti i possibili prodotti $\Pi(n)$.

Pertanto, se vale la congettura di Dickson, esistono infiniti n tali che i numeri $f_1(n), f_2(n), f_3(n), f_4(n)$ sono contemporaneamente primi.

Per provare finalmente che p, p+6k, dove $p=bn+h$, sono primi consecutivi, ragioniamo ancora per assurdo. Supponiamo perciò che esista un primo $q=p+d$, ossia $q=bn+h+d$, dove $0<d<6k$. Allora, dalla definizione di b, osserviamo che h+d divide b e quindi deve dividere anche q. Ma questo è assurdo poiché q è un numero primo. Dunque tale q non esiste.

## 7. Avviso ai naviganti.

Francamente dubito che qualcuno, ammesso che qualcuno ci sia che legga questo articolo, tenti di ricercare altre coppie di numeri primi di Polignac che siano anche numeri primi di Germain. Ma se per ventura un tale soggetto ci fosse, mi permetto qualche suggerimento al fine di semplificargli il compito.

- La ricerca, nell'insieme Polignac(6k), dove k=1+5h, con $h\in\mathbb{N}$, di coppie di numeri che siano anche numeri primi di Germain, deve essere limitata solamente ai numeri primi p che terminano per 3.

Di fatto, se p termina per 1 allora è del tipo p=10a+1, mentre p+6k=(10a+1)+6(1+5h)=10(a+3h)+7, per cui 2(p+6k)+1 non può essere primo. Se poi p termina per 9 allora è del tipo p=10a+9, mentre p+6k=(10a+9)+6(1+5h)=10(a+3h+1)+5, per cui p+6k non può essere primo.

Con dimostrazioni analoghe si giustifica poi quanto segue:

- La ricerca, nell'insieme Polignac(6k), dove k=2+5h, con $h\in\mathbb{N}$, di coppie di numeri che siano anche numeri primi di Germain, può essere limitata ai numeri primi p che terminano per 1 o per 9.
- La ricerca, nell'insieme Polignac(6k), dove k=3+5h, con $h\in\mathbb{N}$, di coppie di numeri che siano anche numeri primi di Germain, può essere limitata ai numeri primi p che terminano per 1 o per 3.
- La ricerca, nell'insieme Polignac(6k), dove k=4+5h, con $h\in\mathbb{N}$, di coppie di numeri che siano anche numeri primi di Germain, deve essere limitata ai numeri primi p che terminano per 9.

Riguardo l'insieme Polignac(6k), dove k=5+5h, con $h\in\mathbb{N}$, il ragionamento precedente non permette di escludere alcuna possibilità e pertanto la ricerca di coppie di numeri che siano anche numeri primi di Germain va estesa ai numeri primi p che terminano per 1, per 3 o per 9.

Naturalmente, più si va avanti nella ricerca più diventano grandi i numeri coinvolti, e questo complica molto le cose. Si consideri al riguardo, giusto per avere un'idea, cosa accade nell'insieme Polignac(54). Non è garantito, tuttavia, che al crescere di k cresca anche la prima coppia utile dell'insieme Polignac(6k). Basti considerare, come controesempio, cosa accade nell'insieme Polignac(60), nel quale la prima coppia utile è (815.063, 815.123), che genera la quaterna di numeri primi (815.063, 815.123, 1.630.127, 1.630.247).

**Pensierino finale*:***

*Le incantevoli attrattive di questa scienza sublime non si rivelano che a coloro i quali hanno il coraggio di penetrare a fondo nei suoi misteri.*

Da una lettera di Gauss a Sophie Germain, datata 30 aprile 1807.

**Bibliografia**:

[1] ERIC T. BELL, *I grandi matematici*, Biblioteca Sansoni, Firenze, 1966.
[2] Collana "Geni della Matematica", *Germain*, RBA Italia, Milano, 2018.
[3] PAULO RIBENBOIM, *The new book of prime number records*, Springer-Verlag, New York, 1996.

# Sul Teorema Fondamentale dell'Algebra[1]

## *On the Fundamental Theorem of Algebra*

***Luca Granieri*** [2]

**Abstract**

*We discuss in details how to determine the roots of equations of third degree. Moving from the existence of roots of odd degree polynomials we provide a proof of the Fundamental Theorem of Algebra which can be useful to teachers and students of secondary high school level.*

Nello studio dell'algebra uno dei compiti fondamentali che gli studenti imparano ad affrontare è quello di determinare radici di polinomi. Per quelli di primo e secondo grado si può sempre dire se ammettano o no radici (reali) in modo non troppo faticoso. Ma non appena il grado aumenta la faccenda non è più così immediata. Ad esempio, per le equazioni di terzo grado della forma $x^3 - px - q = 0$ (alla quale si può ricondurre qualunque equazione di terzo grado) si ricava la cosiddetta formula di Cardano-Tartaglia-Del Ferro

$$(1) \qquad x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

L'applicabilità (in campo reale) della (1) richiede ovviamente che sia

$$(2) \qquad \Delta_3 := \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$$

Ma il fatto è che anche in casi semplici come per l'equazione$x^3 - 15x - 4 = 0$ risulta $\Delta_3 = 4 - 5^3 = -121 < 0$ mentre si trova che $x$=4 è una radice. Infatti, da una valutazione diretta risulta $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 4^3 - 4(-15 -$

[1] Questo articolo è stato ispirato da una lezione tenuta dal Prof. Enrico Jannelli in occasione di un corso di formazione per docenti di scuola secondaria nell'ambito del PLS (Piano Lauree Scientifiche) di Matematica dell'Università di Bari ed è a lui dedicato.

[2] *granieriluca@libero.it*.

$1) = 4^3 - 4^3 = 0$. Anzi, di radici reali il polinomio $P(x) = x^3 - 15x - 4$ ne ammette in realtà tre. Basta osservare che $P(-5) = -5^3 + 3 \cdot 5^2 - 4 = -5^2(5-3) - 4 < 0$ ; $P(-3) = -3^3 + 15 \cdot 3 - 4 = 3^2(5-3) - 4 > 0$; $P(1) = 1 - 15 - 4 < 0$ ed applicare il Teorema degli zeri.

Ora, se $\Delta_3 \geq 0$ si verifica facilmente che la formula (1) restituisce effettivamente una radice dell'equazione di terzo grado $x^3 - px - q = 0$. Ma i polinomi di grado dispari hanno sempre almeno una radice reale (quale conseguenza del Teorema degli zeri) e la (1) sembra non essere in grado di trovarla sempre, né di dirci se ce ne siano altre o no. A meno che non si passi al campo *complesso*. Considerando l'unità immaginaria $i^2 = -1$, nel caso in cui $\Delta_3 < 0$ la (1) restituisce la radice terza di due numeri complessi coniugati. Ad esempio per l'equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$ si tratta di calcolare $x = \sqrt[3]{-2 + 11i} + \sqrt[3]{-2 - 11i}$ . Nei primi rudimenti sui numeri complessi si trova la proprietà che ogni numero complesso ha sempre $k$ radici complesse distinte, quale che sia l'intero $k \geq 1$. Inoltre, se $w^3 = z$ è una radice terza di z allora il suo coniugato soddisfa $\bar{w}^3 = \overline{w^3} = \bar{z}$ da cui deriva che $\bar{w}$ è una radice terza di $\bar{z}$. Pertanto, la (1) assume la forma

$$x = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}} = w + \bar{w} \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto, ogni volta che $\Delta_3 < 0$ la (1) ci restituisce ben tre radici reali.

Se invece $\Delta_3 \geq 0$ allora la (1) ci restituisce una radice reale, diciamo $x_1 \in \mathbb{R}$. Dividendo si ottiene la scomposizione

$$x^3 - px - q = (x - x_1)(x^2 + x_1 x + x_1^2 - p).$$

Dunque, la natura delle altre radici del polinomio (che saranno in tutto ancora tre, tenuto conto della molteplicità) dipendono dal comportamento del trinomio di secondo grado $x^2 + x_1 x + x_1^2 - p$ e quindi in definitiva dal suo discriminante $\Delta = x_1^2 - 4(x_1^2 - p) = 4p - 3x_1^2$.

Naturalmente, vorremo stabilire la natura delle radici in base al comportamento di $\Delta_3$. Distinguiamo i casi

- $\Delta_3 = 0$,

da cui ricaviamo che $x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{4q}$. Segue che $x_1^2 = \sqrt[3]{4^2 q^2}$. D'altra parte, essendo $\Delta_3 = 0$ si ha che $q^2 = \frac{4p^3}{3^3}$. Pertanto $\Delta = 4p - 3x_1^2 = 4p - 3 \cdot \frac{4}{3}p = 0$. Pertanto l'equazione $x^3 - px - q$ ammette un'ulteriore radice reale doppia

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

- $\Delta_3 > 0$.

Poniamo per semplicità $a = \frac{q}{2}$, $b = \frac{p}{3}$ e ancora $A = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - b^3}}$ e $B = \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - b^3}}$. Valutiamo che

$$x_1^2 = (A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB > 4AB = 4\sqrt[3]{b^3} = 4b = \frac{4}{3}p.$$

Dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza $A^2 + B^2 \geq 2AB$ nella quale l'uguaglianza vale se e soltanto se $A = B$. In definitiva abbiamo che $\Delta = 4p - 3x_1^2 < 4p - 3 \cdot \frac{4}{3}p = 0$. In tal caso l'equazione $x^3 - px - q = 0$ non ammette altre radici reali ma bensì due radici complesse e coniugate:

$$z = \frac{-x_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

- $\Delta_3 < 0$,

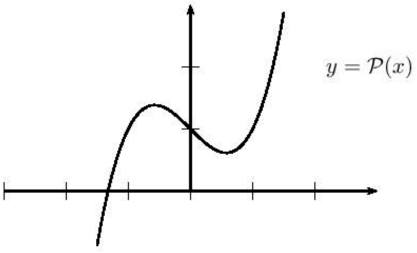
come discusso in precedenza l'equazione $x^3 - px - q = 0$ ammette tre radici reali distinte.

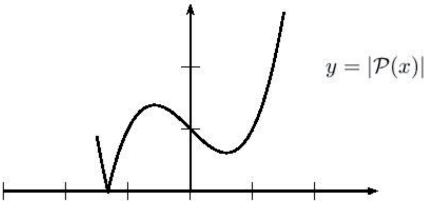
**Il Teorema Fondamentale dell'Algebra**

La discussione sul polinomio di terzo grado ci suggerisce che passando ai numeri complessi si possano sempre trovare tante radici quanto è il grado del polinomio. Ma, come si sa, a partire dai contributi di Ruffini-Abel-Galois, per i polinomi di grado qualsiasi non esistono formule algebriche esplicite (tranne che per il grado quattro) su cui fare affidamento. Occorre un approccio più generale (e più indiretto). Ad ogni modo, scomponendo i polinomi, il Teorema fondamentale dell'algebra assume la forma

**Teorema Fondamentale dell'Algebra**: Ogni polinomio ammette almeno una radice in campo complesso.

Come accennato più volte, per i polinomi di grado dispari ciò è vero già in campo reale. Tuttavia, l'argomento del Teorema degli zeri non è esportabile così com'è in campo complesso, giacché non c'è una corrispondente relazione d'ordine. Ma potremmo cambiare strategia. Infatti, gli zeri del polinomio dispari $P(x)$ potrebbero essere visti come punti di minimo di $|P(x)|$.




Cosa che potrebbe avere un seguito anche in campo complesso. Formalizziamo quest'idea nel seguente

**Teorema**. Ogni polinomio (reale a coefficiente reali) di grado dispari possiede almeno una radice reale.
**Dim**. Avendo grado dispari si ha $|P(x)| \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$. Dal Teorema di Weierstrass segue facilmente che $|P(x)|$ ammette minimo. In effetti, fissato un qualunque valore $y_0 = |P(0)|$, possiamo assumere che $|P(x)| > y_0$ fuori da un intervallo di raggio *r>0*. Allora il minimo di $|P(x)|$ in *[-r, r]* è automaticamente il minimo di $|P(x)|$ su tutta la retta reale. Sia dunque $x_0$ punto di minimo di $|P(x)|$. Se fosse $|P(x_0)| \neq 0$, detto *n* il grado di *P*, si consideri $w^n = -\frac{1}{a_n}$, dove $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Cosa che è sempre possibile essendo *n* dispari. Per fissare le idee supponiamo che sia ad esempio $P(x_0) > 0$.

Valutiamo che

$$|P(x_0 + tw)| = |P(x_0) - t^n + l(t)| < |P(x_0)|$$

per qualche *t* in un intorno dell'origine essendo *l(t)* un polinomio di grado *n-1* con *l(0)=0*. Basterà scegliere $0 < t^n - l(t) < P(x_0)$.
Ma questo contraddice il fatto che $x_0$ è punto di minimo per $|P(x)|$.

La strategia perseguita nella dimostrazione precedente funziona perché è sempre possibile estrarre radici di ordine dispari. Cosa che non funziona per il grado pari. Ma allora questa limitazione nell'ambito dei numeri reali può diventare invece un punto di forza nell'ambito complesso, giacché in quel contesto l'estrazione di radici (complesse) è sempre possibile senza limitazione alcuna. Poi si può interpretare il $|\cdot|$ come *modulo* dei numeri complessi e utilizzare il Teorema di Weierstrass nel piano complesso (ovvero per funzioni continue in due variabili). Possiamo allora produrre la seguente.

**Dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra**

Dato che $|P(z)| \to +\infty$ per $|z| \to +\infty$, utilizzando il Teorema di Weierstrass si trova che $|P(z)|$ ammette minimo. Sia $z_0$ un punto di minimo e supponiamo per assurdo che sia $|P(z_0)| \neq 0$.

Per semplificare un po' le notazioni possiamo suppore, effettuando delle traslazioni, che tale punto di minimo sia l'origine degli assi e che *P(0)=1*. A tal fine si potrà considerare il polinomio $P_1(z) \coloneqq \frac{1}{P(z_0)} P(z + z_0)$. Per cui

$$1 = P_1(0) = \frac{1}{|P(z_0)|} |P(z_0)| \leq \frac{1}{|P(z_0)|} |P(z + z_0)| = |P_1(z)|.$$

In altre parole, possiamo assumere che il nostro polinomio sia della forma $P(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$e che abbia minimo nell'origine.
Sia $a_k \neq 0$ il primo coefficiente non nullo di *P*. Sia $w^k = -\frac{1}{a_k}$ una radice *k*-esima di $a_k$. Per $t \in [0,1]$ valutiamo che

$$|P(tw)| = \left|1 - t^k + t^{k+1} a_{k+1} w^{k+1} + \cdots t^n a_n w^n\right| \leq$$
$$1 - t^k + t^{k+1} |a_{k+1} w^{k+1} + \cdots| < 1 = |P(0)|$$

per *t* abbastanza piccolo.

Ma questo contraddice il fatto che $z_0 = 0$ è punto di minimo per $|P(z)|$.

# Un ritorno di fiamma: fare matematica

## *A flashback: doing math*

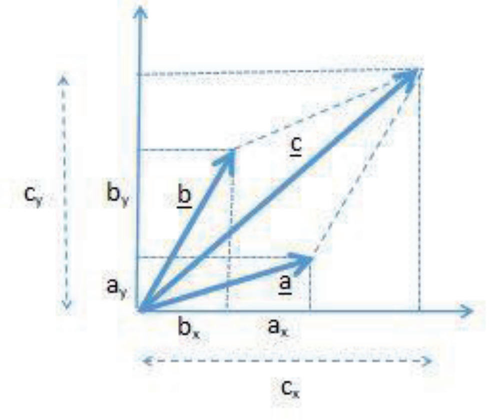
***Biagio Mario Dibilio***

**Abstract**

*A proof of the cosine theorem by vector decomposition and an error in its application .*

Dimostriamo il teorema di Carnot ( o del coseno)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \delta \quad \text{(da dimostrare)}$$




| |
|---|
| α = angolo tra il vettore a e l'asse x<br>β = angolo tra il vettore b e l'asse x<br>γ = angolo tra il vettore c e l'asse x<br>δ = angolo tra i vettori a e b |

Allora:

$$c_x = a_x + b_x \qquad a^2 = a_x^2 + a_y^2$$
$$c_y = a_y + b_y \qquad b^2 = b_x^2 + b_y^2$$

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2 = (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 = a_x^2 + b_x^2 + 2\, a_x \cdot b_x + a_y^2 + b_y^2 + 2 \cdot a_y \cdot b_y$$

$$c^2 = (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) + 2 \cdot (a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y) = a^2 + b^2 + 2 \cdot (a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y)$$

ora, poiché

$a_x = a \cdot \cos \alpha$;  $a_y = a \cdot \text{sen}\, \alpha$;  $b_x = b \cdot \cos \beta$;  $b_y = b \cdot \text{sen}\, \beta$

sostituendo nella formula precedente si ottiene

$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot(a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y) = a^2 + b^2 + 2\cdot( a\cdot\cos\alpha \cdot b\cdot\cos\beta + a\cdot\text{sen}\,\alpha \cdot b\cdot\text{sen}\,\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta) = c^2 = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\alpha - \beta)$

ma, poiché $(\alpha - \beta) = - (\beta - \alpha) = - \delta$, si ottiene

$c^2 = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(- \delta) = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\delta$

Come mai si ottiene il segno "+" invece del segno corretto "-" ?

Dove si trova l'errore nella dimostrazione?

La cosa più strana è che, con un esempio pratico, misurando con un righello la lunghezza dei tre vettori disegnati e con un goniometro l'angolo tra i vettori a e b si ottiene il risultato corretto solo se nella formula del teorema del coseno metto il segno "+" sbagliato invece del segno "-" corretto. Perciò, il risultato dell'esempio pratico è coerente con il risultato della dimostrazione, ma non lo è con quanto afferma il teorema di Carnot.

La mattina dopo, a mente fresca, ho cercato il possibile errore ed ho trovato dove sbagliavo. La dimostrazione con la scomposizione vettoriale era corretta, ma era sbagliata l'applicazione del teorema di Carnot. Infatti, questo si applica ad un triangolo conoscendo due lati e l'angolo compreso mentre la mia dimostrazione riguardava l'angolo compreso tra due vettori, quando si procede alla loro somma nel calcolo vettoriale. Guardando il parallelogramma che si ottiene nella somma vettoriale, questo si divide in due triangoli e gli angoli opposti al vettore risultante sono supplementari rispetto all'angolo che si trova tra i due vettori da sommare. Ecco perché veniva nella dimostrazione il segno "più" invece del segno "meno".

Dopo tanti anni ho ritrovato il teorema di Carnot, ma pretendevo di applicarlo nella maniera sbagliata. Mi sta venendo la voglia di rimettermi a studiare per rimandare per quanto possibile il rimbambimento dovuto agli anni che passano.

## Bibliografia

[1] B.M. DIBILIO, *Dal fenomeno alla legge fisica* (Il Capitello - Torino).

[2] B.M. DIBILIO, *Fenomeni e leggi della fisica nelle scienze integrate* (Il Capitello -Torino).

[3] B.M. DIBILIO, *Fisica - Argomenti e test* (CISU - Roma).

# Equazioni differenziali a variabili separabili: la radioattività e la legge psicofisica di Weber-Fechner

## *Differential equations with separable variables: radioactivity and the psychophysical law of Weber-Fechner*

***Domenico Bruno***

**Abstract**.

*In this paper a topic of nuclear physics and one of acoustics are discussed, and these share a common mathematical basis: a differential equation with separable variables.*

*«...the different arguments we have discussed so far brings us to the conclusion that the new radioactive substance comprises a new element, which we propose to name Radium». (Pierre and Marie Curie,26 December 1898)*

Pierre e Marie Curie

Per questo articolo ho scelto due argomenti assai distanti fra loro: uno di fisica nucleare ("La radioattività") ed uno di acustica ("La legge psicofisica di Weber-Fechner").

Motivo di tale scelta, oltre all'interesse intrinseco dei due argomenti, è la base matematica che li accomuna: in entrambi i casi, per ricavare le leggi che regolano i fenomeni considerati, ci si serve di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che si risolve calcolando un integrale molto semplice.

Ricordo che altri argomenti di fisica in cui ricorrono equazioni differenziali analoghe sono: l'equazione della trasformazione adiabatica di un gas perfetto; le leggi di scarica e carica di un condensatore di capacità C attraverso una resistenza R; le extracorrenti di chiusura e di apertura di un circuito R, L in serie; l'assorbimento dei raggi X e dei raggi $\gamma$.

Nell'articolo vengono altresì proposti sei problemi di applicazione di quanto esposto.

## A) La radioattività.

Fra tutti i nuclei che si incontrano in natura, alcuni subiscono delle trasformazioni spontanee. Così le sostanze naturalmente radioattive aventi numero atomico Z > 82 (Pb) presentano delle trasformazioni con emissione di particelle α (nuclei di elio $^{4}_{2}He$, aventi numero atomico Z = 2 e numero di massa A = 4), elettroni e radiazione elettromagnetica, avente lunghezza d'onda compresa fra $10^{-13}$ e $10^{-11}$ m (raggi γ). Questi processi sono chiamati processi di decadimento α, β, e γ rispettivamente. In certi casi un nucleo può catturare un elettrone appartenente al suo stesso atomo e precisamente uno dei due elettroni dello strato K: questo processo è chiamato “cattura K” (1937). La più comune manifestazione esterna di questo fenomeno è la successiva emissione di raggi X, dovuta al posto che si fa libero nello strato K.

Anche nelle reazioni nucleari possono formarsi stati instabili dei nuclei. Possono formarsi nuclei che successivamente si trasformano mediante l'emissione di elettroni positivi o negativi oppure mediante la cattura di un elettrone orbitale. I nuclei possono venire eccitati in processi d'urto con la conseguente emissione di raggi γ.

***

La rapidità con cui avviene la trasformazione spontanea di un radionuclide in un altro è stabilita da una legge che non ha carattere “deterministico”, ma “probabilistico”. La probabilità che un nucleo che non si è ancora trasformato al tempo t, si trasformi fra l'istante t e l'istante t+dt, è λ dt, dove λ è una costante caratteristica del nuclide di cui si tratta (“costante di disintegrazione”).

Il modo con cui decresce col tempo il numero N(t) dei nuclei non ancora trasformati al tempo t si esprime con:

$$(1)\ dN = -\lambda N(t)dt,$$

ossia

$$\frac{dN}{N(t)} = -\lambda dt\ ,$$

da cui, integrando e chiamando $N_0$ il numero di nuclei presenti al tempo t = 0, si ha la legge fondamentale:

$$(2) N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Si chiama “tempo di dimezzamento” di un radionuclide il tempo T dopo il quale la sua quantità si riduce a metà: ponendo in (2) $N = \frac{N_0}{2}$ si ricava la seguente relazione tra tempo di dimezzamento e costante di disintegrazione:

$$(3) T = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{0{,}693\ldots}{\lambda}.$$

Si chiama "attività radioattiva" R all'istante t il numero di nuclei che si disintegra nell'unità di tempo all'istante t. Dalla (1) si ha:

$$(4) R = \frac{-dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t},$$

avendo posto $\lambda N_0 = R_0$.

Unità di misura dell'attività radioattiva è il "becquerel" [Bq], pari a un decadimento al secondo.

Il "curie" [Ci] è l'attività di una sostanza in cui avvengono $3{,}7 \cdot 10^{10}$ disintegrazioni al secondo (quella di 1g di radio).

***

Le "leggi dello spostamento radioattivo" furono enunciate nel 1913 da Frederick Soddy e Kasimir Fajans:

a) Un nuclide che emette particelle α si trasforma nel nuclide che ha un numero atomico inferiore di due unità, e che ha un numero di massa inferiore di quattro unità:

$$(Z, A) \rightarrow (\mathrm{Z}-2, \mathrm{A}-4) + {}^{4}_{2}He.$$

$$Es.: {}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He \quad (T = 4{,}5 \cdot 10^9 anni)$$

$${}^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He \quad (T = 1620\ anni)$$

b) Un nuclide che emette particelle $\beta^-$ (elettroni) si trasforma nel suo isobaro di numero atomico superiore di una unità:

$$(Z, A) \rightarrow (\mathrm{Z}+1, \mathrm{A}) + e^- + {}^{-}\nu_e$$

$$Es.: {}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + e^- + {}^{-}\nu_e \quad (T = 5730\ anni)$$

$${}^{40}_{19}K \rightarrow {}^{40}_{20}Ca + e^- + {}^{-}\nu_e \quad (T = 1{,}3 \cdot 10^9\ anni).$$

c) Un nuclide che emette particelle $\beta^+$ (positroni) si trasforma nel suo isobaro di numero atomico inferiore di una unità:

$$(Z, A) \rightarrow (\mathrm{Z}-1, \mathrm{A}) + e^+ + \nu_e.$$

$$Es: {}^{22}_{11}Na \rightarrow {}^{22}_{10}Ne + e^+ + \nu_e (T = 2{,}60\ anni).$$

d) L'effetto della cattura K è la trasformazione del nuclide di numero atomico Z nel suo isobaro di numero atomico Z-1:

$$(Z, A) + e^- \rightarrow (\mathrm{Z} - 1, \mathrm{A}) + v_e \,.$$

$$Es.: {}^{7}_{4}Be + e^- \rightarrow {}^{7}_{3}Li + v_e \; (T = 53\; giorni)$$

$$Es.: {}^{40}_{19}K + e^- \rightarrow {}^{40}_{18}Ar + v_e \; (T = 1{,}3 \cdot 10^9)$$

***

Può avvenire anche un doppio decadimento β, in cui vengono emessi due elettroni o positroni, oppure una doppia cattura K.

***

Nel decadimento β, insieme all'elettrone o al positrone, viene emessa un'altra particella, detta "neutrino", che è priva di carica elettrica e di massa, possiede un momento angolare intrinseco di "spin" pari a$\frac{1}{2}h \left(h = \frac{h}{2\pi} = 1{,}0546 \cdot 10^{-34} J \text{ sec}\right)$, non ha un momento magnetico e viaggia sempre con la velocità della luce.

L'esistenza del "neutrino" fu ipotizzata nel 1930 da Wolfgang Pauli (1900-1958), ma la particella fu rivelata realmente nel 1955 da Fred Reines e Clyde L. Cowan a Los Alamos. La teoria del decadimento β (1934) è dovuta a Enrico Fermi (190-1954); si ha il decadimento$\beta^-$ quando uno dei neutroni del nucleo subisce la trasformazione:

$$n \rightarrow p + e^- + {}^-v_e \quad (T = 650 \text{ sec})$$

e si ha il decadimento $\beta^+$quando un protone subisce la trasformazione:

$$p \rightarrow n + e^+ + v_e$$

Nella cattura K si ha infine:

$$p + e^- \rightarrow n + v_e$$

L'elettrone e il neutrino interagiscono "esclusivamente" per mezzo della forza "debole", che ha un raggio d'azione massimo dell'ordine di$10^{-15} m$.

**Problemi**

1) Le sostanze organiche degli organismi viventi sono radioattive in ragione di 16 disintegrazioni al minuto per grammo di carbonio naturale in esse contenuto. Un pezzo di legno trovato nelle Piramidi d'Egitto ha mostrato un'attività di 11 disintegrazioni al minuto per grammo di carbonio.

Si calcoli l'epoca in cui il legno ha abbandonato il ciclo vitale, sapendo che il tempo di dimezzamento del$C^{14}$ $è\, T = 5730\ anni.$

3098 anni.

2) L'"energia di decadimento" E è data dalla differenza di massa Δm moltiplicata per$c^2$

$$E = \Delta m x c^2$$

Si calcoli E nel caso dei decadimenti $\beta^- e\ \beta^+$e nel caso della cattura K, facendo uso delle masse "atomiche".

3) Quando l'$U^{238}(Z = 92, A = 238)$ decade per emissione di una particella α, forma un altro nucleo radioattivo; quando questo nucleo decade, forma ancora un altro nucleo radioattivo, e così via. Il decadimento iniziale dell'$U^{238}$dà inizio a una lunga catena di decadimenti radioattivi, la quale comprende in tutto 8 decadimenti α e 6 decadimenti $\beta^-$. Qual è il numero atomico e il numero di massa del nucleo (stabile) finale? Di quale isotopo si tratta?

4) $Pb^{206}(Z = 82, A = 206)$

**B) La legge psicofisica di Weber-Fechner.**

Nel 1860, lo psicologo, fisico e filosofo tedesco Gustav Theodor Fechner (1801-1887), l'inventore della psicometria, pubblicò una legge psicofisica in grado di porre in relazione l'intensità S di una certa sensazione con l'intensità I dello stimolo fisico che la provoca.

Questa legge, che si basa su dati sperimentali originariamente raccolti, nel 1829, dal fisiologo e psicologo tedesco Ernst Heinrich Weber (1795-1878), stabilisce che la variazione di S causata da un piccolo cambiamento di I non è proporzionale alla variazione di I stessa, come si potrebbe supporre, ma piuttosto alla variazione "percentuale" $\frac{\Delta I}{I}$ $di\ I$.

In particolare, la "sensazione sonora" può venire definita in modo che le sue variazioni siano espresse da:

$$(5)\ dS = k' \cdot \frac{dI}{I},$$

da cui, integrando e chiamando $I_o$ la "soglia di udibilità", cioè la più piccola intensità sonora percepibile, si ha:

$$(6)\ S = k' \cdot ln\frac{I}{I_0}.$$

Passando ai logaritmi decimali, otteniamo la “legge di Weber - Fechner” nella forma

$$(7)\ S = k \cdot log_{10}\frac{I}{I_0}. \quad (k = k' \cdot \ln 10).$$

Ponendo, per convenzione, k = 10, la sensazione sonora S così definita dicesi misurata in “decibèl” [dB], dal nome del fisiologo Alexander Graham Bell (1847-1922). Si ha dunque:

$$(8) S = 10 \cdot log_{10}\frac{I}{I_0}.$$

Dalla (8) si ha per le sensazioni sonore $S_1, S_2$ di due suoni di intensità $I_1, I_2$:

$$(9)\ S_2 - S_1 = 10 \cdot log_{10}\frac{I_2}{I_1}$$

La sensazione sonora aumenta di 1dB se è:

$$1 = 10 \cdot log_{10}\frac{I_2}{I_1} \quad ossia: \quad \frac{I_2}{I_1} = \sqrt[10]{10} = 1{,}259,$$

cioè se l'intensità dell'onda aumenta di $\sim 26\%$.

Ricordiamo che l'intensità sonora I è definita come l'energia che, nell'unità di tempo, attraversa perpendicolarmente l'unità di superficie. L'unità di intensità sonora è perciò il “watt per metro quadrato” $[W/m^2]$.

La soglia di udibilità umana, riferita a un suono puro avente frequenza $\nu = 1000\ Hz$, è approssimativamente $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ e corrisponde ad una pressione sulla membrana timpanica $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\ Pa$.

Uno “stormir di frondi” corrisponde a 10 dB, una strada tranquilla a 30 dB, un'automobile a 50 dB, una conversazione a voce alta a 70 dB, una strada rumorosa a 90 dB, un aeroplano a 100 dB. Il livello sonoro di una discoteca può arrivare fino a 110 dB, danneggiando l'udito dei presenti.

La sensazione sonora di 130 dB $(I = 10\ W/m^2)$ corrisponde alla “soglia del dolore”.

Per prevenire ipoacusie professionali, si raccomanda che il personale professionalmente esposto non sia soggetto ad un livello sonoro continuo maggiore di 85 dB per più di 5 ore al giorno senza opportuni dispositivi di protezione.

***

Per determinare la sensazione sonora prodotta da un suono puro di frequenza diversa da 1000 Hz si procede come segue: si fa giungere all'orecchio alternativamente il suono in esame e un suono di 1000 Hz del quale si fa variare in modo noto il livello sonoro, fino a che l'orecchio giudica i due suoni ugualmente forti. Si ha così per confronto la misura della sensazione sonora espressa in “phon” (o “fon”) [ph].

***

La sensazione acustica può essere misurata con una scala alternativa ai decibèl, la cui unità di misura è il “son”. La sensazione s, in son, si calcola con la relazione:

$$(10)\ s = 10^{2,4} I^{0,3}.$$

dove I indica l'intensità dell'onda sonora, in $W/m^2$.
La sonorità di un son è quella di un suono avente frequenza di 1000Hz e intensità sonora $I = 10^{-8}\, W/m^2$ e corrisponde a un livello sonoro di 40 dB.

**Problemi**

1) Un operaio in una fabbrica deve lavorare nelle vicinanze di una macchina con un livello sonoro di 60 dB per 8 ore. Se una seconda macchina, con un livello sonoro di 70 dB, viene appaiata alla prima, può l'operaio continuare a lavorare senza protezioni acustiche?

Si; 70,4 dB

2) Una moto con la marmitta di scarico, passando su di una strada, produce un rumore di 80 dB; una moto senza marmitta produce invece 100 dB.

Quante moto con la marmitta fanno lo stesso rumore di una sola moto senza marmitta?

100

3) Si dimostri che un incremento di 10 dB della sensazione S corrisponde al raddoppio della sensazione s misurata in son.

A quanti son corrispondono la soglia di udibilità e la soglia del dolore?

$$10^{-1,2} \simeq 6,3 \cdot 10^{-2} son; \quad 10^{2,7} \simeq 501,2\ son$$

**Bibliografia**

A)

[1] E. CURIE, *Vita della signora Curie*. Mondadori, Milano, 1958.

[2] L. EISENBUD ed E.P. WIGNER, *La struttura del nucleo*. Boringhieri, Torino, 1960.

[3] G. GAMOW, *Trent'anni che sconvolsero la fisica*. Zanichelli, Bologna 1966.

[4] J. B. MARION, *La fisica e l'universo fisico*, Zanichelli, Bologna, 1976.

[5] E. PERSICO, *Gli atomi e la loro energia*. Zanichelli, Bologna 1961.

[6] S. TOLANSKY, *Introduzione alla fisica atomica*. Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino, 1959.

B)

[1] G. BERNARDINI, *Fisica sperimentale. Parte I*. Veschi, Roma, 1962.

[2] A. FERRARO, *Dizionario di metrologia generale*. Zanichelli, Bologna, 1965.

[3] L. LANDAU - A. KITAIGORODSKIJ, *La fisica per tutti*. Editori Riuniti, Roma, 1972.

[4] M.A. MUNEM - J.D. FOULIS, *Algebra 2*. Zanichelli, Bologna, 1984.

[5] E. PERUCCA, *Fisica generale e sperimentale. Vol I*. U.T.E.T., Torino.

# Costanti per il SI

## *Constants for the SI*

***Annalisa Santini***[1]

**Abstract**

*What might appear to be a slogan is actually a title that encompasses the two keywords of this article. On 20 May 2019 the reform of the SI (International System of Units) entered into force, consisting exclusively of the use of equations and 7 fundamental constants.*

"*La matematica non proclama delle verità assolute,*
*bensì verità perfettamente localizzate*".
*Denis Guedj*[2]

«I numeri possono tutto, scolpiscono la nostra vita quotidiana, si nascondono spesso dietro ogni nostro gesto personale, dietro ogni progresso collettivo. Ci aiutano a superare le incertezze e a scegliere cosa è meglio per noi»[3]. I numeri operano l'astrazione del concetto di quantità e nelle scienze, queste derivano spesso da un esperimento di misura. Allora, in questi casi, si parla di quantità dimensionate, di misure di grandezze, oggetto di studio di una disciplina antica nata con il sorgere dei grandi imperi: la metrologia.


Fig.1 - Logo del *Bureau international des poids et mesures*

A partire dai Babilonesi, le popolazioni si sono sempre prodigate nell'inventare le proprie unità di misura e il loro utilizzo era chiaro e semplice. D'altra parte i commerci e gli scambi erano limitati, ma soprattutto, erano stati pensati degli accorgimenti, che consentivano di ritenere le misure effettuate giuste ed eque.

---

[1] Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "N. Copernico", Brescia.

[2] D. GUEDJ, *Il teorema del pappagallo*, Milano, Longanesi, 2000, p. 263.

[3] S. MAZZOCCHI, *Tutta la matematica che c'è nella nostra vita*, Passaparola, la Repubblica, 28 settembre 2018.

Un esempio di 'equità regale' è costituito da un'unità di misura antropometrica: il *pied du roi.* Questa Unità di misura campione francese, che rimase in vigore quasi 900 anni a partire dal 789 d.C., corrispondeva alla lunghezza del piede di Carlo Magno, ossia 32,48 cm.

In Italia troviamo un corrispondente piede regale, che restò in vigore fino agli inizi del XIX secolo, il *pes regis Liutprandi*, dal nome del re longobardo Liutprando, con una corrispondenza variabile tra 44,6 cm a Milano e 51,37 cm in Piemonte.

Fig.2 - *Moneta con rappresentazione di Liutprando*

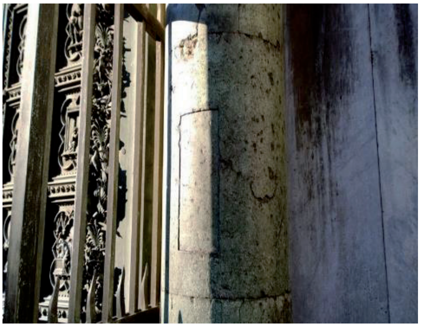


Fig.3 - *Piede di Liutprando: colonna del Battistero di San Giovanni a Firenze*

In generale, tuttavia, la mentalità che si riscontra nelle antiche scelte delle unità di misura, dimostra un interesse prevalente per l'aspetto qualitativo a scapito di quello quantitativo, più astratto. Ma i cambiamenti di mentalità della società, gli ideali di universalità e razionalità che caratterizzano la filosofia illuminista, l'aumentare dei viaggi e le nuove tipologie di rapporti commerciali, alla fine del '700 richiesero una svolta, che segnasse la fine di un caos metrologico e l'impegno per l'unificazione delle misure.
Protagonista di questo cambiamento fu Charles-Maurice de Talleyrand-Périgord. Durante la rivoluzione francese, egli prospettò all'Assemblea Nazionale Costituente francese, la proposta di adottare un sistema unificato di pesi e misure, seguendo la richiesta *"Un roi, une loi; un poids et unemesure"*, che compariva nei *Cahiers des doléances* (1789).

Attualmente misurare significa considerare la caratteristica quantitativa di un oggetto, senza tener conto della sua qualità, nel tentativo di poter ottenere valori con un margine di errore minore possibile. Ed è proprio questa ricerca meticolosa di precisione, che ha accompagnato, in questi ultimi decenni, coloro che si sono impegnati nel tentativo di definire le unità di misura e i protocolli per la loro trasmissione, con il comune intento di condivisione universale.

Oggi la metrologia è una scienza che si confronta, per gli aspetti prettamente teorici, con la fisica, la matematica e la statistica, per quelli pratici con la tecnologia meccanica e l'elettronica

**Perché parlare di SI e BIPM**

Le "Brevi note sul Sistema Internazionale" di Antonio Salmeri che compaiono nel numero 1 del "Periodico di matematiche" del 2009 (Methesis), hanno ben puntualizzato didatticamente le notazioni che si riferiscono alle unità di misura delle grandezze fondamentali e delle unità non più in vigore.

A 10 anni da questo articolo, ci ritroviamo nuovamente a parlare di SI (Sistema Internazionale delle unità di misura) perché ci sono delle novità: le modifiche che il Comitato Internazionale ha varato in forma definitiva e che sono entrate in vigore il 20 maggio 2019.

Vicino a Parigi, presso il *Pavillon de Breteuil* (Saint Cloud Parc), ha sede l'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure (BIPM), istituito il 20 maggio 1875 dai diciassette Stati partecipanti alla "Conferenza diplomatica del metro". Nato per garantire l'unificazione globale delle misure, il BIPM si prefigge oggi tre obiettivi[4]:


Fig.4 - *Pavillon de Breteuil*[5]

1. *rappresentare la comunità metrologica internazionale al fine di massimizzarne il riconoscimento e l'impatto,*
2. *essere un centro di collaborazione scientifica e tecnica tra gli Stati membri, consentendo loro di sviluppare competenze per confronti internazionali sulle misure, in base al principio dei costi condivisi,*
3. *coordinare il sistema di misurazione globale, garantendo la comparabilità e il riconoscimento internazionale dei risultati di misurazione.*

Al BIPM spetta quindi il compito di stabilire e confrontare gli standard nazionali e internazionali delle scale fondamentali per la misurazione delle principali grandezze fisiche e assicurare il coordinamento delle corrispondenti tecniche di misurazione. Il BIPM esegue e coordina le misure delle costanti

[4] SI-Brochure-9.pdf in (https://www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/).
[5] Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8775659.

fisiche necessarie alle definizioni delle unità di misura e, sotto la supervisione del Comitato Internazionale dei Pesi e delle Misure (CIPM), presenta ogni quattro anni una relazione alla Conferenza Generale sui Pesi e Misure (CGPM).

Il comitato internazionale è attualmente costituito da diciotto membri appartenenti a diversi Stati, ma il 16 novembre 2018, alla Conferenza Generale sui Pesi e Misure, che si è tenuta al palazzo dei congressi di Versailles, in Francia, hanno partecipato 59 Stati membri[6] e quarantadue Stati ed entità economiche associate[7].

Fig. 5 -*Conferenza Generale sui Pesi e Misure*


Fig. 6 -*Versailles, Francia, 16 -11- 2018*

Durante la conferenza, sono state discusse e approvate le misure necessarie ad assicurare la diffusione e il miglioramento del SI.

Gli studi che hanno consentito di giungere a questa riforma sono stati prodotti nei laboratori dell'Ufficio Internazionale, costruiti tra il 1876 e il 1878, ampliati nel 1929. Ai primi, sono stati aggiunti successivamente i laboratori della sezione di radiazione ionizzante, la biblioteca, un edificio per l'officina, gli uffici e le sale riunioni. Al momento vi lavorano circa quarantacinque fisi-

[6] Africa del Sud, Germania, Arabia Saudita, Argentina, Australia, Austria, Belgio, Brasile, Bulgaria, Canada, Cile, Cina, Colombia, Corea, Croazia, Danimarca, Egitto, Emirati Arabi uniti, Spagna, Stati-Uniti d'America, Federazione Russa, Finlandia, Francia, Grecia, Ungheria, India, Indonesia, Iran, Iraq, Irlanda, Israele, Italia, Giappone, Kazakistan, Kenya, Lituania, Malesia, Messico, Montenegro, Norvegia, Nuova Zelanda, Pakistan, Paesi Bassi, Polonia, Portogallo, Romania, Regno Unito di Gran Bretagna e Irlanda, Serbia settentrionale, Repubblica Ceca, Singapore, Slovacchia, Slovenia, Svezia, Svizzera, Tailandia, Tunisia, Turchia, Ucraina, Uruguay.

[7] Albania, Azerbaigian, Bangladesh, Bielorussia, Bolivia, Bosnia-Erzegovina, Botswana, CARICOM, Costa Rica, Cuba, Ecuador, Estonia, Etiopia, Georgia, Ghana, Hong Kong (Cina), Giamaica, Kuwait, Lettonia, Lussemburgo, Macedonia di Nord, Malta, Mauritius, Moldavia, Mongolia, Namibia, Oman, Uzbekistan, Panama, Paraguay, Perù, Filippine, Qatar, Siria, Seychelles, Sudan, Sri Lanka, Taipei Cinese, Tanzania, Vietnam, Zambia e Zimbabwe.

ci e tecnici, che si occupano principalmente di ricerche metrologiche, di confronti dei risultati e di controlli relativi agli standard.

Tutto il materiale prodotto dai diversi gruppi di lavoro, che convergono nella Conferenza Generale, vengono pubblicati in raccolte che, dal 2003, hanno cominciato ad essere inserite nel sito web BIPM in lingua originale e pubblicate su riviste scientifiche internazionali.

In Italia, è possibile rintracciare il materiale nel sito dell'Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica (INRiM) e, accedendo alla sezione: LE UNITÀ DI MISURA, trovare un filmato, della durata di tre minuti, relativo alla storia delle unità di misura[8].

**SI**

Il Sistema Internazionale di unità di misura, costituisce l'alfabeto alla base di un linguaggio fondamentale, utilizzato in ambito scientifico, tecnologico, sanitario, industriale, commerciale e di sicurezza. La sua eccezionalità sta nell'essere un sistema pratico-dinamico, che si è evoluto e si evolverà per rispondere sempre con maggior efficacia ai progressi scientifici e tecnologici. Ricordiamo che la scelta delle unità di fondamentali e delle unità derivate non è mai stata imposta; si è affermata nel tempo.

I recenti studi della fisica quantistica hanno consentito di rivederne le definizioni, che attualmente raggiungono «livelli di accuratezza che sono limitati solo dalle nostre capacità tecniche e non dalle definizioni stesse»[9].

**Le novità**

Il 20 maggio 2019, anniversario della firma della convenzione sul metro celebrata dal *World Metrology Day*, è entrata in vigore la revisione del SI, adottata dal CGPM nel novembre 2018 durante la sua XXVI riunione. Quest'ultima revisione costituisce un progresso storico fondamentale. La Conferenza generale sui pesi e misure ha infatti riformulato le definizioni delle unità, sia in generale che


Fig.8 - *Manifesto del "World Metrology Day" 2019*

[8]www.youtube.com/watch?v=MUJX1Yyx6TI.

[9]SI-Brochure-9, p 12.

delle sette unità fondamentali, sulla base del valore numerico di sette costanti. Queste ultime rappresentano la nostra attuale conoscenza delle leggi della fisica. Scardinata la formulazione delle definizioni, che non si riferiscono più a standard fisici, a proprietà dei materiali o a descrizioni di misurazioni, è stato creato un legame definito dalle equazioni delle leggi fisiche.

Il 20 maggio 2019, anniversario della firma della convenzione sul metro celebrata dal *World Metrology Day*, è entrata in vigore la revisione del SI, adottata dal CGPM nel novembre 2018 durante la sua XXVI riunione. Quest'ultima revisione costituisce un progresso storico fondamentale. La Conferenza generale sui pesi e misure ha infatti riformulato le definizioni delle unità, sia in generale che delle sette unità fondamentali, sulla base del valore numerico di sette costanti. Queste ultime rappresentano la nostra attuale conoscenza delle leggi della fisica. Scardinata la formulazione delle definizioni, che non si riferiscono più a standard fisici, a proprietà dei materiali o a descrizioni di misurazioni, è stato creato un legame definito dalle equazioni delle leggi fisiche.

Le unità diventano così ovunque raggiungibili e immutabili nel tempo. Questo aspetto consente di aprire nuovi orizzonti, con profonde ripercussioni, che permetteranno di soddisfare anche esigenze future.

Fig.7 - *Rappresentazione grafica dei simboli delle unità di misura*

Il CGPM, a garanzia di coerenza, tra nuove definizioni e quelle presenti al momento dell'attuazione, ha deciso inoltre, nella sua prima risoluzione, di mantenere la continuità nel nome SI e di creare una rappresentazione grafica comune, che superando qualsiasi barriera linguistica consenta, a tutte le modalità di propaganda informativa, di essere riconosciute come parte della storia mondiale.

**Il cambiamento:**

Il punto di partenza di questa innovazione è costituito da sette costanti, il cui valore numerico esatto, espresso nell'unità SI corrispondente è:

La frequenza di transizione iperfine dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133, $\Delta\nu_{cs}$, è 9 192 631 770 Hz (hertz).

La velocità della luce nel vuoto, $c$, è 299 792 458 m/s (metri al secondo).

La costante di Planck, $h$, è 6,62607040 x $10^{-34}$ J·s (joule secondo=kg $m^2$ $s^{-1}$).

La carica elementare, ***e***, è 1,602 176 620 x $10^{-19}$ coulomb (A s).
La costante di Boltzmann, ***k***, è 1,380 64852 x $10^{-23}$ J/K (joule al kelvin).
La costante di Avogadro, $N_A$, è 6,022 140 857x $10^{23}$ $mol^{-1}$ ($mole^{-1}$).
L'efficienza luminosa della radiazione monocromatica di frequenza 540 x $10^{12}$Hz,$K_{cd}$, è 683 lm/W (lumen al watt).

Alla luce delle seguenti relazioni: Hz = $s^{-1}$; J = $m^2$ kg $s^{-2}$; C = A s; lm = cd $m^2$ $m^{-2}$ = cd sr;W = $m^2$ kg $s^{-3}$.


Fig.9 - Corrispondenza grafica tra i simboli delle unità di misura e le relative costanti.

Le sette costanti formano un insieme che costituisce il riferimento fondamentale, stabile e universale, attraverso il quale è possibile ottenere incertezze più basse possibili. Esse inoltre permettono di superare la distinzione tra unità fondamentali e derivate, che viene tuttavia mantenuta per rispettare le convenzioni ISO/IEC 80000.

| | |
|---|---|
| Il secondo | $1\ \text{Hz} = \frac{\Delta\nu_{Cs}}{9\,192\,631\,770} \Leftrightarrow 1\ \text{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu_{Cs}}$ |
| Il metro | $1\ \text{m} = \left(\frac{c}{299\,792\,458}\right) s = \frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458} \frac{c}{\Delta\nu_{Cs}} \approx 30{,}663\,319\ \frac{c}{\Delta\nu_{Cs}}$ |
| Il chilogrammo | $1\ \text{kg} = \left(\frac{h}{6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}}\right) m^{-2} s$ <br> $1\ \text{kg} = \frac{(299\,792\,458)^2}{(6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34})(9\,192\,631\,770)} \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{c^2} \approx 1{,}475\,521\,4 \times 10^{40} \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{c^2}$ |
| L'ampere | $1\ \text{A} = \frac{1}{(9\,192\,631\,770)(1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19})} e\Delta\nu_{Cs} \approx 6{,}789\,687 \times 10^{8} \Delta\nu_{Cs} e$ |
| Il kelvin | $1\ \text{K} = \frac{1{,}380\,649 \times 10^{-23}}{(6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34})(9\,192\,631\,770)} \frac{\Delta\nu_{Cs}\, h}{k} \approx 2{,}266\,665\,3\ \frac{\Delta\nu_{Cs}\, h}{k}$ |
| La mole | $1\ mol = \left(\frac{6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}}{N_A}\right)$ |
| La candela | $1\ \text{cd} = \left(\frac{K_{cd}}{683}\right) \text{kg}\ m^2\ s^{-3} sr^{-1}$ <br> $1\ \text{cd} = \frac{1}{(6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34})(9\,192\,631\,770)683} (\Delta\nu_{Cs})^2\ hK_{cd} \approx$ <br> $\approx 2{,}614\,830 \times 10^{10} (\Delta\nu_{Cs})^2\ hK_{cd}$ |

Fig.10 - *Tabella che consente di leggere l'unità in funzione delle costanti*

La procedura, utilizzata per ottenere un risultato di misura senza eseguire un confronto con un campione di misura di una grandezza della stessa specie, è definita metodo primario. Ma per poter operare attraverso questa modalità sono necessarie delle linee guida per la "*mises en pratique*", che sono state predisposte dai comitati consultivi competenti e sono pubblicate in formato elettronico sul sito web[10] del BIPM, dove possono essere riviste più frequentemente rispetto a quando fossero stampate nella brochure SI.

**Cosa cambierà**

Non essendoci una variazione di paradigma, l'utente, nella pratica, non si accorgerà di questi cambiamenti. In realtà, riflettendo sulla tecnologia che sottende la realizzazione e le funzionalità di molti oggetti di uso quotidiano, ci si accorge dell'esigenza di risposte, che implicano misure particolarmente accurate. Vediamo di comprendere la portata della trasformazione attraverso un esempio[11] significativo:

«Spesso quando un tecnico discute con la gente comune, si vede porre la domanda su quale sia l'utilità di misurare il tempo con incertezza dell'ordine di qualche unità in $10^{-16}$ (1s ogni 317 milioni di anni). Chi volesse rispondere in maniera elegante potrebbe utilizzare un semplice esempio.

Se lo scopo fosse di arrivare puntuale ad un appuntamento e si disponesse di un orologio che accumula un ritardo/anticipo di 1 s l'anno (pari a uno scostamento relativo di circa $3 \cdot 10^{-8}$) la mancanza di puntualità, anche in caso di longevità lavorativa eccezionale, potrebbe essere imputata solo alla trascuratezza della persona.

Se però, per raggiungere il luogo dell'appuntamento dovessimo utilizzare un navigatore satellitare, uno scostamento di $3 \cdot 10^{-8}$ per gli orologi a bordo dei satelliti(pari a 3 millisecondi al giorno), dopo un solo giorno produrrebbe un errore nella posizione pari a: 3ms x c = $3 \cdot 10^{-3}$ x $3 \cdot 0^{+8}$= $10^{+6}$ m = 1000 km Fissato l'appuntamento alle 8,00 del 02/01/2019 presso la sede dell'INRIM, in C.so Massimo d'Azeglio, 42 a Torino, fidandosi ciecamente del nostro orologio e del nostro navigatore, se il sistema GPS avesse riallineato i propri orologi alle 8.00 del giorno prima, ci si potrebbe trovare a parcheggiare alle 7,55 alla periferia nord di Berlino! Il tutto sperando che il navigatore non ci guidi verso sud, costringendoci a prendere un traghetto per Tunisi o Algeri. A questo punto sarebbe molto difficile con le attuali tecnologie di trasporto, raggiungere il luogo dell'appuntamento in tempo».

---

[10] https://www.bipm.org/en/publications/mises-en-pratique/.

[11] A. Sardi, M. Pisani, *La revisione del sistema internazionale di unità di misura*, Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica, INRIM (Tratto integralmente da p. 25).

Il SI permette quindi di avere unità di riferimento riconosciute a livello internazionale, che non necessitano di conversioni. Il CIPM però ha accettato anche alcune unità al di fuori del SI, ricordando che il loro utilizzo vanifica i vantaggi tipici del SI.

**Tableau 8. Unités en dehors du SI dont l'usage est accepté avec le SI**

| Grandeur | Nom de l'unité | Symbole de l'unité | Valeur en unités SI |
|---|---|---|---|
| temps | minute | min | 1 min = 60 s |
| | heure | h | 1 h = 60 min = 3600 s |
| | jour | d | 1 d = 24 h = 86 400 s |
| longueur | unité astronomique [a] | au | 1 au = 149 597 870 700 m |
| angle plan et de phase | degré | ° | $1° = (\pi/180)$ rad |
| | minute | ′ | $1' = (1/60)° = (\pi/ 10\,800)$ rad |
| | seconde [b] | ″ | $1'' = (1/60)' = (\pi/ 648\,000)$ rad |
| superficie | hectare [c] | ha | $1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10^4 \text{ m}^2$ |
| volume | litre [d] | l, L | $1 \text{ l} = 1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ |
| masse | tonne [e] | t | $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$ |
| | dalton [f] | Da | $1 \text{ Da} = 1{,}660\,539\,040\,(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$ |
| énergie | électronvolt [g] | eV | $1 \text{ eV} = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ J}$ |
| logarithme d'un rapport | neper [h] | Np | |
| | bel [h] | B | |
| | decibel [h] | dB | |

Fig.11 -*Unità non comprese nel sistema internazionale*

Volendo infine utilizzare il Sistema Internazionale in modo ineccepibile, si possono approfondire tutti i dettagli, le regole e le convenzioni stilistiche utilizzate per esprimere il valore delle dimensioni, nella IX Brochure del BIMP, mentre nei suoi allegati si possono trovare tutte le deliberazioni e le note storiche, utili anche per approfondimenti didattici.

## Bibliografia

[1] S. MAZZOCCHI, *Tutta la matematica che c'è nella nostra vita*, Passaparola, la Repubblica, 28 -09- 2018.
[2] D. GUEDJ, *Il teorema del pappagallo*, Milano, Longanesi, 2000, p 263.
[3] A. SARDI, M. Pisani, *La revisione del sistema internazionale di unità di misura*, Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica, INRIM, p 25.
[4] A. SALMERI, *Brevi note sul sistema internazionale*, Periodico di matematiche 1/2009.

## Sitografia

[1] www.museodellabilancia.it/filealbum/1026_0.pdf.
[2] www.bipm.org/en/about-us/.
[3] www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/.
[4] www.bipm.org/en/publications/mises-en-pratique/.
[5] www.repubblica.it/rubriche/passaparola/2018/09/28/news/la_vita_e_matematica-207582199/?refresh_ce.
[6] en.wikipedia.org/wiki/Pavillon_de_Breteuil.
[7] www.youtube.com/watch?v=MUJX1Yyx6TI.

# Vortici e getti

## *Whirls and jets*

***Sergio Savarino***[1]

**Abstract**

*Black holes are objects of great fascination. Their appearance has been described many times: a black object, surrounded by an "growth disk", and jets of plasma in a direction approximately normal to the plane of the disk. Literature sometimes offers descriptions between science and fantasy, but which have similarities with well-known natural facts, are set as metaphors, create mental categories, seem to anticipate aspects of scientific theories, help to give interpretations.*

*Fig. 1*

Nel 1833 Edgar Allan Poe scrive uno dei suoi racconti più famosi.
Le isole Lofoten sono vicine alla Norvegia, il flusso e deflusso delle maree e la conformazione delle isole e della costa creano forti correnti e un gorgo di grandi dimensioni che grazie a Poe è entrato nell'immaginario collettivo. Un processo simile si verifica nello stretto di Messina, dove fra mar Tirreno e lo Ionio si possono avere differenze fra i livelli dell'acqua, anche dell'ordine di molti centimetri, con conseguente formazione di correnti e di gorghi.

Fenomeni che suggestionano l'immaginario e creano miti: quello della discesa nel *Maelström*per E. A. Poe, quello di Cariddi per Omero.

---

[1] Mathesis di Roma.

"*Tra Lofoden* (le isole Lofoten) *e Moskoe [...] quando la marea sale, la corrente ripercorre [...] con rapidità selvaggia [...] i vortici o gorghi sono di una tale estensione e profondità che se una nave entra nel loro centro di attrazione, ne è fatalmente inghiottita e trascinata al fondo*"
*Una discesa nel Maelstrom, E. A. Poe.*
*E' un'immagine che richiama quella di un* "*buco nero*".

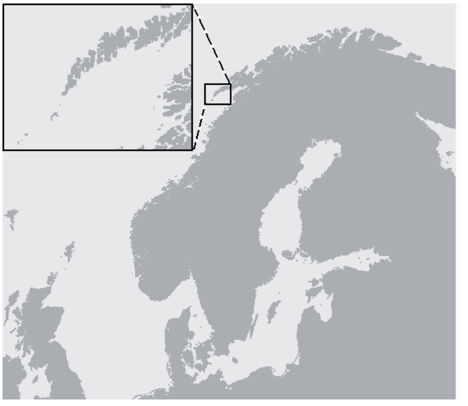


*Fig. 2*

Scritto nel 1833, relativo a tutt'altro fenomeno, il racconto di Poe pare descrivere la discesa nel suo campo gravitazionale.

"*[...]correvamo a tutta velocità proprio verso il centro del gorgo[...]cavai* <u>*l'orologio*</u> *dal taschino.* <u>*Era fermo*</u>*. [...] scagliati contro l'abisso [...] fantastica velocità con la quale eravamo trasportati [...] sul lato di dritta si sprofondava la voragine*" ibid.

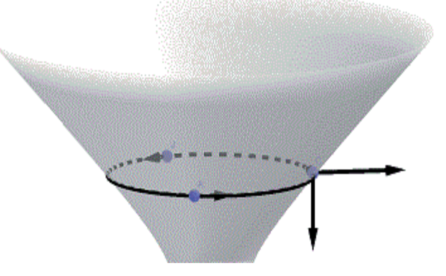


*Fig. 3*

La Relatività speciale e quella generale descrivono la distorsione dello spazio-tempo. A grandi velocità (prossime a quella della luce) il tempo si dilata, in presenza di campi gravitazionalianche. Se l'intensità del campo è enorme, come in un buco nero, la teoria prevede che il tempo si fermi!

Sembra la descrizione dell'orizzonte degli eventi!

Pur preso del panico, il protagonista osserva, citando addirittura Archimede, che gli oggetti sferici scendono giù nel gorgo, mentre quelli di forma irregolare calano lentamente o ruotano sempre alla stessa altezza. Quindi il protagonista si aggrappa a una botte, resta sospeso sulla parete dell'imbuto e vi rimane finché il fenomeno non si esaurisce. In questo modo si salva e può raccontare la sua storia.

**Attrito viscoso**

La questione dei corpi che restano a ruotare a una certa altezza è controversa, ma una spiegazione può essere proposta. Se l'oggetto è sferico, l'attrito viscoso è regolato dalla legge di Stokes: $F_a=6\pi\eta r$ v con $\eta$coefficiente di viscosità del fluido e r raggio del corpo. Altrimenti: $F_a$=k vcon k costante legata allaforma e al tipo di fluido. Se si creano vortici come nel caso -c- di fig.4 l'attrito viscoso è ancora maggiore, perché è proporzionale al quadrato della velocità.

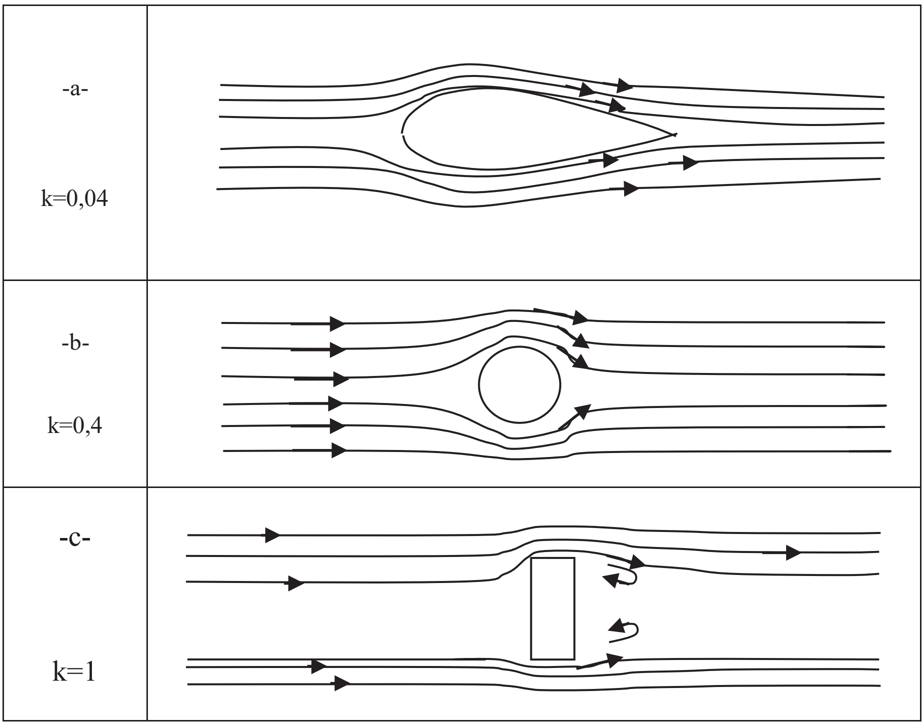



*Fig. 4*

Sull'oggetto agiscono il peso e la forza centrifuga. Entrambe hanno una componente tangente alla superficie del gorgo, la prima lo porta verso il basso, la seconda lo spinge verso l'alto(fig.3). La forza centrifuga aumenta con la velocità di rotazione. I corpi idrodinamici fendono l'acqua, quindi non oppongono resistenza, quelli poco idrodinamici (caso -c- fig.4), hanno un forte attrito, non fendono l'acqua, quindi sono spinti con forza e acquistano velocità. L'accelerazione centrifuga aumenta e la sua componente tangente alla superficie del gorgo può arrivare aessere maggiore o uguale a quella della forza peso, tenendo suil corpo o addirittura spingendolo fuori.

È quello che succede al liquido dentro un frullatore, quando la rotazione è troppo veloce!

**Buco nero e getto relativistico**

Il buco nero è un oggetto di grande massa che collassa, per effetto della propria gravità, il suo volume diminuisce, la sua massa si concentra. Quando un oggetto in rotazione si contrae, la sua velocità di rotazione aumenta, in questo caso aumenta enormemente.

*Fig. 5*

**Linee di forza**

Le linee di forza del campo magnetico terrestre hanno un aspetto ben noto: curve che convergono ai poli, guidano in quella direzione particelle cariche provenienti dal Sole, che interagiscono con l'atmo-sfera danno luogo ad aurore polari.

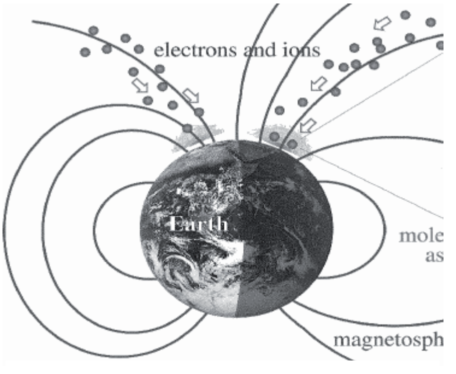



*Fig. 6*

Il campo magnetico del buco nero è analogo, però la rotazione è estremamente veloce, le linee di forza del campo ne vengono trascinate e si "intrecciano" dando luogo a un "gorgo" che ricorda quello di E. A. Poe.
Il plasma vi rimane intrappolato, come nel campo magnetico terrestre, ma stavolta viene trascinato dalla sua rotazione. Le particelle del plasma sono, quindi, "centrifugate" lungo le pareti del campo e spinte via, come gli oggetti poco idrodinamici nel gorgo del Maelström.

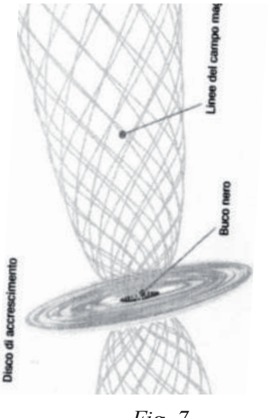



*Fig. 7*

Le particelle cariche soggette ad accelerazione emettono luce (la radiazione di sincrotrone) e questo permette che i getti di particelle vengano studiati.

**Conclusioni**

L'incrocio fra attività culturali molto diverse è spesso uno strumento di conoscenza decisivo.J. Wheeler nel 1967 introduce l'espressione "buco nero". Descrivendone le caratteristiche, Wheeler evoca l'immagine del gatto del Cheshire di "Alice nel paese delle meraviglie" diLewis Carroll: un gatto che sorride e che, un po' alla volta, scompare. Alla fine ne rimane solo il sorriso!

> "*[...]cominciando dalla punta della coda, per finire col suo sogghigno, che rimase nell'aria anche dopo che il resto del corpo era svanito [...]*"

Il buco nero è quel che resta di un oggetto, forse un'enorme stella, che si è spenta, è collassata tanto che di lei sono rimasti solo i campi, gravitazionale e magnetico.

Le attività culturali danno strumenti, modelli, metafore, paradigmi, categorie mentali. Tutte forme di organizzazione del pensiero che dissodano, preparano il terreno, forniscono strumenti d'interpretazione per i più diversi settori d'indagine.

**Bibliografia**

[1] E. A. Poe, Una discesa nel Maelström.
[2] E. Perucca, Fisica generale e sperimentale.
[3] A. Alberdi, I buchi neri.
[4] J. Wheeler, Gravità e spazio-tempo.

# Statistica e probabilità in classe: strumenti di lettura e analisi della realtà e della scienza[1]

## *Statistics and Probability in classroom: tools for the analysis and interpretation of reality and science*

***Anna Maria Baccan - Susi Osti***[2]

**Abstract**

*The fundamental importance of statistics has been the main focus of the second summer school organised by Mathesis in Rovigo. The school has been successful in the provision of both theoretical and practical activities, and has been enriched by highly competent and approachable speakers, a well prepared audience and a much welcoming town.*

La Seconda edizione della scuola estiva proposta da Mathesis dal titolo "*Statistica e probabilità in classe, strumenti di lettura e analisi della realtà e della scienza*" si è svolta anche quest'anno nella città di Rovigo, dal 15 al 17 luglio.

Il corso è stato strutturato in un totale di 20 ore articolate in numerosi interventi di teoria e spunti di riflessione, e soprattutto attività di tipo laboratoriali declinate per i singoli ordini di scuola. Cinquanta i partecipanti, docenti di scuole dalla primaria alla secondaria di secondo grado, provenienti da tutta Italia.

La scuola ha ottenuto il patrocinio della Fondazione per lo Sviluppo del Polesine e della fondazione Cariparo, che hanno aperto le porte delle splendide sale di Palazzo Cezza, nel centro storico di Rovigo, e ha visto la collaborazione del Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università degli Studi di Padova, del Dipartimento di Economia dell'Università Ca' Foscari di Venezia,

---

[1] *È il tema sviluppato nel corso della Scuola Estiva Mathesis per la formazione dei docenti del primo ciclo dell'istruzione (Rovigo 15-16-17 Luglio 2019, Sala degli Stucchi Palazzo Cezza - Fondazione Cariparo).*

[2] Mathesis di Rovigo.

del Centro di ricerche didattiche Ugo Morin, di ricercatori dell'Istituto Nazionale di Statistica (ISTAT).

## 1. Perché la statistica?

Educare e avvicinare alla statistica e alle basi del calcolo della probabilità ha valenza non solo dal punto di vista prettamente scolastico, ma ha ricadute importanti sul piano della cittadinanza attiva e su una consapevole e corretta lettura della realtà quotidiana, dove il ricorso al dato statistico è sempre più frequente in tutti i campi (dall'economia alla politica, dalla finanza alle assicurazioni, dalla salute alla giustizia, dalla ricerca scientifica all'ecologia, insomma in ogni ambito delle attività umana).

La statistica educa proprio alla evidenza probatoria e a rifuggire dal qualunquismo argomentativo.

Nella società odierna, basata sulla capillare diffusione delle informazioni di ogni tipo e provenienza, ciascuno di noi viene continuamente sommerso da una grande pluralità di dati, di varia forma e natura. Soprattutto si tratta di dati derivati, frutto di elaborazioni. Questi numeri sembrano essere ovunque e a guardarli in modo superficiale paiono essere auto esplicativi (in fin dei conti: un numero è sempre un numero). Di fatto si tratta "metadati" e la capacità di comprenderli, interpretarli e utilizzarli correttamente (quindi con strumenti di carattere scientifico) è di fondamentale importanza al fine di prendere le decisioni migliori in situazioni di incertezza. Viviamo in un mondo nel quale il passaggio dalle premesse dell'oggi o del passato alle conclusioni o previsioni sul futuro, non è assolutamente certo, come nel caso di una deduzione logica così cara a noi matematici, ma probabile, e per di più con un grado di affidabilità di molto variabile.

Si pensi, per riferirsi al solo ambito scientifico, alla rivoluzione di pensiero introdotta dalla fisica quantistica rispetto alla fisica di Einstein: si passa dal concetto "deterministico" di causa - effetto, alla considerazione che ad ogni azione si possa solo calcolare la probabilità con cui le sue conseguenze si manifesteranno, ma senza indicare con certezza ed esattezza quali saranno le effettive conseguenze. Lo stesso Einstein scriveva a Max Born, nel dicembre del 2026, riferendosi alla allora nascente teoria dei quanti:

> "*La meccanica quantistica è certamente impressionante. Ma una voce interiore mi dice che non è ancora la cosa giusta. La teoria dice un sacco di cose ma non ci avvicina veramente al segreto del "grande vecchio". Io, in ogni caso, sono convinto che Lui non giochi a dadi*" (Einstein a Max Born, 4 dicembre 1926).

Perché e come questi numeri e dati che si nascondono dietro la realtà sono nati, secondo quali definizioni sono raccolti, come sono organizzati e infine

con quali tecniche (formule, modelli) sono prodotti? Il processo per la produzione dei dati statistico è lungo, e tanto più è lungo tanto maggiore è la possibilità che si presentino fonti di errore (involontario) che inquinano il dato finale, ecco perché in questa società è indispensabile che vi sia *un'alfabetizzazione statistica* di base che dia ai cittadini almeno il messaggio di fare attenzione all'uso del dato statistico e di evitare di cadere nel pericolo di "deridere il dato senza conoscerlo", lasciando comunque ad altri di usarlo, anche con "scaltrezza".
Come ogni altra alfabetizzazione anche quella statistica ha il suo cardine nella scuola ed infatti anche l'ordinamento scolastico italiano prevede conoscenze e competenze di statistica e probabilità nelle scuole dei diversi livelli, ma generalmente nell'esperienza didattica tradizionale i temi di statistica e probabilità sono trascurati, oppure sono trattati limitandosi a far applicare qualche formula e facendo ricorso a libri di testo non sempre adeguati.

## 2. Esempio di un laboratorio in classe: "*l'importanza di porsi domande per raccogliere dati quantitativi;*"

Fare matematica non è solo servirsi di formule per calcoli più o meno complicati per risolvere un problema modellizzato da altri. Una competenza fondamentale (e squisitamente interdisciplinare) da sviluppare negli studenti è saper porre opportune e ben calibrate domande per estrarre dati significativi per il problema che si vuole indagare.

Da questo punto di vista, è stato molto significativo il laboratorio proposto e tenuto dalla ricercatrice ISTAT Rina Camporese "indagine sulla soddisfazione dell'ufficio informazioni": porre attenzione alla fase preparatoria di una indagine statistica, che voleva misurare il grado di soddisfazione del servizio offerto da un ufficio informazioni di una società di trasporto pubblico, ovvero alla definizione di un questionario di valutazione da sottoporre all'utenza.

In questa proposta di laboratorio, già adatta per una classe di scuola media inferiore, l'obiettivo non è quello di trovare una soluzione ad un quesito, (situazione passiva a cui gli studenti sono generalmente abituati ad affrontare in classe) ma formulare in modo adeguato il quesito per descrivere il problema: rispondere passivamente a domande già confezionate è facile, ma non lo è per nulla porsi nell'ottica di costruzione effettiva di un questionario!

Alcune fasi importanti in questo lavoro sono:

- analizzare attentamente l'obiettivo cui pervenire (nel caso in questione: definire un grado quantitativo di valutazione per un problema specifico, quindi anche una scala di valutazione);
- identificare il contesto degli utenti cui effettivamente rivolgersi per ottenere informazioni (ovvero a quale target rivolgersi, equale nume-

rosità del campione cui può essere considerata congrua per poter ottenere risposte significative sul problema);

- individuare un numero congruo (non sovrabbondante ma comunque significativo) di quesiti per ottenere le informazioni necessarie e sufficienti per descrivere con precisione e significatività il fenomeno;
- individuare le modalità più adatte per stillare le domande con un lessico adeguato e con accorgimenti lessicali e psicologici atti a non spaventare o annoiare o distogliere l'attenzione all'utente destinatario dell'indagine.

A pensarci bene, questa proposta laboratoriale è effettivamente una esperienza significativa, ma semplice, di metodo sperimentale, ovvero costruttiva di un atteggiamento scientifico decisamente prezioso per la realtà odierna.

Citando Artur Conan Doyle, il padre del mitico personaggio di Sherlock Holmes, si può sicuramente concludere che "*Costruire teorie prima di aver raccolto i fatti è un errore madornale: conduce ad adattare i fatti alle teorie, invece che adattare le teorie ai fatti*."

## Programma delle attività:

| | lunedì 15 luglio 2019 | martedì 16 luglio 2019 | mercoledì 17 luglio 2019 |
|---|---|---|---|
| 09:00 - 09:45 | Registrazione dei partecipanti | Didattica della Probabilità per competenze e costruzione di semplici modelli | Educazione civica digitale: istruzioni per l'uso della bussola statistica |
| 09:45 - 10:00 | Rompiamo il ghiaccio | | |
| 10:00 - 10:10 | Apertura dei lavori | | Laboratori paralleli |
| 10:10 - 11:00 | Alfabetizzazione statistica per il cittadino. Perché? | *Pausa* | |
| | | Laboratori paralleli | |
| 11:00 - 11:30 | Districarsi tra fake news e luoghi comuni | | *Pausa* |
| | | | Il censimento permanente sui banchi di scuola |
| 11:30 - 11:45 | *Pausa* | | |
| 11:45 - 12:15 | Un primo approccio alla Statistica: dai dati alle formule | | Festival della Statistica |
| 12:15 - 12:30 | | | Conclusioni |
| 12:15 - 13:00 | | | |
| 13:00 - 13:30 | | *Pausa Pranzo* | |
| 13:30 - 14:00 | *Pausa Pranzo* | | |
| 14:00 - 14:15 | | Le Streghe di Bayes e altre storie | |
| 14:15 - 14:30 | Valenza educativa della statistica e della probabilità | 10,100, 1000 lanci… | |
| 14:30 - 15:15 | | Laboratori paralleli | |
| 15:15 - 16:15 | Leggere e interpretare i numeri è importante non solo in statistica. L'educazione finanziaria | Eventi casuali cercasi… | |
| 16:15 - 16:30 | | *Pausa* | |
| 16:30 - 16:45 | *Pausa* | Realtà al computer: i modelli | |
| 16:45 - 17:30 | Laboratori paralleli | | |
| 17:30 - 17:45 | | Tavola rotonda: Statistica e probabilità in classe | |
| 17:45 - 18:00 | | | |
| 18:00 - 18:30 | Referee dei gruppi | | |

# Gli esempi di prova integrata di matematica e fisica per la maturità scientifica 2019[1]

# *Examples of integrated mathematics and physics testing for the scientific maturity 2019*

***Serenella Iacino - Adriana Lanza***[2]

**Abstract**

*The article concerns some reflections on the structure of the second written test of mathematics and physics in the state exam of the scientific liceo.*
*The debate goes through an examination of examples of MIUR tests, of the Q.d.R. and of the interdisciplinary teaching possibility.*
*Then the students' choises between problems and questions are reported on the April 2 - 2019 student simulation sample of a liceo in Rome.*
*And finally it ends using the national correction grid to correct a work.*

La scelta, da parte del MIUR, di una seconda prova pluridisciplinare all'esame di Stato 2019, cioè nello stesso anno scolastico del Decreto ministeriale che notificava la nuova normativa, è stata accolta con comprensibile perplessità nel mondo della scuola.

Si tratta di una scelta innovativa, forse coraggiosa, che però andava preceduta da un sereno confronto con la realtà dei percorsi didattici, attraverso dibattiti e sperimentazioni.

La preoccupazione maggiore è stata manifestata nei licei scientifici, dove gli studenti sono stati chiamati a sostenere una prova integrata di matematica e fisica, sulla cui struttura i docenti avevano già avanzato alcune riserve evidenziandone le criticità.

L'esempio di prova integrata del 20 dicembre, nella quale le due discipline si compenetrano in entrambi i problemi e in tutti i quesiti, è apparso ben lontano dall'usuale prassi didattica e dai risultati che realisticamente si possono ottenere col monte ore di fisica che l'insegnante ha a sua disposizione.

---

[1] Riflessioni emerse nei gruppi di lavoro organizzati dalla Mathesis Romana.
[2] Mathesis Roma.

L'esempio è stato inoltre contestato in quanto ritenuto sostanzialmente una prova di fisica. I due problemi sono entrambi contestualizzati; nel primo la matematica è colta nella sua capacità di costruire modelli e formalizzare una situazione fisica; nel secondo la matematica interviene nell'interpretazione e nell'analisi dei dati.

Per quanto riguarda i quesiti, significativa è la scoperta che ben 6 degli 8 quesiti provenivano da un testo universitario di fisica di circa 40 anni fa: il testo del fisico sovietico Igor E. Irodov- "Problems in General Physics" (tradotto in inglese).

In realtà si tratta di quesiti di "allenamento" in cui il contesto di fisica è solo un pretesto per ripassare o potenziare gli strumenti matematici di base. È evidente però nelle tracce la prevalenza dell'aspetto strumentale della matematica rispetto a quello concettuale.

Il dibattito, al quale hanno partecipato le principali associazioni di insegnanti e varie comunità scientifiche, ha in alcuni casi assunto i toni di una vera e propria protesta con un'esplicita richiesta di una diversa interpretazione del concetto di prova pluridisciplinare e di una revisione della struttura della prova stessa.

In particolare, sono state avanzate le seguenti richieste:

- Procrastinare la scelta del tutto innovativa di problemi e quesiti interdisciplinari per dare tempo ai docenti di riflettere sui quadri di riferimento e avviare una sperimentazione didattica alla luce di essi.
- Strutturare la prova in modo pluridisciplinare, mantenendo separate le richieste inerenti a ciascuna disciplina e salvaguardando la continuità con le tipologie di tracce alle quali gli studenti sono abituati.
- Tener conto, nel peso da assegnare ai contenuti di matematica e di fisica, della disparità di tempo e di risorse assegnate all'insegnamento delle due discipline, in particolar modo nella risoluzione di problemi.
- Evitare il rischio di veicolare, attraverso le prove d'esame, l'immagine riduttiva di una matematica legata prevalentemente alla formalizzazione e risoluzione di problemi di fisica.

Particolarmente significativa è stata l'iniziativa della Mathesis di avviare una riflessione collegiale su ipotesi di seconda prova di giugno 2019, con riferimento alla sua composizione e ai suoi contenuti.

Varie sezioni, tra cui quella di Roma, hanno anche collaborato con la proposta di esempi di tracce e hanno organizzato incontri di formazione o gruppi di discussione.

L'iniziativa, oltre a sostenere il lavoro dei docenti, ha contribuito a influenzare la scelta, da parte del MIUR, della struttura della prova.

La composizione delle due simulazioni successive, rispettivamente del 28 febbraio e del 2 aprile 2019, rispecchia una delle proposte presenti nel documento firmato da Emilio Ambrisi, condivisa dalla maggior parte dei docenti che hanno partecipato al dibattito.

La proposta prevedeva sostanzialmente una presenza delle due discipline non uguale, ma proporzionale al numero di ore settimanali :13 per la Fisica e 22per la Matematica.

Le due simulazioni presentano, infatti, un problema che parte da un contesto matematico collegato poi alla Fisica e un problema che, viceversa, parte da una situazione di Fisica e si collega alla Matematica; entrambi i problemi presentano quattro richieste, equamente suddivise tra le due discipline (2+2).

Degli otto quesiti, cinque sono di Matematica e tre di Fisica.

Queste prove [3] hanno riscosso largo consenso nelle scuole. Sono state giudicate equilibrate e in linea con i percorsi didattici sia nei contenuti che nella formulazione, calibrate su un livello medio di preparazione da parte dello studente ma in grado di valorizzare le «eccellenze».

Il dibattito sulla prova integrata ha messo in luce anche alcune criticità nel confronto trai Quadri di riferimento e la struttura della prova.

L'argomento è stato discusso negli incontri presso la Mathesis di Roma, sia nell'ambito di una didattica interdisciplinare, sia in vista delle future scelte ministeriali riguardo la prova d'esame.

**Struttura della prova integrata**

Come è stato osservato, il primo esempio del MIUR e le due successive simulazioni danno due risposte diverse alla domanda su cosa si intenda per prova integrata di matematica e fisica.

Nel primo esempio i problemi e i quesiti partono da un contesto di Fisica all'interno del quale si sviluppa un processo risolutivo che si avvale di strumenti e metodi matematici.

Le simulazioni del 28 febbraio e del 2 aprile 2019, rispettivamente, mantengono separate le sezioni relative a ciascuna disciplina.

Non è semplice decidere quale tipologia di prova presenti maggiore coerenza con i quadri di riferimento.

La Nota ministeriale del 4 ottobre 2018aveva infatti annunciato che, nel caso in cui la prova dovesse coinvolgere più discipline, i quadri di riferimento non avrebbero portato alla predisposizione di tracce in cui vengono messi insieme e sommati quesiti di più discipline, ma avrebbero proposto situazioni

[3] https://mathesisroma.wordpress.com/la-seconda-prova-agli-esami-di-stato-2019/materiale-proposto/esempi-miur/.

problematiche da cui evincere il livello di raggiungimento degli obiettivi di apprendimento di ciascuna disciplina.

Tale concetto è stato ribadito successivamente nel Decreto ministeriale del 26 novembre 2018, con il quale sono stati pubblicati i quadri di riferimento per la redazione e lo svolgimento della seconda prova scritta.

A una lettura attenta non sfugge come la precedente nota programmatica nasconda una contraddizione. Osserviamo che, non essendo presenti i quadri di riferimento specifici per la prova mista, si evince che si debba tener conto dei nuclei tematici e degli obiettivi di ciascuna disciplina.

Una prova interamente contestualizzata in ambito fisico rischia, però, di avere una minore versatilità nella scelta degli argomenti e di privilegiare le abilità di calcolo e la capacità di modellizzazione.

In definitiva potrebbe non riuscire ad accertare completamente l'acquisizione dei principali concetti e metodi della matematica di base.

Per parlare di effettivo equilibrio tra le due discipline occorrerebbe dare maggiore spazio agli esempi in grado di operare collegamenti sul piano concettuale oltre che strumentale.

Se il docente riesce ad avviare per tempo una didattica interdisciplinare può cogliere le opportunità che essa può offrire:

- affrontare alcuni argomenti in modo sinergico
- sfruttare, specialmente nella risoluzione dei problemi, le abilità che ciascuna disciplina riesce a sviluppare in modo più efficace
- potenziare metodo, rigore, creatività e concretezza.

**L'interdisciplinarità negli esempi ministeriali**

Nei quadri di riferimento non c'è alcun collegamento specifico tra gli obiettivi specifici delle due discipline, se non nella richiesta, per la fisica, del possesso degli strumenti matematici.

Ad esempio, tra gli obiettivi di apprendimento, relativamente al calcolo differenziale, si legge;

- *Determinare la derivata di una funzione ed interpretarne geometricamente il significato.*
- *Applicare il calcolo differenziale a problemi di massimo e minimo*

Non c'è alcun cenno al significato fisico di derivata.

Sappiamo, però, che è difficile separare il concetto di derivata di una funzione da quello di velocità e di accelerazione e che la rappresentazione grafica e l'intuizione geometrica favoriscono comunque una completa comprensione dei concetti.

Osserviamo in proposito che la richiesta di un confronto tra una funzione e la sua derivata era spesso presente nelle vecchie prove d'esame e che la capacità di interpretare i rispettivi grafici compare tra gli obiettivi degli attuali quadri di riferimento. Si tratta indubbiamente di un esercizio molto utile per l'interpretazione e la costruzione dei modelli ma anche un modo di approfondirne l'apparato concettuale.

Possiamo individuare nelle tre simulazioni alcuni esempi il cui contenuto interdisciplinare merita di essere sottolineato ed eventualmente approfondito.

Citiamo in proposito il quesito 7 dell'esempio del 20 dicembre, il quale riesce a collegare in modo unificante l'aspetto geometrico di un grafico crescente e concavo verso l'alto con il significato fisico che dovrebbe essere attribuito alla funzione corrispondente (velocità crescente ma con accelerazione decrescente che fa prevedere, pertanto, un grafico che volge la concavità verso il basso).

Anche nel problema 2 della simulazione del 2 aprile (Punto 4) è abbastanza forte il legame tra la situazione fisica e il confronto tra una funzione e la sua derivata.

Si chiede infatti, in presenza di un campo magnetico variabile nel tempo secondo la legge $B(t) = B_0\, e^{-\omega t}\cos(\omega t)$, con $\omega = \pi$ rad/s e $t \geq 0$ espresso in secondi (s), la relazione tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta; il circuito è costituito da una spira il cui piano è perpendicolare al vettore $\vec{B}$ e di cui sono note l'area $S$ e la resistenza elettrica $R$. Poiché $\Phi(\vec{B}) = B \cdot S$ possiamo scrivere

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}\right) = -\frac{S}{R}\frac{dB(t)}{dt}$$

Si evince che $i(t)$ è direttamente proporzionale all'opposto della derivata di $B(t)$.

Nella*Figura1* si può osservare l'andamento, qualitativo, comparato di $B(t)$ e $i(t)$nell'intervallo $0 \leq t < 1{,}5s$.

Il confronto tra i due grafici induce a riflettere sul significato fisico del verso della corrente e sull'applicazione della legge di Faraday-Neumann-Lenz.

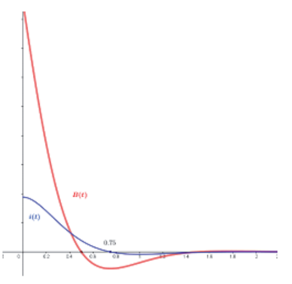


Figura 1

Osserviamo, a titolo esplicativo, che inizialmente il campo magnetico è orientato come la normale alla superficie ed è uscente da essa (flusso uscente e quindi positivo). Il grafico di $B(t)$è inizialmente decrescente, mentre $i(t)$ è positiva: il campo magnetico indotto deve contrastare una diminuzione di flusso uscente, pertanto deve essere anch'esso uscente dalla superficie (la corrente deve circolare in senso antiorario).

Nell'intervallo $0{,}5s \leq t < 0{,}75\ s$ il campo magnetico è negativo e ancora decrescente, il che significa che c'è un aumento di flusso entrante (negativo).

Il campo magnetico indotto deve contrastare un aumento di flusso entrante, pertanto deve essere ancora uscente dalla superficie (la corrente non cambia verso).

Quando $t = 0{,}75\ s$ il campo magnetico raggiunge un punto di stazionarietà e la corrente si annulla .

Nell'intervallo $0{,}75\ s \leq t < 1{,}5\ s$ il campo magnetico è negativo e crescente e anche $i(t)$ è negativa: il campo magnetico indotto deve contrastare una diminuzione di flusso entrante, pertanto deve essere anch'esso entrante nella superficie (la corrente deve circolare in senso orario).

Particolare interesse suscita anche il primo punto del secondo problema della simulazione del 28 febbraio, in quanto permette un duplice approccio risolutivo, fisico o geometrico:

> *Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con $q$ positivo) è fissata nell'origine $O$ di un sistema di riferimento nel piano $Oxy$(dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta $r$ di equazione $y = 1$.*
> *Supponendo che la carica $Q_2$ sia collocata nel punto $A(0,1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche $Q_1$ e $Q_2$ è nullo.*
> *Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.*

La domanda sulla stabilità dell'equilibrio richiama un concetto fisico ingiustamente trascurato nei quadri di riferimento, data la sua importanza e la sua versatilità.

L'approccio interdisciplinare, con la ricerca di un eventuale minimo della funzione che esprime l'energia potenziale della terza carica, non è alla portata dello studente liceale, a meno che non si riduca il problema a un caso unidimensionale. È opportuno, però, mettere in risalto come l'aspetto fisico e l'aspetto geometrico del problema non siano semplicemente accostati ma si fondono rafforzandosi a vicenda.

A. Approccio fisico

La posizione di equilibrio stabile è caratterizzata dal fatto che, in corrispondenza di un piccolo spostamento, di direzione arbitraria, dal punto di equilibrio, si manifesta sempre una forza che riporta la carica nel punto di partenza. Nel caso in cui le forze risultanti si comportino sia da forze di richiamo, sia da forze repulsive, a seconda della direzione, si parla di equilibrio instabile.

Dopo aver trovato che il punto P ha coordinate $\left(0; \frac{2}{3}\right)$, consideriamo la direzione e il verso del campo elettrico risultante, rispettivamente

- in un punto dell'asse y, spostato di poco verso l'alto rispetto a P
- in un punto dell'asse y verso il basso rispetto a P
- in un punto della retta, per P, parallela all'asse x.

Osserviamo che nei primi due casi il campo elettrico risultante è sempre diretto verso P. Nel terzo caso è diretto verso l'infinito.
Pertanto, se una carica $Q_3$ posta inizialmente in P, viene spostata sull'asse y, è attratta verso il punto P se è positiva, mentre se ne allontana se è negativa.
La stessa carica positiva, però, è respinta dalla forza elettrica nel terzo caso. L'equilibrio è instabile, qualunque sia il segno della carica.

B. Approccio geometrico

Nel problema in esame, l'energia potenziale di una terza carica $Q_3$ è la funzione di due variabili

$$U(x, y) = KqQ_3\left(\frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (1 - y)^2}}\right)$$

che presenta, nel punto di equilibrio $P\left(0; \frac{2}{3}; 0\right)$, precedentemente determinato,un punto di sella, corrispondente al caso dell'equilibrio instabile.
Se, modificando il testo, pensiamo di vincolare la terza carica a muoversi solo lungo l'asse y, il problema si riduce allo studio della funzione di una variabile

$$U(y) = KqQ_3\left(\frac{4}{|y|} + \frac{1}{|1 - y|}\right)$$

il cui andamento qualitativo, se $Q_3 > 0$ , è rappresentato in *Figura 2.*
Poiché nel punto P l'energia potenziale ha un minimo locale, l'equilibrio è stabile per una carica positiva (sarà instabile per una carica negativa).

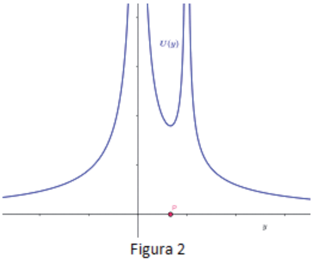


Figura 2

Essendo la forza uguale all'opposto della derivata dell'energia potenziale, $F(y) = -\frac{dU}{dy}$, negli intervalli in cui $U(y)$ cresce sarà $F\ (y) < 0$ e negli intervalli in cui $U(y)$ decresce sarà $F\ (y) > 0$
Questo significa che, spostando la terza carica dalla posizione di equilibrio, nel verso delle y crescenti, $F(y)$ sarà negativa, cioè diretta verso il punto P.Se la si sposta verso le $y$ decrescenti, $F(y)$ sarà positiva, quindi ancora diretta verso P.

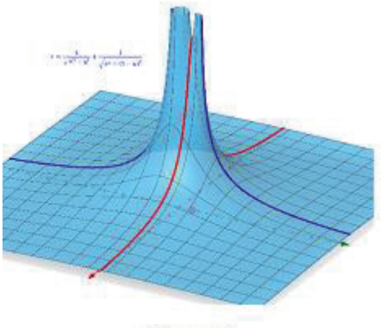


Figura 3

La funzione $U(x,y)$, sempre per $Q_3 > 0$, ha l'andamento qualitativo rappresentato in*Figura3.*

Si può osservare come in corrispondenza del punto di equilibrio $P(0;\frac{2}{3};0)$, punto di sella, l'energia potenziale ha un minimo lungo l'asse $y$ (curva di colore blu-equilibrio stabile) e un punto di massimo lungo la retta $\begin{cases} z = & 0 \\ y = & \frac{2}{3} \end{cases}$ (curva di colore rosso-equilibrio instabile)

Le caratteristiche geometriche del grafico, che eventualmente può essere visualizzato con l'aiuto di un software, sono pertanto coerenti con le precedenti considerazioni sulle forze elettriche.

**Le risposte degli studenti**

Esaminiamo ora le preferenze di 89 studenti di un liceo scientifico di Roma


Figura 4


Figura 5

nella scelta dei problemi e dei quesiti relativi alla simulazione del 2 Aprile 2019, analizzando il grafico in *Figura 4* e quello in *Figura 5.*

Da qui si evince che gli studenti hanno dimostrato di preferire il secondo problema, in quanto come hanno dichiarato alcuni di loro, si sentivano più sicuri psicologicamente nell'approccio iniziale in ambito matematico.

A tal proposito è da rilevare che, in una classe di 26 studenti, ad esempio, il secondo problema è stato scelto da 25 di loro: i primi due punti sono stati svolti sufficientemente bene, mentre gli altri due punti, riguardanti la fisica, sono stati affrontati, nella maggior parte dei casi, non correttamente e in maniera incompleta, per cui possiamo affermare che c'è stata una certa corrispondenza tra la scelta matematica e il risultato, ma il problema non è stato poi portato a termine.

Il quesito più scelto è stato il n.2, riguardante la dimostrazione sulla parità (disparità) della derivata di una funzione dispari (pari); molti però non hanno dimostrato ciò che si richiedeva e si sono limitati a verificare quanto affermato attraverso esempi oppure dimostrando la proprietà limitatamente a funzioni polinomiali. Poche sono statele dimostrazioni, più o meno esaurienti.

Segue il quesito n.6, scelto in quanto si tratta di un quesito relativo al calcolo dell'intensità di un campo elettrico generato da quattro cariche puntiformi posizionate sui vertici di un quadrato di lato noto.

Il terzo in ordine di scelta è il quesito n.4 riguardante la geometria analitica nello spazio.

Sia il quesito n.6 che il n.4 sono esercizi da manuale presenti su tutti i libri scolastici.

Il quesito n.8 è stato meno scelto in quanto riguarda l'effetto fotoelettrico, e analogamente, il quesito n.3, riguardante la funzione integrale; entrambi gli argomenti non erano ancora stati trattati in parecchie classi.

**La griglia di correzione del MIUR**

È stato analizzato il compito di uno studente, che ha scelto di risolvere il secondo problema e i quesiti 2, 4, 5, 6.

Per la valutazione è stata utilizzata la griglia nazionale, nella quale sono stati inseriti i descrittori di livello, come riportato in seguito. (Figure 6-7-8)

Per quanto riguarda il problema, i primi due punti di argomento matematico risultano ben impostati e generalmente corretti, mentre la parte riguardante la fisica è incompleta, anche se la situazione problematica è stata ben inquadrata.

I quesiti 2, 4 e 6 sono corretti e completi anche se nel 4 e nel 6 sono presenti due errori di calcolo; il quesito 5 è corretto solo nella prima parte, mentre nella seconda è presente una grave imprecisione nella scelta della strategia risolutiva.

Anche l'argomentazione e i commenti ai risultati non sono sempre pertinenti e giustificati. Il voto totale assegnato è 15 punti su 20 e scaturisce dall'assegnazione dei seguenti punteggi:

1. per l'indicatore "Analizzare" si assegnano 5 punti corrispondenti al quarto livello;

2. per l'indicatore "Sviluppare il processo risolutivo" si assegnano 4 punti corrispondenti al terzo livello;
3. per l'indicatore "Interpretare, Rappresentare, Elaborare i dati" si assegnano3 punti corrispondenti al terzo livello;
4. per l'indicatore "Argomentare" si assegnano 3 punti corrispondenti al terzo livello.

| Indicatori | Livello | Punteggi | Descrittori | Punti assegnati |
|---|---|---|---|---|
| **Analizzare**<br>Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.<br>**Max 5 punti** | L1 | 0-1 | Analizza il contesto teorico in modo superficiale o frammentario; non deduce dai dati o dalle informazioni il modello o le analogie o la legge che descrivono la situazione problematica | |
| | L2 | 2 | Analizza il contesto teorico in modo parziale; deduce in parte o in modo non sempre corretto dai dati numerici o dalle informazioni il modello o le analogie o la legge che descrivono la situazione problematica | |
| | L3 | 3-4 | Analizza il contesto teorico in modo generalmente completo; deduce dai dati numerici o dalle informazioni il modello o le analogie o la legge che descrivono la situazione problematica | |
| | L4 | 5 | Analizza il contesto teorico in modo completo; deduce correttamente dai dati numerici o dalle informazioni il modello o la legge che descrivono la situazione problematica | 5 |
| **Sviluppare il processo risolutivo**<br>Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari<br>**Max 6 punti**. | L1 | 0-1 | Formalizza situazioni problematiche in modo superficiale e non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione | |
| | L2 | 2-3 | Formalizza situazioni problematiche in modo parziale e applica gli strumenti matematici e disciplinari in modo non sempre corretto per la loro risoluzione | |
| | L3 | 4-5 | Formalizza situazioni problematiche in modo quasi completo e applica gli strumenti matematici e disciplinari in modo generalmente corretto per la loro risoluzione | 4 |
| | L4 | 6 | Formalizza situazioni problematiche in modo completo ed esauriente e applica gli strumenti matematici e disciplinari corretti e ottimali per la loro risoluzione | |
| **Interpretare, rappresentare, elaborare i dati**<br>Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.<br>**Max 5 punti** | L1 | 0-1 | Elabora i dati proposti in modo superficiale non verificandone la pertinenza al modello scelto. Non adopera o adopera in modo errato i necessari codici grafico - simbolici. | |
| | L2 | 2 | Elabora i dati proposti in modo parziale verificandone la pertinenza al modello scelto in modo non sempre corretto. Adopera non sempre in modo adeguato i necessari codici grafico - simbolici. | |
| | L3 | 3-4 | Generalmente elabora i dati proposti in modo completo verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto. Adopera in modo corretto i necessari codici grafico - simbolici. | 3 |
| | L4 | 5 | Elabora i dati proposti in modo completo, con strategie ottimali e/o con approfondimenti, verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto. Adopera in modo pertinente i necessari codici grafico - simbolici. | |
| **Argomentare**<br>Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.<br>**Max 4 punti** | L1 | 0-1 | Giustifica in modo confuso e frammentario le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato; comunica con linguaggio scientificamente non adeguato le soluzioni ottenute, di cui non riesce a valutare la coerenza con la situazione problematica | |
| | L2 | 2 | Giustifica in modo parziale le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato; comunica con linguaggio scientificamente non adeguato le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare solo in parte la coerenza con la situazione problematica | |
| | L3 | 3 | Giustifica in modo completo le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato; comunica con linguaggio scientificamente adeguato anche se con qualche incertezza | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare la coerenza con la situazione problematica | |
| | L4 | 4 | Giustifica in modo completo ed esauriente le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato; comunica con linguaggio scientificamente corretto le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare completamente la coerenza con la situazione problematica | |
| VALUTAZIONE | | | | 15 / 20 |

*Fig. 6 - Fig. 7 - Fig. 8*

## Siti consultati

[1] www.istruzione.it/esame_di_stato/index.shtml
[2] www.mathesisnazionale.it
[3] https://wordpress.com/view/mathesisroma.wordpress.com
[4] www.aif.it
[5] www.matmedia.it

# Prove tematiche per la verifica degli apprendimenti

# Thematic tests for the verification of learning

*Emilio Ambrisi – Pasqualina Ventrone*

**Abstract**

*The article deals with the problem of finding more effective formulations of learning verification tests. The text of a "thematic" test is proposed for the final exam of the scientific high school. The interdisciplinary text develops the theme "the derivative" and is divided into three mandatory parts.*

La seconda prova scritta degli esami di maturità scientifica 2019 ha presentato aspetti di continuità e di discontinuità. L'articolazione della prova in problemi e quesiti, anche se quest'ultimi ridotti ad otto dai dieci che erano, è l'elemento di continuità. La pluridisciplinarità della prova invece è la rottura con il passato, la novità che non consentirà più di parlare, come è stato finora, dal 1924 ininterrottamente, della prova di matematica della maturità scientifica. Adesso, più generalmente, si dovrà parlare della seconda prova scritta potendo essa anche non interessare la matematica o coinvolgerla insieme alle altre discipline specifiche dell'indirizzo. Al suo esordio multidisciplinare la prova 2019 ha coinvolto sia la matematica che la fisica.

**1. La prima esperienza e le prospettive.**

Come è stata vissuta questa prima esperienza è ancora oggetto di resoconti e riflessioni. Il sito Matmedia al riguardo è ben fornito e offre un ampio ventaglio di interventi che spaziano dal riferimento ai contenuti, alle formulazioni, alle difficoltà, alla coerenza delle richieste con i novelli "quadri di riferimento", alla flessibilità dei criteri di valutazione, al valore inter- e transdisciplinare della prova nella sua interezza. In verità Matmedia presenta anche qualche pregio in più: oltre ad offrire un bilancio sufficientemente dettagliato e documentato dell'esperienza fatta, abbozza anche un quadro di prospettiva futura. Presenta cioè una serie di considerazioni che guardano al futuro e mirano a potenziare, com'è da augurarsi che avvenga, gli aspetti positivi e a ridurre le negatività.

Serenella Iacino[1], ad esempio, richiama con molta determinazione un punto che è largamente condiviso dalla collettività dei docenti: i quadri di riferimento vanno ulteriormente chiariti e, in particolare per la fisica, decisamente ridimensionati. Adriana Lanza[2], in aggiunta, sottolinea la necessità di non disperdere il patrimonio culturale e formativo della matematica. Dal canto loro, gli autori della presente nota, hanno auspicato, insieme a Tiziana Bindo[3] e nell'ottica dei bisogni espressi da S. Iacino e A. Lanza, che l'esperienza della prova 2019 non vada abbandonata, vada proseguita e anzi valorizzata nell'aspetto interdisciplinare. I motivi della proposta sono da una parte l'impossibilità per la scuola di far fronte efficacemente al proliferare delle discipline e dei saperi, dall'altra la necessità di non far rivivere ai docenti l'inquietudine dei cambiamenti repentini e improvvisati.

La prova del 2020 non dovrebbe cioè discostarsi da quella di quest'anno: matematica e fisica nei due problemi e negli otto quesiti. Avviare iniziative perché il testo della prova 2020 sia meglio pensato e formulato e più contenuto nel livello delle richieste è un dovere di tutti. Ciononostante, occorre preparare il futuro. La struttura della prova in problemi e quesiti - questo elemento di continuità che vige dal 2001non mancando di dare buoni frutti - comincia a porre più di un dubbio circa la sua adeguatezza al diverso contesto della prova. Occorre dunque cominciare a ricercare nuove modalità che abbiano il vantaggio di essere più flessibili, meno schematiche e rigide. Al riguardo un interesse particolare, come in modo specifico è stato anticipato nell'articolo citato, ha prodotto l'articolazione del tema di latino e greco proposto per il liceo classico. "Un'idea – è stato scritto[4]– stimolante, per certi versi affascinante: emulare l'organizzazione della prova proposta alla maturità classica per soddisfare le istanze di multi- e inter-disciplinarità. È un'idea che in ogni caso spinge a fare qualche tentativo".

La presente nota ha proprio lo scopo di presentare il tentativo fatto ed il suo risultato: una "prova tematica".

## 2. La prova tematica

Un tipo di prova che può variamente articolarsi nelle richieste e connotarsi di interdisciplinarità e portata culturale e che può essere pensata per l'esame conclusivo ma anche come prova intermedia da proporre fin dai primi anni del corso di studio caratterizzando in tal modo, fortemente, l'azione didattica. Il testo che qui si presenta è sufficientemente indicativo dell'idea e degli obiettivi che s'intendono perseguire. Il testo mostra innanzitutto una dimensione più

[1] http://www.matmedia.it/l-imperativo-rivedere-i-qdr-in-particolare-una-fisica-meno-ampia/.

[2] http://www.matmedia.it/la-necessita-di-una-prova-finale-culturalmente-valida/.

[3]http://www.matmedia.it/le-scelte-per-il-prossimo-biennio-almeno/.

[4]http://www.matmedia.it/le-scelte-per-il-prossimo-biennio-almeno/.

elevata assunta dall'accertamento dell'apprendimento inteso come momento non disgiunto dall'attività d'insegnamento ma perfettamente integrato con essa. E mostra altresì una prova che non può essere il frutto di una scelta estemporanea bensì richiede un serio impegno di studio e di progettazione didattica a più mani. Il testo che si propone nel successivo paragrafo è pensato come prova per la maturità –altri si troveranno sul sito Matmedia– e presenta, in modo specifico, le seguenti caratteristiche:

a) fissa il tema e lo definisce;
b) é articolato in tre parti con formulazioni e finalità diverse;
c) non prevede parti opzionali.

Sono caratteristiche che valorizzano la natura interdisciplinare della prova. Il tema fissato è "la derivata"[5]. Cioè il concetto principe dell'analisi matematica che è pervasivo di ogni indagine e descrizione dei fenomeni reali, dei cambiamenti e della variabilità o uniformità che li accompagna nei loro aspetti qualitativi e quantitativi. La derivata sostanzia, nella varietà concettuale e applicativa, le tre parti in cui la prova è articolata. L'ultima, la terza, propone dei brani da leggere e commentare. Leggere, interpretare e comprendere un brano. La matematica come ambito, strumento e via per educare a saper leggere. Il testo infine non ha parti a scelta ma una molteplicità di richieste sufficienti a venire incontro alla definizione di più concreti criteri comuni di valutazione. Ed è indubbio che l'assenza di opzionalità porta a valorizzare l'aspetto quantitativo non trascurando il tempo concesso per la prova. Quindi valutare quanto di qualitativamente accettabile si riesce a fare sapendo amministrare i tempi a disposizione, ridotti a quattro ore. Un tempo sufficiente per mantenere deste attenzione e concentrazione.

## 3. Esame di Stato conclusivo del Liceo Scientifico. Esempio di seconda prova scritta.

TEMA: La derivata

Definizione:
La derivata della funzione $f$ rispetto alla variabile $x$ è la funzione $f'$ il cui valore in $x$ è

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se tale limite esiste.
Nota: Nel seguito del testo la derivata è indicata anche con il simbolo $\frac{df}{dx}$ [notazione che risale a G.W. Leibniz (1646-1716)]

[5] La definizione è presa da Thomas/Finney, Calculus, 9th edition, 1996, ed è coerente con la scelta per alcuni anni osservata nei testi delle prove di maturità di distinguere tra f e f(x).

**Prima Parte**

1. Calcolare, applicando la definizione, le derivate di $f(x) = senx$ e di $g(x) = e^x$
2. Dare un esempio di funzione non derivabile in un punto.
3. Teorema: Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b)$, allora esiste almeno un punto $c$ tra $a$ e $b$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   a) Posto $f(x) = x^2,\ a = 1\ e\ b = 3,$ calcolare $c$ ed illustrare geometricamente il risultato.
   b) Esaminare il caso in cui risulti $f(a) = f(b)$ e commentare il risultato.
4. Esiste un legame tra i concetti di derivata e di integrale? Quale?
5. La potenza P, espressa in watt, di un circuito elettrico è collegata alla resistenza R, espressa in ohm e alla corrente i (ampere), dalla relazione $P = Ri^2$.

a) Se nessuna delle tre grandezze P, R, i è costante, quale relazione lega tra loro $\frac{dP}{dt}, \frac{dR}{dt}$ e $\frac{di}{dt}$ .

b) Se P è costante che relazione c'è tra $\frac{dR}{dt}$ e $\frac{di}{dt}$ ?

**Seconda Parte**

Una particella si muove lungo l'asse $x$ con accelerazione data da $a(t) = 12t - 18$ con $t > 0$. Al tempo $t = 1$ la velocità della particella è $v(1) = 0$ e la posizione è $x(1) = 9$.

a) Scrivere un'espressione per la velocità $v(t)$ della particella.
b) Per quale valore di $t$ la particella cambia verso?
c) Scrivere un'espressione per la posizione $x(t)$ della particella.
d) Calcolare la distanza complessiva percorsa dalla particella da $t = \frac{3}{2}$ a $t = 6$.

**Terza Parte**

Sono proposti due brani seguiti da domande alle quali è richiesto di dare una risposta.

1. La derivata terza del presidente Richard Nixon.

«Le parole seguenti sono tratte da un discorso tenuto dal presidente americano Richard Nixon durante la campagna elettorale del 1972: "*Il tasso di incremento dell'inflazione è in calo*".

Stava usando la derivata terza. Se la funzione che analizziamo definisce i prezzi, la sua derivata indica il tasso di inflazione, la derivata seconda è la rapidità di variazione dell'inflazione e il significato dell'affermazione del presidente Nixon è che la derivata terza della funzione dei prezzi è negativa. Quella fu la prima volta, scrisse il matematico Hugo Rossi in un articolo del 1996, che un presidente usò la derivata terza per essere rieletto». (da *Matematica e Mondo Reale* di ZviArtstein- Bollati Boringhieri, 2017).

Domanda 1: Perché la derivata seconda è la rapidità di variazione dell'inflazione? Spiegare con un esempio.

Domanda 2: Se studiando una funzione si ottiene che la derivata terza in un punto è zero, quale ne è il significato geometrico? Illustrare la risposta con un esempio.

2. Sulle idee fisiche più importanti introdotte da Galileo

«La prima [idea] fu che una forza agente su un corpo determina non la velocità bensì l'accelerazione. Che cosa significano in realtà i termini "accelerazione" e "velocità"? La *velocità* di una particella –o di un punto su un qualche corpo– è la rapidità di variazione, rispetto al tempo, della posizione di tale punto. La velocità è considerata di solito una grandezza *vettoriale* […]. L'accelerazione (che è anch'essa una quantità vettoriale) è la rapidità di variazione di questa velocità rispetto al tempo: l'accelerazione è quindi *la rapidità di variazione della rapidità di variazione* di posizione rispetto al tempo! (Gli antichi avrebbero avuto grandi difficoltà ad affrontare queste nozioni, mancando sia di "orologi" adeguati sia delle idee matematiche concernenti le "rapidità di variazione"). Galileo determinò che la forza agente su un corpo (nel suo caso la forza di gravità) controlla l'accelerazione di quel corpo ma *non* ne controlla direttamente la velocità, diversamente da quanto avevano creduto gli antichi, e in primo luogo Aristotele. In particolare, se non si applicano forze la velocità è costante: perciò in *assenza* di forze si ha un moto rettilineo uniforme (che è la prima legge di Newton). I corpi liberi di muoversi continuano a muoversi di moto rettilineo uniforme e non hanno bisogno di alcuna forza che ne conservi il moto. Una conseguenza delle leggi dinamiche sviluppate da Galileo e da Newton fu in effetti che il moto rettilineo uniforme è fisicamente del tutto indistinguibile dallo stato di quiete (ossia dall'assenza di moto): non esiste, localmente, alcun modo per distinguere il moto rettilineo uniforme dalla quiete! Galileo fu particolarmente chiaro su questo punto (addirittura più chiaro di Newton) e fornì una descrizione vivacissima di quest'idea in riferimento ad una nave in mare». [da: Roger Penrose, *La mente nuova dell'imperatore*, Rizzoli, 1992].

1. Commentare il brano spiegando in particolare i riferimenti alle "difficoltà" degli antichi nonché ad Aristotele.
2. In che cosa consiste il principio di relatività galileiana? La costanza della velocità della luce contraddice tale principio? Motivare la risposta.

# La matematica, oltre le discipline

## *Congresso Mathesis di Matera 2019*

***Elisabetta Lorenzetti***

*"Un vero viaggio di scoperta non*
*è nel cercare nuove terre,*
*ma nell'avere nuovi occhi".*
*Marcel Proust*

**Abstract**

*To face the challenges imposed by the complexity of the contemporary world, it is necessary to conceive flexible a flexible didactics, no longer based on rigid time frames and fragmented knowledge but which actively promotes the integration and interconnection of knowledge.*
*It is precisely mathematics that, regardless of the boundaries between disciplines, pervades every field of human action, to find itself in a privileged position to guide the process of overcoming the current disciplinary organization, proposing itself as a meta-discipline and a universal language to think, reflect and reason.*

Il titolo del congresso 2019 della Mathesis a Matera è frutto di una riflessione sullo stato dei saperi in un'epoca come la nostra, giustamente definita da Edgar Morin come "complessa" (*Pensare la complessità. Per un umanesimo planetario*), e sul senso del fare educazione oggi. Viviamo un'epoca globalizzata ed immersa nel "game", come ben argomenta Alessandro Barrico (*The game*). Un'epoca dell'interdipendenza economica e culturale, della scienza patrimonio aperto e condiviso, ma spaesata nella crisi. Un'epoca della informazione veloce, immediata, che ci fa perdere il senso della riflessione e della consapevolezza, poichè sfruttata per scopi tecnici che non riescono a fornire alcun senso complessivo, alcuna direzione, alcuna saggezza. Per dirla con Thomas Stearns Eliot: "Dov'è la conoscenza che perdiamo nell'informazione? Dov'è la saggezza che perdiamo nella conoscenza?". In questa complessità e frammentarietà dei saperi, alla ricerca di un nuovo umanesimo, si pone la questione educativa: "quale studente, per quale società del futuro?" È la sfida che la politica scolastica complessiva, così come le singole istituzioni scolastiche, ha di fronte. Valgono in merito le considerazioni dello storico e saggista israeliano Yuval Noah Harari:

> *"Un bambino nato oggi avrà poco più di trent'anni nel 2050. Se tutto gli va bene, sarà ancora in vita intorno al 2100, e potrebbe persino essere un cittadino attivo del XXII secolo. Che cosa dovremmo insegnare a questo bambino per aiutarlo a sopravvivere e avere successo nel mondo del 2050 o in quello del XXII secolo? Quali competenze professionali dovrà avere per trovare un'occupazione, comprendere quello che gli succede intorno ed orientarsi nel labirinto della vita?" (21 lezioni per il XXI secolo, lezione: Istruzione).*

È la sfida della ipercomplessità, la sfida di una Terra divenuta per ogni uomo comunità di destino, sebbene ognuno di noi faccia una fatica enorme a percepire che "tutto si connette", e le complesse trame che regolano tali connessioni. Secondo Morin l'insegnamento/educazione è oggi di fronte a tre sfide (*La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero*):

1. **La sfida culturale**
   In questo contesto si confronta sapere umanistico (che affronta la riflessione sui fondamentali problemi umani e favorisce l'integrazione delle conoscenze) e la cultura tecnico-scientifica (che separa i campi, suscita straordinarie scoperte ma non una riflessione sul destino umano e sul divenire della scienza stessa).
2. **La sfida sociologica**
   L'informazione è una materia prima che la conoscenza deve integrare e padroneggiare; la conoscenza deve essere costantemente rivisitata e riveduta dal pensiero; il pensiero è oggi più che mai il capitale più prezioso per l'individuo e la società.
3. **La sfida civica**
   Il sapere è diventato sempre più esoterico e anonimo. Si giunge così all'indebolimento del senso di responsabilità, poiché ciascuno tende ad essere responsabile solo del proprio ambito specializzato ed all'indebolimento della solidarietà, poiché ciascuno percepisce solo il legame organico con la propria città e i propri concittadini.

Raccogliere queste sfide significa procedere ad una riforma dell'insegnamento che deve condurre alla riforma di pensiero e la riforma di pensiero che deve condurre a quella dell'insegnamento. Come non condividere, in questo contesto, la domanda posta da M. De Montaigne:

> *"È meglio una testa ben fatta che una testa ben piena"?*

Alla domanda, lo stesso Morin risponde sostenendo che una testa "ben fatta" è caratterizzata non dall'accumulo del sapere quanto piuttosto dal poter disporre allo stesso tempo di una attitudine generale sia nel porre che trattare i problemi e dei principi organizzatori che permettano di collegare i saperi e di dare loro senso. Essa va dunque al di là del sapere parcellizzato, proiettandosi oltre le singole discipline ed attivamente operandosi per riconnettere sapere umanistico e sapere scientifico. Tale "testa" è infatti ben conscia che le sfide poste dalla globalità e dalla complessità sociale, politica, nazionale e mondiale richiedano sempre più un approccio "di sistema", che non può permettersi una separazione fra le due culture ma che, al contrario, manovri efficacemente al confine tra di esse. Per fare ciò è quindi necessario un riordino dell'organizzazione dei saperi, spesso disgiunti e frazionati, inadeguati ad affrontare problemi che richiedono approcci multidisciplinari che permettono di cogliere le relazioni e influenze reciproche tra le parti e il tutto in un mondo complesso: "L'interconnessione dei saperi".

Sappiamo che la *disciplina* è una categoria organizzatrice in seno alla cultura scientifica, istituisce la specializzazione del lavoro e risponde alla diversità dei domini delle scienze operandone la delimitazione del dominio di competenze, senza cui la conoscenza diventerebbe inafferrabile. L'istituzione disciplinare comporta però il rischio di una iper-specializzazione, con la conseguente chiusura della disciplina in sè stessa, chiusa a pensieri e dinamiche più generali. La storia delle scienze non è però soltanto la storia della costituzione e della proliferazione delle discipline, ma è allo stesso tempo quella della rottura delle frontiere disciplinari, degli sconfinamenti di un problema da una disciplina in un'altra, della circolazione dei concetti, di formazione di discipline *ibride* che sono nel tempo finite per essere autonome. Ancora più significativamente dal punto di vista della nostra narrazione, però, le scienze hanno visto la formazione di *complessi* in cui le differenti discipline si aggregano, si uniscono permettendo di concepire l'unità in ciò che prima era disgiunto. La biochimica, l'informatica e le neuroscienze sono solo tre dei tanti esempi che potremmo citare. In tale ottica le discipline sono pienamente giustificate solo a condizione che siano in grado di riconoscere e concepire l'esistenza di interconnessioni. Per fare ciò è necessario adottare un punto di vista metadisciplinare, dove il termine "meta" include allo stesso tempo i concetti di conservazione delle peculiarità e di superamento delle differenze. È infatti innegabile che non si possa distruggere quello che è stato creato individualmente dalle singole discipline, pena il mettere in crisi esistenziale la disciplina stessa, per cui si debba adoperarsi cautamente nel far sì che una disciplina sia allo stesso tempo aperta e chiusa. In questa ottica, come detto, l'organizzazione dei sistemi scolastici deve rinnovarsi. Essa non può più basarsi solo su insegnamenti disciplinari e su rigidi quadri orari, ma deve necessariamente diventare più flessibile e autonoma ed essere accompagnata da una progressiva integrazione degli insegnamenti disciplinari.

In particolare, la matematica, che pervade ogni campo dell'azione umana, che abbatte gli steccati di ogni ambito disciplinare, la più *"disciplina delle discipline"*, si trova ad essere in una posizione privilegiata per guidare il processo di superamento dell'organizzazione disciplinare e a porsi come meta-disciplina, come attività per pensare, riflettere e ragionare, anche grazie all'universalità del suo linguaggio. Lo stesso Y. N. Harari riconosce che "oggi tutti coloro che vivono sul pianeta Terra parlano una sola lingua: questa lingua è la matematica. Che abitiate in Cina, Australia o Brasile, non fa differenza: la lingua che domina le istituzioni, l'economia e la politica è la matematica ed è precisamente questo il linguaggio di cui l'imperialismo europeo ha favorito la diffusione in tutto il globo".

Parlando di quella che può essere l'intima essenza della matematica, ci si può rifare a due metafore riprese dalla mitologia greca e dalla mitologia romana. Precisamente al mito di Metis che è metafora della matematica come educazione alla razionalità, capace di proporre soluzioni specifiche per i casi concreti (non dimenticando però che la matematica è anche *logos* inteso come ragionamento e attività pura del pensiero) e al mito, richiamato da Benoît Mandelbrot, di Giano bifronte, il dio romano che, diversamente da Zeus, non ha progenitori; è lui il primo, metafora della matematica che non nasce e non perisce ma non solo, Giano è il dio che guarda ovunque, il dio delle porte e dei ponti, il dio che sovraintende ai passaggi, ai legami e alle connessioni. E che cos'è l'intelligenza se non la capacità di trovare legami e connessioni anche tra cose lontane? (*E. Ambrisi, editoriale n. 2 e 3, 2017 del Periodico di matematiche, Mathesis*).

Concludendo:

- È la matematica che pervade ogni campo dell'azione umana, che guarda ovunque e che ha abbattuto gli steccati di ogni possibile ambito disciplinare.
- È la matematica che si pone come meta-disciplina, come attività per pensare e per riflettere nel suo procedere a volte in modo dialettico, inaugurato da Talete, a volte in modo algoritmico, esemplificato dal mito del filo di Arianna, il passo dopo passo.
- È la matematica che manifesta la sua grande fantasia e produttività proprio nel porre e nel risolvere problemi.
- È la matematica che troviamo nella natura, nella musica, nella letteratura, nella filosofia, nella fisica, nella chimica, nella biologia,

nella statistica, nell'arte, nella medicina, nella geometria con la quale la natura ci parla e perfino nella giurisprudenza.

- È la matematica che ci dà certezze ma anche che ci permettere di valutare la probabilità delle incertezze.
- È la matematica che accomuna tutte le nazioni in un solo linguaggio universale.

La matematica va quindi al di là delle singole discipline e, pur avendone originato la problematica e offerto il modello costitutivo, si colloca in un'altra dimensione più ampia, pervasiva di ogni attività umana e riferimento di ogni insegnamento. Di questi "ponti, legami e connessioni" ci hanno parlato i relatori che sono intervenuti a Matera. Con loro abbiamo avuto la possibilità di scoprire una "matematica" diversa da quella che generalmente viene proposta nelle aule scolastiche e di cogliere spunti e riflessioni per il nostro insegnamento.

Un sentito ringraziamento agli organizzatori, relatori, docenti e studenti che si sono prodigati per l'ottima riuscita del nostro Congresso.

**Bibliografia**.

[1] E. MORIN, *I sette saperi necessari all'educazione del futuro*, 2001

[2] E. MORIN, *La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero*, 2000

[3] E. MORIN, *Pensare la complessità. Per un umanesimo planetario*, 2012

[4] Y.N. HARARI, *lezioni per il XXI secolo*, 2018

[5] E. AMBRISI, *Periodico di matematiche della Mathesis*, n. 2 e 3-2017

[6] A. BARRICO, *The game*, 2018

titolo in inglese

# Edizione 2019 del premio Bruno Rizzi

***Tiziana Bindo***

*Short story of the Bruno Rizzi prize and report on the award ceremony of the 2019 edition*

Nel 2005 ricorrendo il decennale della morte del prof. Bruno Rizzi (Tripoli 21 settembre 1935 - Roma 6 ottobre 1995), presidente della Mathesis dal 1985 al 1993, la Mathesis istituì il concorso che porta il suo nome e che da allora si è svolto annualmente rivolto a docenti o a studenti. Le prime edizioni furono realizzate in collaborazione con l'Istituto Storico Italiano per il Medioevo con tema "La matematica e il medioevo" e destinate agli studenti delle scuole secondarie di primo e secondo grado. Dopo le edizioni dal 2015 al 2018 rivolte ai docenti, quest'anno il concorso è tornato ad interessare nuovamente gli studenti ed è stato bandito in collaborazione con Ufficio Scolastico Regionale per la Basilicata, Fondazione Matera - Basilicata 2019 e il Liceo T. Stigliani di Matera. Il tema dell'edizione 2019 del concorso, destinato agli studenti e alle studentesse del primo e del secondo ciclo di istruzione, è stato: "Le forme nella città di Matera - Un itinerario matematico, storico e sociale". La valenza didattica del concorso è stata quella di sollecitare specifiche attività di ricerca al di là della mera compilazione, in modo da mettere in luce gli aspetti culturali della matematica come scienza compenetrante la realtà storica e sociale. Il rilievo conferito alla matematica che ci circonda e in cui siamo immersi ha comportato, da parte degli studenti, lo studio geografico della città di Matera osservando da un punto di vista matematico "quei Sassi che sono stati riconosciuti il 9 dicembre 1993 nell'assemblea di Cartagena de Indias (Colombia) patrimonio dell'umanità dall'UNESCO, primo sito dell'Italia meridionale a ricevere tale riconoscimento". Gli elaborati sono stati esaminati da una Commissione composta, dai Dirigenti Tecnici Nicola Caputo, Rosaria Cancelliere, Domenica Di Sorbo, Antonio Scinicariello dai Consiglieri Nazionali Tiziana Bindo e Marcello Pedone.  Il tema del concorso è risultato particolarmente adatto a richiamare la partecipazione di scolaresche, dalla primaria alla secondaria di secondo grado, che, in numero consistente, hanno concorso con lavori individuali o di gruppo.

La cerimonia di premiazione dei vincitori del premio si è svolta il 25 ottobre nel corso del Congresso che la Mathesis ha tenuto a Matera, città della cultura 2019, dal 24 al 26 ottobre.

I premi, stanziati dalla Mathesis, per gli elaborati vincitori della prima Sezione del concorso sono stati di 150 euro per ogni premiato e della pubblicazione dello spot vincitore sui siti web di "Fondazione Matera-Basilica ta 2019", USR Basilicata e Mathesis.

Per la scuola primaria si sono aggiudicati il primo premio ex aequo per la prima sezione:

- La classe IVA dell'Istituto Comprensivo Rocco Montano di Stigliano per l'album fotografico inciso su rame dal titolo: Ricordi di una città.
- La classe 5C dell'Istituto Comprensivo Palazzo-Salinari di Montescaglioso per un album di foto su google.

  È stato segnalato inoltre il filmato realizzato dalle classi 2 A-B-C dell'Istituto Comprensivo 2 Giovanni Paolo II di Policoro

  Per la scuola secondaria di I grado si sono aggiudicati il primo premio ex aequo per la prima sezione:
- La classe 3B della Scuola Secondaria di I grado G. Mezzanotte di Chieti
- Un gruppo di alunni delle terze classi della Scuola Secondaria di I grado dell'Istituto Comprensivo De Amicis di Grottaglie

  È stato segnalato inoltre "Il percorso virtuale tra le strade di Matera" realizzato dalla classe 2B della Scuola Secondaria di I grado G. Mascolo di Irsina.

  Per la scuola secondaria di II grado si sono aggiudicati il primo premio ex aequo per la prima sezione:
- Mariangela Vitelli del Liceo Classico dell'I.I.S. G. Fortunato di Pisticci per la presentazione in power point "La cattedrale di Matera".
- Giovanna Cannato e Antonella Bonasia dell'Istituto Alberghiero di Molfetta per il libro multimediale "Matera: la città delle "forme" e "del gusto"".

  È stato segnalato inoltre il filmato "Mathera in forma" realizzato da Elisa Calabrese e Serena Risimini dell'IIS Stigliani di Matera

  La seconda sezione consisteva nello sfidare i ragazzi a indossare i panni di creativi pubblicitari, diventando essi stessi autori di un messaggio che reclamizzasse Matera 2019 mediante una clip di 3 minuti al massimo. Il premio è stato assegnato a Camillo Nicoletti del LS Dante Alighieri di Matera per il filmato "Sedime e sedimento".

# Matera: la città delle “forme” e “del gusto”

## *Matera: the city of "forms" and "taste"*

***Corrado Simone Binetti*** [1]

**Abstract**

*The following article was produced on the occasion of the B.Rizzi 2019 Prize and describes the multimedia work, carried out by two students of the Istituto Alberghiero di Molfetta, who were ranked first for secondary school. This work describes the shape of the city of Matera, examining some geometric, architectural and culinary aspects of the splendid town of Basilicata. The cake created for this occasion by the students, called: "Matera sponge cube", aims to highlight the "fractal" form of the Lucan city, as can be seen also from the writings of Professor Sandra Lucente of the University of Bari, who have been carefully read and internalized by students.*

Il progetto elaborato dalle allieve Giovanna Cannato (V B Pasticceria) ed Antonella Bonasia (IV B Pasticceria), dal titolo: **“Matera: la città delle “forme” e del “gusto”**, si colloca all’interno dell'XIII° edizione del "CONCORSO TURISTICO-ENOGASTRONOMICO”.

Infatti l’Istituto Professionale di Stato per i Servizi di Enogastronomia e Ospitalità Alberghiera di Molfetta, nell’ambito delle attività previste dal POF 2018/19, ha organizzato come da tradizione quasi decennale questo concorso, riservato agli studenti interni dell’Istituto. Lo scopo della manifestazione è quello di stimolare la creatività degli studenti mediante il confronto culturale, tecnico e professionale con i seguenti obiettivi:

1) Conoscere e saper promuovere il profilo storico e naturalistico, le tradizioni e la cultura popolare, le produzioni alimentari tipiche (con particolare riferimento ai prodotti DOP e IGP) del territorio di riferimento;
2) Saper comunicare le peculiarità del proprio territorio in modo efficace e sintetico ad un pubblico attento all’aspetto storico-culturale;

[1] Docente di Matematica presso l’IPSSAR Alberghiero Molfetta, settore Prodotti Dolciari e socio della Mathesis Nazionale, Città Metropolitana di Bari.

3) Saper creare un percorso turistico che valorizzi le peculiarità artistiche e naturali delle Regioni del sud Italia e saperlo illustrare con proprietà linguistica e capacità interpretativa;
4) Saper manifestare le competenze linguistiche - espressive - scientifiche - professionali proprie di un professionista del settore turistico - alberghiero - ristorativo.

Prendendo spunto dai quattro obiettivi su citati, con la collaborazione di tutti i docenti del Consiglio di Classe della VB Pasticceria si è voluto creare un UDA multidisciplinare, prendendo spunto dal bando del Concorso Bruno Rizzi 2019 dal titolo: "Le forme nella città di Matera - Un itinerario matematico, storico e sociale", che cita così testualmente:

> *"Il Concorso mira a soddisfare l'esigenza, largamente avvertita ed auspicata, della valorizzazione e del potenziamento dello studio della matematica all'interno delle scuole italiane dalla primaria alla secondaria di secondo grado e si propone altresì di sensibilizzare studenti e adulti sul tema della matematica per coglierne la presenza nelle forme e negli aspetti della quotidianità urbana. Il tema del concorso si pone come veicolo di una formazione dell'uomo e del cittadino essenzialmente interdisciplinare e integrata".*

Si è scelto di predisporre e pubblicare i materiali raccolti, frutto di ricerca ed approfondimento delle singole discipline, creando una dispensa interattiva e multimediale: un Geogebra Book con applet grafici e dinamici incorporati nel testo per attività di sintesi didattica o come spunti per attività di produzione da parte degli studenti. Le studentesse hanno realizzato questo libro multimediale con la mia collaborazione (ho concesso loro di poter utilizzare il mio dominio personale di Geogebra), partendo dall'analisi delle ricette dei dolci classici della tradizione materana, e creando "suapte manu", un dolce al piatto: "Matera Sponge Cube", che fosse legato alla TRADIZIONE e alla INNOVAZIONE, prendendo spunto dalla forma geometrica della città di Matera e da uno degli ingredienti principali delle ricette tradizionali, che è la mandorla.

Il libro cerca di sfatare un mito ricorrente nella vita degli esseri umani cioè quello che il consumo dei dolci deve essere bandito dalla dieta mediterranea. In realtà con l'aiuto del Principio di Pareto, si è dimostrato che i dolci si possono consumare se pur con parsimonia ed uno sgarro alla regola, porta comunque felicità e tranquillità nella vita di un essere umano. Leggendo attentamente alcune pubblicazioni della Prof.ssa Sandra Lucente dell'Università degli Studi di Bari, si è constatato che Matera ha la forma di un libro per bambini, un po' particolare: una forma frattale di Spugna di Megèr. Si è passato poi a studiare dal punto di vista matematico la forma geometrica della mandorla ed in chiave multidisciplinare le origini, la conformazione chimica degli alimenti contenenti grassi vegetali come la mandorla e l'utilizzo in pasticceria di questo fantastico "frutto" della nostra Italia Meridionale. Infine analizzando la facciata della Cattedrale di Matera, si è analizzato il significato geometrico ed artistico del rosone.

In conclusione si vuole sottolineare, che la realizzazione di tale lavoro è servita agli studenti quale spunto per affrontare con serenità la prova orale dell'esame di stato 2019, che ha previsto fra le sue novità, la discussione multidisciplinare a partire da uno spunto trovato in una busta estratta dal candidato.

Colgo l'occasione per ringraziare l'Isp. Francesco Sicolo, Presidente Mathesis della Città Metropolitana di Bari, per il continuo supporto fornitomi durante la realizzazione del lavoro e la Prof. Sandra Lucente, docente di Analisi Matematica presso l'Università A. Moro di Bari e divulgatrice scientifica, per essere stata per noi una musa ispiratrice e fonte inesauribile di spunti attraverso le sue pubblicazioni, gentilmente concessemi.

Qui di seguito il link dove è possibile visualizzare e consultare il lavoro: https: https://www.geogebra.org/m/h5tcbydk

Vi si allega anche il lavoro realizzato dalle allieve Roberta Di Benedetto (V B Pasticceria) e Illuzzi Mariagela (IV B Pasticceria), che è un simpatico e piacevole completamento del lavoro multimediale realizzato, un bel collage di foto sulla città di Matera e sulle sue tradizioni. (È possibile visualizzare tale lavoro al seguente link:
https://drive.google.com/file/d/115SG31RDf4XGq4HQrR9yYGmLkY4aWg0r/view?usp=drivesdk .

# Miss Marple e i tredici problemi (di matematica)

## *Miss Marple and the thirteen problems (of mathematics)*

***Domenico Bruno***

**Abstract**

*Vengono presentati tredici problemi di vario genere, cinque dei quali sono completamente risolti e gli altri otto proposti per la risoluzione ai lettori.*

*"Nil Sapientiae odiosius acumine nimio"*
Lucio Anneo Seneca (4 a.C. circa - 65 d.C.)

I 13 problemi (5 risolti e 8 proposti ai lettori) che sono raccolti in questo articolo, per la loro varietà e per le soluzioni prospettate, offrono tutti degli aspetti interessanti. Ci si chiederà cosa c'entri "la bella vecchietta alta e sottile, con i capelli candidi, le guance rosee e gli occhi azzurri dallo sguardo spesso malizioso, che risolve i casi più complicati di ricatto, furto, omicidio con la stessa apparante naturalezza con cui sferruzza a maglia, pota una siepe del suo giardino, sorseggia una buona tazza di tè".

Ebbene, Miss Jane Marple serve a ricordare che per risolvere un caso (o un problema) spesso non occorre dispiegare dei mezzi imponenti, né far uso di sottigliezze eccessive ("acumine nimio"): basta attenersi ai fatti (o ai dati), ricercando, anche con l'aiuto del buon senso, la soluzione più semplice che tenga conto di tutto.

Chiarito ciò, mettiamoci al lavoro e … buon divertimento!

Per i più curiosi: la citazione di Seneca è l'epigrafe di un racconto di Edgar Allan Poe, "La lettera rubata", che fa parte della trilogia di cui è protagonista il "ragionatore analitico" per eccellenza, il cavalier C. Auguste Dupin.

Problemi risolti

1. "Destinazione Polo".

"Un pilota vola 100 km verso sud, poi 100 km verso est, poi 100 km verso nord, e si ritrova esattamente al punto di partenza. Da dove era partito?"
La risposta classica a questo vecchio indovinello è: era partito dal Polo Nord.
Ma questo non è l'unico punto di partenza che soddisfa le condizioni date! E in realtà non esiste un solo punto, ma un'infinità di punti.
Supponiamo che il pilota parta da un punto qualsiasi sulla circonferenza che si trova a circa 116 km dal Polo Sud, cioè a Lat 88°57' S, nell'Antartide. Allora vola 100 km verso sud.
Ora quando viaggia 100 km verso est, avrà compiuto un giro completo intorno al polo . Dunque quando viaggia 100 km verso nord deve ritornare al punto di partenza.
Ma non è ancora tutto: il pilota può partire da un punto così vicino al Polo Sud da compiere, quando vola 100 km verso est, due giri intorno al polo. Questo introduce una nuova circonferenza, ogni punto della quale è una soluzione del problema originario. E così via: i punti di partenza che risolvono il problema giacciono su un insieme infinito di circonferenze, aventi tutte il centro al Polo Sud, e un raggio di , che si avvicina a 100 km (Lat 89°06' S) come limite.

2. "Il foro nella sfera"
È un problema incredibile, perché sembra che non ci siano dati sufficienti per trovare una soluzione.
"È stato praticato un foro cilindrico lungo 6 cm che passa proprio per il centro di una sfera solida. Qual è il volume rimanente della sfera?"
Senza ricorrere all'analisi matematica, il problema può essere risolto in questo modo. Chiamiamo R il raggio della sfera: il raggio del foro cilindrico sarà allora e l'altezza del segmento sferico a una base a ogni estremità del cilindro sarà .
Il volume della sfera sarà e quello del cilindro .
Il volume del segmento sferico a una base si ottiene con la formula seguente, in cui h è la sua altezza e R il raggio della sfera:

si ha così:

Il volume che rimane è dato dal volume della sfera meno il volume del cilindro e meno due volte il volume del segmento sferico a una base. Il risultato, dopo le semplificazioni, è:

.

Il volume rimanente della sfera è sempre uguale al volume di una sfera solida il cui diametro è uguale alla lunghezza del foro.

3. "I quattro gattini"
   "Due gatti siamesi si sono accoppiati ed ora aspettano quattro gattini: il sig. Gatto vorrebbe pronosticare quanti siano i maschi e quante le femmine".
   Egli fa questo ragionamento: è improbabile che siano tutti e quattro maschi o tutte femmine; poiché per ogni gattino ci sono 50 probabilità su 100 che sia o maschio o femmina, la cosa più probabile è che ci siano due maschi e due femmine.
   È corretto il ragionamento del sig. Gatto? Proviamo a verificare la sua teoria. Usando M per maschio e F per femmina, elenchiamo tutti i casi ugualmente possibili (disposizioni con ripetizione ):

MMMM MMMF MMFM MFMM
FMMM MMFF MFMF FMMF
MFFM FMFM FFMM MFFF
FMFF FFMF FFFM FFFF.

Solo in due dei casi tutti i gattini sono dello stesso sesso. La probabilità di questo evento è quindi pari a 2/16, ossia 1/8.

Controlliamo ora la distribuzione 2-2, quella che il sig. Gatto riteneva più probabile. Si presenta 6 volte, quindi la probabilità è 6/16, ossia 3/8.

Consideriamo infine la distribuzione 3-1: questa si presenta in 8 casi e la sua probabilità è 8/16, ossia ½. La previsione del sig. Gatto era sbagliata: la distribuzione più probabile non è 2-2, ma 3-1.

Nasce ora la curiosità di conoscere le probabilità delle diverse distribuzioni di sessi in famiglie di 5 e 6 figli. Invece di elencare tutti i casi ugualmente possibili (  nel primo caso e  nel secondo), calcoleremo le probabilità con la formula della distribuzione binomiale:

.

Per una famiglia di 5 figli, si ha:

e quindi la distribuzione più probabile è 3-2, con probabilità

Per una famiglia di 6 figli, si ha:

e la distribuzione più probabile è 4-2, con probabilità

Per una famiglia di 7 figli, la distribuzione più probabile è 4-3, con probabilità 35/64 = 54,6875%.

4. "Il numero di matricola della recluta"
"Il capitano domanda ad una recluta quale sia il suo numero di matricola; quello, per metterlo in difficoltà, risponde che il suo numero è uguale alla semisomma dei numeri formati con le disposizioni semplici delle sue tre cifre, due a due. Qual è il numero di matricola della recluta?"
Tale numero, essendo di tre cifre, sarà del tipo abc, ovvero:

I numeri formati con le disposizioni semplici delle sue tre cifre, due a due, sono 6 () e precisamente: ab, ba, ac, ca, bc, cb e la loro somma risulta:

Avremo quindi:

ovvero:

.

Siccome  è di due sole cifre, a non può essere che 1; avremo allora:

cioè:

da cui necessariamente  e , ed il numero cercato è 198.

5. "Il massimo profitto di un club sportivo"
"La direzione di un club sportivo prevede l'iscrizione di 60 soci, sempre che la quota per persona sia di 50 euro al mese. Ogni ulteriore aumento pari a 5 euro di questa tariffa, porterebbe 4 dei potenziali 60 membri a rinunciare alla propria adesione. Il costo sostenuto dal club per ogni socio è dell'ordine di 35 euro al mese. Quale quota mensile di iscrizione procurerebbe al club il massimo profitto e quale sarebbe in tal caso il numero dei soci?"
Conviene assumere come incognita x il numero degli aumenti della quota mensile d'iscrizione; la quota sarà perciò 50+5x e il numero dei soci residui 60-4x.
Il profitto y è dato dalla differenza fra il ricavo e il costo:

La funzione rappresenta una parabola il cui vertice è il punto e l'asse di simmetria è la retta, parallela all'asse delle y, di equazione
Se è a > 0, allora il vertice della parabola è il punto che ha minima ordinata, mentre se è a < 0, è il punto che ha massima ordinata.
Nel nostro caso y avrà un massimo per x = 6 aumenti. La quota mensile che procurerebbe il massimo profitto sarà perciò di 80 euro, il massimo profitto sarà di 1620 euro e il numero dei soci residui 36.

Problemi proposti

6. Antonio e Carlo sono seduti sul bordo di una piscina circolare, in due punti diametralmente opposti. La profondità dell'acqua è 1,80 m.
Quando Manuela sopraggiunge e si siede sul bordo, sia Antonio che Carlo nuotano in linea retta verso di lei. Dopo un percorso di 10m, Antonio ha già raggiunto Manuela, mentre Carlo dovrà ancora percorrere 14 m per raggiungerla.
Quanti litri d'acqua sono contenuti nella piscina?
955.672 litri

7. Una società è stata incaricata di coprire di moquette da parete a parete un corridoio anulare nel nuovo terminal di un aeroporto.
Sapendo che la lunghezza di una corda tangente alla parete interna è di 100 m, si calcoli la superficie dell'anello.
Si enunci poi una regola alternativa per calcolare l'area di una corona circolare.
7854

8. Un cono di legno di frassino (densità ), avente il diametro di base e l'altezza rispettivamente uguali a 8 cm e 30 cm, presenta, all'interno, una cavità. Sapendo che la massa del cono è m = 380 g, si calcoli il volume della cavità.
Se si sceglie a caso un punto all'interno del cono, qual è la probabilità che tale punto risulti esterno alla cavità?
39,24 92,19%

9. Un motociclista procede a velocità costante su di una strada statale. Poco dopo la partenza, incontra una pietra miliare con l'indicazione chilometrica scritta con due cifre. Un'ora più tardi, ne nota un'altra con le stesse due cifre, ma invertite, e, dopo un'altra ora, ne individua una terza con le due cifre iniziali, ma separate da uno zero. Quale è stata la velocità della moto?
45 km/h

10. Un oggetto caldo, avente una temperatura iniziale , collocato, al tempo t = 0, in un mezzo che si trova ad una temperatura più bassa , si raffredda secondo la "legge di Newton del raffreddamento"

dove T è la temperatura dell'oggetto al tempo t e k è una costante che dipende dal tipo di materiale con cui è realizzato. Si consideri una sfera di acciaio, portata ad una temperatura di 133°C e poi posta a raffreddare in una stanza in cui la temperatura dell'aria è di 22°C. Si calcoli la temperatura raggiunta dalla sfera dopo 20 minuti, sapendo che, dopo 10 minuti, era scesa a 108°C.

88,63 °C

11. Per le lenti sottili convergenti vale la formula di Newton dei punti coniugati:

dove f è la distanza focale,  è la distanza dell'oggetto dal fuoco,  è la distanza dell'immagine dal fuoco.
Si determinino le condizioni di minima distanza D tra oggetto e immagine.

12. "Le etichette scambiate"
Si abbiano tre scatole, una delle quali contiene due palline rosse, un'altra due palline azzurre e la terza una pallina rossa e una azzurra. Sulle scatole è stata messa un'etichetta corrispondente al contenuto (RR, AA e RA), ma qualcuno ha scambiato le etichette, perciò sulle scatole ora ci sono le etichette sbagliate. Si può estrarre una pallina alla volta da qualsiasi scatola, senza guardare all'interno, e in base a questo "campionamento" si deve essere in grado di stabilire i contenuti delle tre scatole. Qual è il numero minimo di estrazioni necessarie per dare una risposta certa?

13. "Le monete false"
Si hanno 10 pile di monete, tutte uguali fra loro, diciamo da 1 euro. Una pila intera è composta da monete false, ma non si sa quale. Si sa quanto pesi una moneta legale da 1 euro ( m = 7,5g ), e si è saputo anche che ogni moneta falsa pesa un grammo in più della moneta vera. Si possono pesare le monete con una bilancia a molla. Qual è il numero minimo di pesate necessarie per stabilire quale sia la pila di monete false?

## Bibliografia


[1] A. CHRISTIE, *Miss Marple e i tredici problemi*. Oscar Mondadori, Milano 1989

[2] M. GARDNER, *Ah! Ci sono! Paradossi stimolanti e divertenti*. R.B.A. Italia, Milano, 2008

[3] M. GARDNER, *Esperienza a-ah!* R.B.A. Italia, Milano, 2008

[4] M. GARDNER, *Come buttarsi dalla torre di Hanoi*. Hachette, Milano, 2017

[5] L. LOMBARDO RADICE - L. Mancini Proia, *Il metodo matematico. vol 1*. Principato, Milano, 1977

[6] J.B. MARION, *La fisica e l'universo fisico*. Zanichelli, Bologna, 1976

[7] M.A. MUNEM - J.D. FOULIS, *Algebra 2*. Zanichelli, Bologna, 1984.

# Le origini dell’Aritmetica moderna in Fibonacci. Quali indicazioni didattiche?

## *The origins of Arithmetic modern in Fibonacci. What didactic indications?*

***Franco Ghione***

*Tutti quelli (per quanto ho visto) che fin hora hanno dato regola al summar, sottrar & partir de rotti, la hanno data di sorte, che l’huomo presto la intende, & presto se la scorda, il che non procede da altro salvo che per ignorar la causa di tal sua regola, over di tal suo operare, volendo adunque rimediare a questo inconveniente, bisogna intendere il modo di ridurre duoi, over piu rotti de diverse denominationi, a una medesima denominatione, il qual atto è al contrario del schisare.*

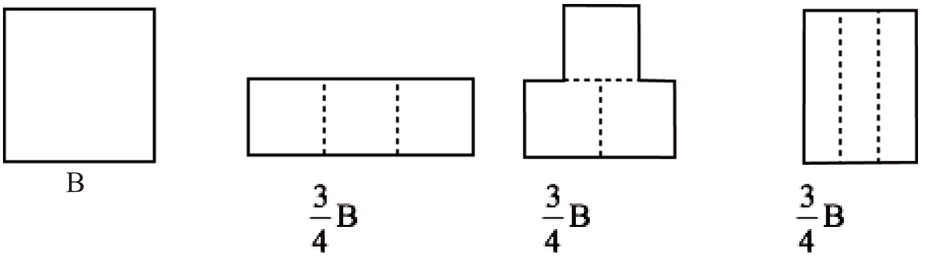
Tartaglia, General trattato. Prima Parte, Libro VII, c. 110v .

abstract

L’insegnamento del calcolo frazionario, che viene principalmente trattato nelle scuole secondarie di primo grado, presenta non poche difficoltà sia cognitive che didattiche legate ad una ancora acerba capacità di astrazione negli alunni di quelle scuole e a una difficoltà intrinseca di un argomento che resta spesso oscuro perfino negli studenti che si affacciano all’Università nelle facoltà scientifiche. Secondo Emma Castelnuovo[1] una delle difficoltà consiste nel fatto che già nella scrittura *m/n* vi sono tre cose da percepire contemporaneamente: l’intero, la parte *1/n* e la somma di *m* di quelle parti, concetti che, anche se presi singolarmente, sono tutt’altro che naturali. Una

[1] EMMA CASTELNUOVO, L’insegnamento delle frazioni, da La scuola secondaria e i suoi problemi (1952)

seconda difficoltà è legata alla relatività di una frazione che finisce per essere trattata riducendo il concetto di frazione a quello di operatore: tre quarti di un segmento, tre quarti di un quadrato, tre quarti di un cesto di 12 uova, ma cosa è 3/4 da solo, senza il segmento, il quadrato o il cesto? Lo stesso Euclide dice che una grandezza A è una frazione di B se A è formata da *m* parti ognuna uguale alla *n*-esima parte (aliquota) di B. La cosa è trattabile specificando con esempi concreti cosa sia B (un segmento, un quadrato, un cesto di uova) e come si possano costruire, ad esempio, i tre quarti di B. La cosa diventa problematica già nel caso delle aree, esistendo infiniti modi per dividere un'area B in quattro parti uguali e prenderne tre.




I diversi A che si ottengono hanno generalmente forme diverse ma tutte sono i tre quarti di B. In realtà ciò che si vuole esprimere non è la forma ottenuta ma la sua misura, quello che otteniamo è tre quarti della misura di B ed questo che esprime la frazione: non una forma ma un numero. È dunque il concetto astratto di numero da cui non si può prescindere; l'uno *matematico* come diceva Tartaglia, astratto, incorporeo, e non l'uno *naturale* come un quadrato, un centinaio, un cerchio, un cesto di uova. Ed è qui che già appare la prima difficoltà evidenziata dalla Castelnuovo: è impossibile concepire le frazioni senza una solida dimestichezza con il concetto astratto di numero intero, di uno. Le difficoltà aumentano quando si cerca di introdurre le operazioni aritmetiche con le frazioni che, per superare le naturali ostruzioni cognitive, vengono presentate come regole da imparare a memoria (*di sorte* dice Tartaglia) e da saper usare meccanicamente attraverso una lunga e noiosa serie di esercizi che dovrebbero alla fine sviluppare una sicura competenza nel calcolo. Questa pratica per sua natura coercitiva, come avviene nello studio di uno strumento musicale, può produrre dei buoni risultati in quegli allievi dotati di caratteristiche sempre più rare nei nostri studenti: pazienza, volontà, autodisciplina, amore per lo studio, ambiente familiare favorevole. L'esercizio ripetitivo può produrre alla fine quel "pensiero morto" come diceva F. Enriques[2], che procede in automatico senza più bisogno di "pensiero vivo" che può quindi sovrapporsi a quello a un livello più alto. Nella maggioranza dei casi

2 Federigo Enriques, *L'insegnamento dinamico*,

però, a prevalere, è invece un sempre più diffuso e progressivo analfabetismo scientifico che possiamo ben documentare negli esiti fallimentari delle prove di autovalutazione degli studenti che si iscrivono ai corsi di laurea scientifici. Ciò che uno impara a memoria senza un lungo e faticoso esercizio *presto se la scorda* e gli esiti didattici del lavoro dell'insegnante appaiono alla fine sconfortanti.

Una ulteriore difficoltà, riferibile al calcolo con le frazioni, è quella di giustificarne l'utilità: a cosa serve quella complicata teoria quando la divisione tra due interi si può calcolare con un numero arbitrario di cifre dopo la virgola ottenendo un valore approssimato quanto si vuole a quello esatto ma astratto, espresso dalla frazione? L'uso delle calcolatrici e dei computer spinge sempre più a ritenere il calcolo esatto un inutile strumento del passato e il sospetto è che esso possa, prima essere insegnato male per poi, alla fine, sparire dalla nostra cultura di base tornando a livelli pre-scientifici. È soprattutto questo progressivo imbarbarimento che vediamo all'orizzonte che vorremmo contrastare. Perché le frazioni non sono sempre esistite, gli antichi Babilonesi ad esempio riuscivano a calcolare il risultato di una divisione in modo molto preciso usando il calcolo sessagesimale. Ad esempio 2 settimi equivale a 17 primi (un sessantesimo dell'unità), 8 secondi (un sessantesimo di un primo), 34 terzi (un sessantesimo di un secondo) e la scrittura

$$\frac{2}{7} = 17'\ 8''\ 34'''$$

produce un valore che è più piccolo del valore esatto della frazione di solo 1/756000. Le somme tra frazioni si potevano eseguire sommando numeri interi: i primi con i primi, i secondi con i secondi, i terzi con i terzi ecc facendo attenzione ai riporti. Gli antichi romani usavano solo frazioni con denominatore 12 e potenze o frazioni di 12 per lo più riferite a sottomultipli di unità di misura. Per loro i settimi non esistevano perché nessuna unità di misura era suddivisa in 7 parti e dunque il loro uso era nella pratica inutile. Il rischio, che non ci sembra fuori luogo, è quello di riportare, nella nostra cultura condivisa, l'aritmetica al livello di quella dei Babilonesi o, peggio ancora, degli antichi romani!

Le frazioni e il relativo calcolo nascono tra gli scienziati arabi del medioevo e vengono importate nel mondo cristiano col *Liber abaci* di Fibonacci nel 1202. A partire da allora e con quella nuova aritmetica, l'economia, l'arte, la cultura ebbe uno sviluppo senza precedenti che portò a quell'epoca magica che abbiamo chiamato Rinascimento. Il *Liber abaci* è un'opera monumentale in latino che introduce in Europa la scrittura posizionale dei numeri usando le nove "figure" indiane, nuovi algoritmi di calcolo, vari tipi frazioni con le loro regole di calcolo, moltissimi problemi legati al commercio in tutti i suoi aspetti, dal baratto, alle società commerciali, alla natura delle monete e anche tantissime questioni "erratiche" generalmente riconducibili a equazioni di primo grado, storielle spesso divertenti, altre volte surreali. L'ultima parte è dedicata all'algebra seguendo la lezione araba di al-Khwarizmi e Abu Kamil. L'opera fu editata da Baldassarre Boncompagni[3] nel 1857 trascrivendo a stampa il manoscritto Conv. Soppr. C.1.2616 custodito a Firenze presso la Biblioteca Nazionale Centrale. La traduzione completa del testo di Boncompagni in italiano è in corso di realizzazione e viene via via pubblicata sul sito https://www.progettofibonacci.it/ all'interno di un progetto generale che ha l'obiettivo di portare nella scuola pubblica italiana alcune delle idee oggi fondative espresse in quel testo, allora ai primi passi, in un'ottica di collaborazione tra insegnanti di latino, matematica, informatica, storia e storia dell'arte. Il progetto ideato un anno fa insieme a Laura Catastini, che lavora alla traduzione del *Liber*, è già presente in alcune realtà scolastiche attraverso una pratica, in parte riportata nel sito, che nell'approccio storico suscita grande interesse tra gli allievi.

La sfida, che vogliamo lanciare con questo lavoro, consiste in una nova proposta didattica fondata sull'antico insegnamento di Fibonacci, che ha come obiettivo quello di non trascurare il perché delle regole, ma al contrario, sviluppare il pensiero dimostrativo anche in aritmetica riscoprendo tutta la bellezza e l'eleganza che il calcolo con le frazioni possiede.

La teoria euclidea dei rapporti: logos, analogos, alogos.

Prima di poter parlare di come le frazioni e la nuova aritmetica che esse generano entrino a far parte della cultura occidentale, occorre vedere, se pure a grandi linee, la teoria euclidea dei rapporti alla quale le nuove idee si ancorano e ne forniscono un fondamento teorico.

Il termine *logos* utilizzato da Euclide per indicare un rapporto in senso matematico è lo stesso usato in filosofia per denotare una forma di ragionamento razionale. Se A e B sono due grandezze il rapporto A: B sembra essere visto come un movimento di pensiero, una qualche costruzione rigorosa, quantitativa che lega A a B, che permette di dedurre B da A o, viceversa, A da B, come una qualunque altra forma di ragionamento. Il rapporto 3:2 non è il numero 1,5, ma l'abbreviazione della seguente argomentazione: se tra A e B esiste tale rapporto, allora A è rispetto a B come 3 è rispetto a 2, cioè B è 2 volte la terza parte di A o A è tre volte la metà di B. In generale l'espressione

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} = n : m$$

significa che A è formato sommando $n$ volte la $m$-esima parte di B esattamente come il numero $n$ che è formato sommando $n$ volte la $m$-esima parte di $m$ che vale 1. In questo caso Euclide dice che B è una *frazione* di A.

Il termine *analogos* (stesso rapporto) utilizzato da Euclide per indicare

[3] B. Boncompagni, *Liber abaci*,

l'uguaglianza tra due rapporti assume il significato più generale di analogia e produce un metodo potentissimo per trasferire sul terreno solido dei numeri, situazioni apparentemente lontane. Non è solo nella matematica che l'analogia prende forma, essa si estende, come modo di pensiero, alle diverse forme del giudizio, da quello morale a quello estetico. Troviamo ad esempio negli scritti di Eraclito:

*Di fronte al nume è infante l'uomo, come di fronte all'uomo il fanciullo.*

Anche in tempi recenti, nei test che misurano il quoziente d'intelligenza troviamo spesso proposti dei rapporti che dovrebbero permettere ad un pensiero colto di determinare il termine assente, il "quarto proporzionale". Troviamo ad esempio il seguente quesito:

*Il quadro sta al pittore come un vestito sta ...*

L'esercizio consiste nel cercare un concetto abbia rispetto al vestito lo stesso rapporto che ha il pittore col quadro. È sensato pensare che questo consista nel fatto che l'uno è l'artefice dell'altro e, in questo senso il sarto risolve il problema dal momento che è anch'egli l'artefice del vestito.

In quest'altro quesito di natura visiva

si chiede di trovare il modo con il quale la seconda figura a sinistra è ricavata dalla prima. Essa è ottenuta dalla prima attraverso un processo che scambia il bianco con il nero. La soluzione sarà allora un quadrato uguale a quello rappresentato nella terza figura dove la parte bianca è colorata di nero e la nera di bianco. Anche nel medioevo vi era un test di intelligenza molto diffuso: se 2 fosse 3 cosa sarebbe 10? L'analogia proposta 2: 10 = 3: ? il rapporto 2 :10 è analogo al rapporto 3: ? nel senso che se 2 fosse come 3 cosa sarebbe 10 ? essendo 10 cinque volte 2, se 2 fosse 3, 10 sarebbe 5 volte 3 cioè 15. L'esercizio mentale porta il pensiero a scoprire il rapporto che è la chiave dell'analogia. Se 6 fosse 8 cosa sarebbe 3?

La teoria dei rapporti da un punto di vista didattico è stata sviluppata nel testo di Laura Catastini, contenuto nel volume *Quale scuola ?*[4] dove tale idea è al centro di un laboratorio di Musica e Matematica.

Come si vede, si tratta di un concetto, quello di rapporto, molto profondo

[4] L. Catastini, *Tra parole, matematica e musica* , da Quale scuola ?, Carocci editore, 2015

che può essere pienamente concepito solo mettendosi alla prova in diverse situazioni eseguendo molti esercizi che assicurino all'allievo una sicura expertise che va sviluppata prima di introdurre astrattamente le frazioni. Vi sono, in ambito geometrico, due importanti problemi che lo studente dovrebbe essere in grado dominare con sicurezza. Il primo chiede di costruire un segmento B, incognito, conoscendo un segmento A e sapendo il rapporto tra i due segmenti. Ad esempio,

$$A: B = 3: 4$$

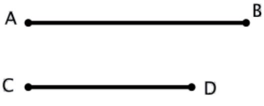
Nel caso specifico



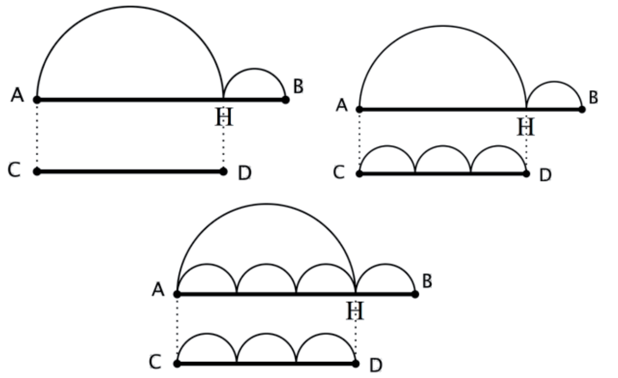
A è il segmento dato — dividiamo A in 3 parti uguali — B è formato da 4 di quelle parti

Esercizi di questo tipo sono molto formativi ed anzi sono necessari per capire come si costruisce uno strumento musicale (vedi il testo *Quale scuola* già citato).

Il secondo problema parte da due assegnate grandezze omogenee si chiede di trovare il loro rapporto. Il problema appare difficile, se non impossibile da risolvere se non fosse noto un metodo (quasi infallibile) inventato da Euclide noto come il *metodo delle divisioni successive*. Vediamo su un esempio come si possa trovare il rapporto tra due dati segmenti. Siano AB e CD i due segmenti noti




Prima di tutto si cerca quante volte CD (il segmento più piccolo) entra in AB. In generale CD non entrerà in AB un numero esatto di volte (col linguaggio di Euclide CD non sarà *parte* di AB) ma vi sarà un resto HB più piccolo di CD. A questo punto si vede quante volte HB entra in CD e si prosegue in questo modo trovando via via resti sempre più piccoli. Se il processo si ferma, cioè se il resto a un certo punto del processo si annulla allora tra i due segmenti esiste un rapporto. Nell'esempio preso in esame, il resto HB entra esattamente 3 volte in CD



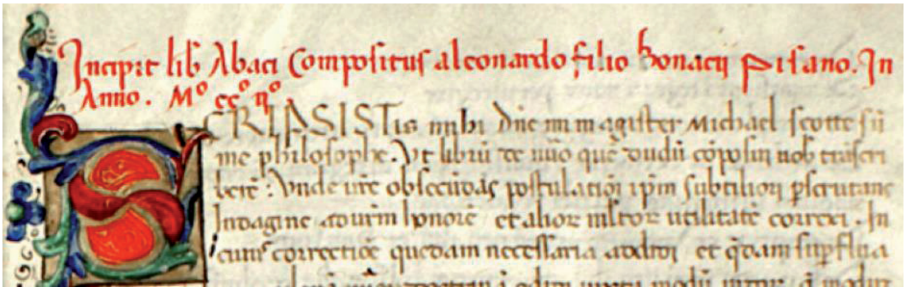

AB : CD = 4 : 3

Poiché i resti ad ogni passaggio diventano sempre più piccoli è lecito pensare, e così pensavano i pitagorici, che a un certo punto i resti non potessero diventare più piccoli di una monade, di un atomo e dovessero quindi annullarsi. Ciò è drammaticamente falso poiché è possibile dimostrare che vi sono casi nei quali tale processo non ha termine e, in tali casi, Euclide chiama i due segmenti *incommensurabili*. (Euclide[5], Elementi, libro X, def. I). Non è difficile dimostrare che il lato di un pentagono regolare e la sua diagonale sono incommensurabili: l'irrazionale, cioè l'assenza di un rapporto (*alogos* = senza rapporto), fece per la prima volta capolino nel pensiero scientifico. Ma questa è un'altra storia.

## La rivoluzione di Fibonacci: i numeri rotti

Nel *Liber abaci* (1202) Leonardo Pisano, detto Fibonacci, ripropone compiutamente in latino, e per la prima volta in occidente, l'aritmetica moderna elaborata tre secoli prima dagli arabi. Si tratta di una straordinaria rivoluzione che renderà possibile, in Italia e poi in tutto il mondo latino, commerci su grande scala, da oriente a occidente, alla base di una rinascita economica e culturale senza precedenti. La prima traduzione integrale del *Liber* è, come abbiamo detto, in corso di realizzazione all'interno di un progetto più ampio che si articola nel sito www.progettofibonacci.it, aperto alle scuole e a una possibile e auspicabile integrazione della lingua latina con la matematica.

[5] Euclide, Elementi



*Incipit Liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacii Pisano In anno Mº CCº IIº*
dal manoscritto del Liber abaci CS C1. 2616, BNCF

Cambia prima di tutto il modo di scrivere i numeri interi, che prima erano legati al sistema numerico romano, mentre ora vengono introdotte "le 9 figure indiane" per indicare le cifre, lo zero, e il sistema posizionale decimale.

Le 9 figure indiane dal manoscritto del Liber abaci CS C1. 2616, BNCF

La scrittura posizionale permette di elaborare nuovi algoritmi di calcolo basati su procedimenti ricorsivi che è possibile realizzare per iscritto sulla carta che rendono trasparenti e universalmente condivisi e verificabili i risultati ottenuti. In secondo luogo vengono introdotti nuovi oggetti - i *numeri rotti* - ampliando drasticamente non solo le potenzialità e la precisione dei calcoli, ma anche il significato ontologico del concetto di numero ora sganciato da quello di rapporto ma profondamente legato agli algoritmi aritmetici che vengono estesi dal vecchio insieme, quello dei numeri interi, a quello nuovo, mantenendo invariate le proprietà formali delle operazioni (associativa, commutativa, distributiva).

Dopo aver trattato le operazioni con gli interi e i nuovi algoritmi di calcolo per lo più uguali agli attuali, Fibonacci, all'inizio del libro V del *Liber*, introduce una nuova notazione per indicare le frazioni, un nuovo modo di scrivere, tanto efficace da non essere modificato in nulla nei secoli ed essere ancora oggi presente in ogni cultura scientifica del pianeta. Ecco come si parla di frazione, in senso moderno, probabilmente per la prima volta, nel mondo latino:

> *Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato (denominatus) e quello*

*superiore è chiamato denominante (denominans) Così se sopra al numero 2 sia stata tracciata una linea, e sopra di essa sia scritta l'unità, questa unità attesta una parte delle due parti dell'uno intero, cioè la metà così:* $\frac{1}{2}$ *; e se l'unità fosse stata posta sopra al numero 3 così:* $\frac{1}{3}$*.* *denota la terza [parte]; e se sopra al numero 7 così:* $\frac{1}{7}$ *la settima; e se sopra al 10, la decima, e se sopra al 19, intende una diciannovesima parte dell'uno intero, e così di seguito. Ancora se 2 è stato messo sopra il 3 così* $\frac{2}{3}$ *, intende due parti delle tre parti dell'uno intero, cioè due terzi.* ***(V.1.2)***

Come si vede l'accento è messo subito sul modo di scrivere questi nuovi numeri e sul loro significato. Il denominatore è il numero denominato, quello cioè che fissa il numero di parti uguali nelle quali è stata divisa l'unità, e il numeratore è quello denominante, cioè quello che denomina quante di quelle parti si debbano prendere, così 3 parti di 4, o 3 di 4, o $\frac{3}{4}$ è una espressione abbreviata per dire che si è "rotto" l'intero in 4 parti uguali e di queste parti se ne prendono tre.

In generale l'1 viene diviso in *n* parti uguali e ognuna di queste parti, oggi chiamata frazione unitaria, ha una sua specifica dignità, un suo essere, un suo nome, un suo valore, una sua carta d'identità e un suo particolare simbolo che la denota:

$$\frac{1}{n}\cdot$$

Ovviamente

$$\frac{1}{1}=1$$

non per convenzione o per definizione ma per ragionamento perché rompere l'unità in una sola parte significa non romperla. E anche

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{m} \quad \text{se} \quad n>m$$

non perché è scritto su un libro di testo, ma per ragionamento perché se si divide 1 in più parti uguali aumentando il numero di parti si ottengono parti più piccole.

Inoltre se sommiamo *n* volte una di queste parti ricostruiamo l'intera unità

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=1$$
(n volte)

Poiché la moltiplicazione di un intero $n$ per un numero $a$ si intende la somma ripetuta $n$ volte del numero $a$, la formula precedente viene scritta come moltiplicazione

$$n\times\frac{1}{n}=1$$

Se invece di $n$ parti ne prendiamo $m$ ($m < n$) abbiamo un numero che Fibonacci chiama, con una espressione molto significativa, rotto (*ruptus*), numero che oggi chiamiamo, con un termine tecnico, frazione propria. In generale una frazione $\frac{m}{n}$ sarà, per Fibonacci, il numero che si ottiene dividendo l'unità in $n$ parti uguali e sommando $m$ di quelle parti:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=m\times\frac{1}{n}$$
(m volte)

Se $m > n$ eseguendo la divisione con resto di $m$ per $n$ otteniamo:

$$m = q\times n + r \quad (0 \leq r < n)$$

poiché, sommando $n$ ennesimi si ottiene una unità, sommando $q$ volte $n$ ennesimi si ottengono $q$ unità e dunque

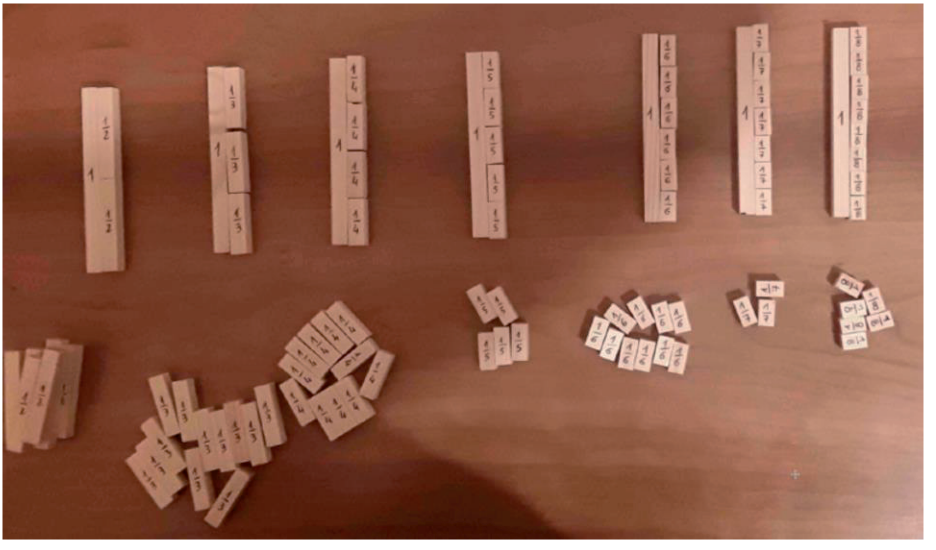
$$\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$$

dove la frazione rimasta, essendo minore di 1, e rappresenta un numero rotto. Tale scrittura da luogo a ciò che viene chiamato *numero misto* perché è formato da un intero e da un rotto e viene normalmente indicato con $q\,\frac{r}{n}$ sottintendendo il "più" e, per evitare confusione con il "per", pure generalmente sottinteso, il rotto viene scritto più piccolo. Questa è la stessa notazione che troviamo in Fibonacci, scritta alla araba, da destra a sinistra: $\frac{r}{n}\,q$.

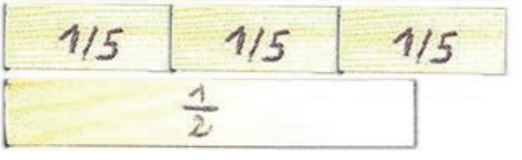

$1\frac{5}{8}$ esprime meglio di $\frac{13}{8}$ la distanza espressa dalla frazione

Pensiamo che la scrittura di una frazione nella forma mista attribuisca alla frazione una maggiore concretezza esplicitando la sua parte intera, che è quella che esprime il valore della frazione a meno di un numero minore di 1, a meno di un rotto, semplificando notevolmente il posizionamento delle frazioni sulla retta numerica. Non è un caso che nei paesi anglosassoni, più pragmatici i noi, la scrittura mista introdotta da Fibonacci continui a essere usata ed insegnata nelle scuole. I numeri misti formano un nuovo insieme numerico: l'insieme dei numeri razionali positivi oggi denotato generalmente col simbolo $Q^+$. In questo insieme, che contiene come casi particolari tutti i numeri interi (quando $r$=0), è possibile, come vedremo, trovare degli algoritmi per calcolare la somma e il prodotto di due qualsiasi numeri misti che, nel caso particolare i numeri siano interi, riproduce gli stessi risultati che si otterrebbero con i vecchi procedimenti. Tali algoritmi si ottengono mantengono invariate le proprietà aritmetiche di base, cioè la proprietà associativa, commutativa della somma e del prodotto e la proprietà distributiva, proprietà che permettono di ridurre l'aritmetica dei numeri misti a quella dei numeri rotti.

Per dare concretezza ai numeri rotti abbiamo pensato di rappresentare il *numero* 1 con un'asta unità e di dividere questo "uno" in 2,3,4 ... parti uguali ottenendo le aste $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ognuna delle quali con un preciso denominatore che le attribuisce la propria identità e grandezza. La professoressa Silvia Cerasaro ha realizzato questo materiale didattico che utilizza nella sua sperimentazione in classe e che ringrazio per avermi consentito di presentarlo in questo articolo.

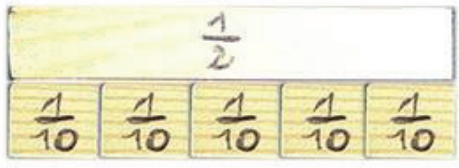


Una frazione sarà dunque una fila di aste dello stesso denominatore e la grandezza che tale frazione esprime è la lunghezza della fila. In questo senso la frazione *m/n* è maggiore della frazione *p/q* se la fila formata da *m* aste di denominatore *n* è più lunga della fila formata da *p* di aste di denominatore *q*.




3/5 è maggiore di 1/2 perché la rispettiva fila è più lunga

Ecco che nasce spontaneo un problema: come sapere se un rotto è maggiore di un altro senza formare le rispettive file per vedere quella più lunga? O ancora se 3/5 è maggiore di 1/2 come calcolare la loro differenza? Ciò che ci aiuta in questo e in molti altri problemi, è che, con i rotti, accade un fatto straordinario: vi sono infiniti modi di realizzare la stessa frazione! Vi sono infiniti modi di realizzare una fila di aste senza modificarne la lunghezza, senza cioè modificarle il valore.



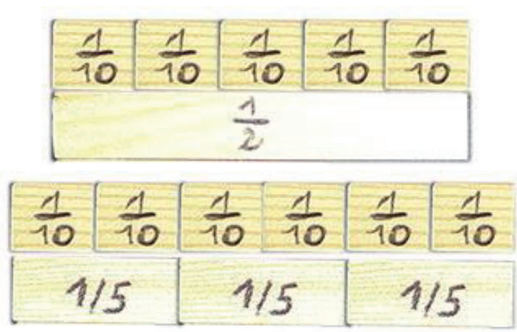


1/2 = 5/10 ma anche 1/5 = 2/10

Infatti se dividiamo l'ennesima parte di 1, cioè $1/n$, in ulteriori $q$ parti uguali, otteniamo in tutto $n \times q$ parti dell'uno e $q$ di queste parti faranno $1/n$. Questo pensiero si può esprimere con il linguaggio compatto ma efficacissimo della matematica nel modo seguente:

$$\frac{q}{n \times q} = \frac{1}{n}$$

Possiamo allora trasformare in decimi sia i mezzi che i quinti: 1/2 = 5/10 e 3/5= 6/10 e 6 decimi sono di più di 5 decimi.




In più la differenza fra questi rotti è 1/10. L'immagine e la manipolazione con le mani delle aste frazionarie non da solo concretezza a questa nuova tipologia di numeri ma ne fissa nella memoria gli aspetti essenziali: composizione, decomposizione, assembramento e confronto.
In generale dati due rotti con denominatori diversi è sempre possibile, e in più modi, esprimere le due frazioni con un unico denominatore. I terzi e i quarti, ad esempio, possono essere ridotti a dodicesimi perché 1/3 = 4/12 e 1/4 = 3/12, ed è facile intuire la regola generale: i due rotti $1/n$ e $1/q$ si possono sempre ridurre allo stesso denominatore $n \times q$

$$\frac{1}{n} = \frac{q}{n \times q} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{n}{n \times q}$$

Non è questo l'unico modo per ridurre due rotti allo stesso denominatore, basta infatti trovare un multiplo sia di $n$ che di $q$ e ridurre le due frazioni a questo denominatore, infatti se $s$ è un multiplo di $n$ (cioè se $s = n \times n'$) ed è anche un multiplo di $q$ (cioè $s=q \times q'$) allora

$$\frac{1}{n}=\frac{n'}{n\times n'}=\frac{n'}{s} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q}=\frac{q'}{q\times q'}=\frac{q'}{s}$$

Ovviamente se prendiamo il più piccolo multiplo comune cioè il m.c.m. di $n$ e $q$ facciamo meno fatica perché le moltiplicazioni che dobbiamo eseguire coinvolgono numeri più piccoli. Ma la scelta è libera! Come abbiamo fatto la differenza tra due rotti così possiamo fare la somma e gli studenti intuiscono facilmente il modo. Non una formula che risolve il problema tutto in una volta ma un procedimento fatto di due passi: prima riduciamo le due frazioni allo stesso denominatore, nel modo che più ci piace e poi sommiamo i numeratori. I due passi debbono essere, per lo meno all'inizio, esplicitati. Tornando all'esempio precedente

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\frac{11}{10}=1\,\frac{1}{10}$$

Fibonacci consiglia di studiare una tavola con la somma di tutte le possibili coppie di rotti che è possibile fare con numeri formati da una sola "figura" cioè minori di 10. Potrebbe essere una buona pratica dividere questo compito tra più studenti con l'obiettivo di realizzare un grande manifesto da appendere in aula nel quale tutte le possibili somme sono riportate. Tutte le possibili somme sono moltissime ma ogni studente potrebbe farne una cinquantina a casa per poi riunire tutto in una grande tabella. L'esercizio ripetitivo è indispensabile per impadronirsi con sicurezza di un metodo di calcolo e la somma di frazioni è l'operazione dove generalmente si sbaglia più di frequente. Il progetto di realizzare questo tabellone potrebbe essere per gli studenti uno stimolo per impegnarsi in un lungo lavoro noioso e ripetitivo.

La somma e la differenza tra numeri misti viene ora da sé: basterà sommare i rotti e le parti intere e poi mettere tutto insieme

$$3\,\frac{3}{4}+11\,\frac{3}{5}=14+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}=14+\frac{15}{20}+\frac{12}{20}=14+\frac{27}{20}=14+1\,\frac{7}{20}=15\,\frac{7}{20}$$

Un esercizio di questo tipo, che richiede diversi passaggi da eseguire ordinatamente, e che alla fine produce il risultato di una somma, ci sembra più formativo di lunghe e inespressive espressioni. Una ulteriore osservazione didatticamente utile è che non esiste un solo modo per eseguire la somma: si potrebbe infatti ridurre i due numeri a frazioni e poi sommare queste:

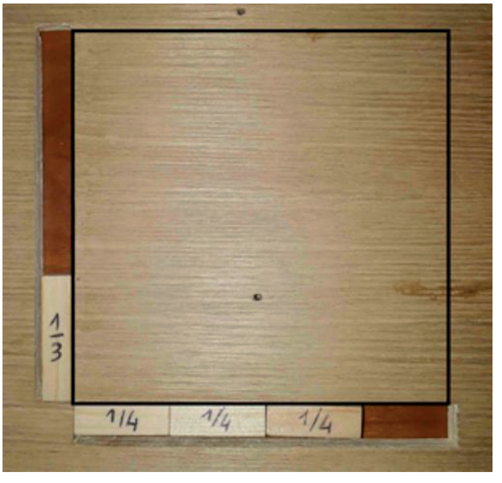
$$3\frac{3}{4} + 11\frac{3}{5} = \frac{15}{4} + \frac{58}{5} = \frac{75}{20} + \frac{232}{20} = \frac{307}{20} = 15\frac{7}{20}$$

La somma tra frazioni, più di una regola da usare meccanicamente, diventa un procedimento all'interno del quale vi sono libere scelte da fare. Man mano che questo procedimento si sia impresso nella memoria con l'esercizio e la manipolazione iniziale di materiale concreto, esso potrà diventare pensiero morto sul quale sarà possibile costruire un nuovo pensiero più complesso, come avviene quando, dopo aver imparato ad usare la bicicletta, il nostro pensiero non più bisognoso di concentrarsi su come non cadere o voltare o frenare ma, pedalando senza accorgersene, potrà rivolgersi ad ogni altro interesse.

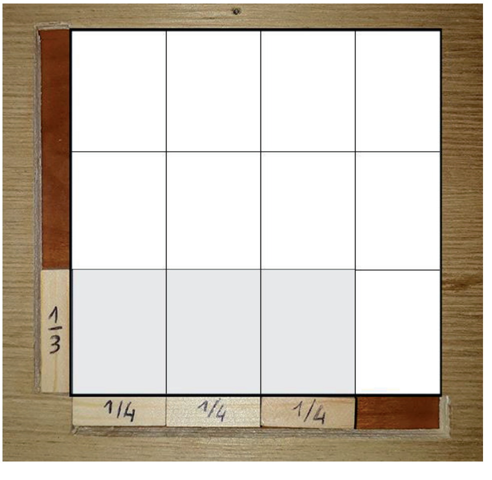
## I nuovi significati di moltiplicare e dividere

> *Maravigliati del atto di multiplicar di rotti, perche in quello sempre si vede riuscire al contrario di quello che dinota tal vocabulo, qual non dinota altro che crescere, overo augumentare, & nel detto multiplicare de rotti sempre seguita (come è detto) tutto al contrario, cioe che il produtto è sempre menore di qual si voglia di duoi precedenti...*
> ***Tartaglia,*** General trattato (Parte Prima, Libro VII, c. 119)

La moltiplicazione di due rotti perde il significato di somma ripetuta: che significato ha sommare mezza volta un numero? O sommare una volta e due terzi una quantità data? Un modo non formale per capire come si debba introdurre il prodotto tra numeri rotti può essere quello di servirsi della geometria. Introducendo una unità di misura U per i segmenti, possiamo associare a biunivocamente a un segmento un numero (la sua misura) e a un numero un segmento. In questo modo la somma tra numeri diventa la congiunzione in linea retta dei corrispondenti segmenti e la moltiplicazione l'area del rettangolo che ha come lati i segmenti corrispondenti ai due numeri. Tale area è calcolata usando come unità di misura per le aree il quadrato di lato U. Possiamo usare la stessa idea per trovare il prodotto di due numeri rotti: costruiamo un rettangolo R i cui lati siano due segmenti le cui misure rispetto ad U siamo i due rotti da moltiplicare, calcoliamo poi il rapporto tra tale area e quella del quadrato di lato U, tale rapporto essendo la misura dell'area del rettangolo R, dovrà corrispondere al prodotto dei due numeri. Per fare questa costruzione ci avvaliamo di un nuovo semplice strumento materiale realizzato dalla professoressa Silvia Cerasaro da utilizzare insieme alle aste che abbiamo utilizzato per introdurre le frazioni. Si tratta di un quadrato di lato uguale all'asta di lunghezza 1 disegnato su una tavola di legno e di due incavi sui due lati del quadrato che possano contenere le aste frazionarie in modo che, una volta posizionate, si trovino allo stesso livello della tavola.




Posizionando un foglio bianco sulla tavola di legno possiamo disegnare con una squadra dei segmenti capaci di suddividere il quadrato unitario in parti uguali utili per calcolare l'area che cerchiamo



In questo esempio il quadrato è diviso in 12 rettangoli uguali e l'area, in grigio, che vogliamo calcolare è formata da 3 di tali rettangoli: in definitiva

$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

La semplificazione finale non ci stupisce per il fatto che il quadrato è formato anche con 4 terne di rettangoli uguali: tre orizzontali e una verticale sulla destra e dunque l'area è 1/4 di tutto il quadrato. Stupisce invece che il risultato del prodotto è più piccolo dei due fattori che si moltiplicano:

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3} \quad \text{e anche} \quad \frac{1}{4}<\frac{3}{4}$$

Facendo varie esperienze con questo strumento gli studenti possono scoprire, gradualmente, le seguenti proprietà sul prodotto tra rotti che noi possiamo scrivere formalmente come

$$\frac{1}{n}\times\frac{1}{q}=\frac{1}{n\times q},$$

$$\frac{m}{n}\times\frac{1}{q}=\left(m\times\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{q}=m\times\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{q}\right)=m\times\frac{1}{n\times q}=\frac{m}{n\times q}$$

$$\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}=\left(m\times\frac{1}{n}\right)\times\left(p\times\frac{1}{q}\right)=(m\times p)\times\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{q}\right)=(m\times p)\times\frac{1}{n\times q}=\frac{m\times p}{n\times q}$$

La regola finale, se scoperta, dagli studenti stessi più facilmente si imprimerà stabilmente nella loro memoria.

Come per la somma, il prodotto di due numeri misti si può fare in due modi: distribuendo i fattori o trasformando i numeri misti in frazioni e utilizzando poi la regola generale.

Il primo modo, che è certamente più lungo, permette però di anticipare delle procedure tipiche dell'algebra come il prodotto di binomi o il quadrato di un binomio, abituando gli allievi all'uso della proprietà distributiva che permette di dividere un problema complicato in tanti piccoli problemi più semplici:

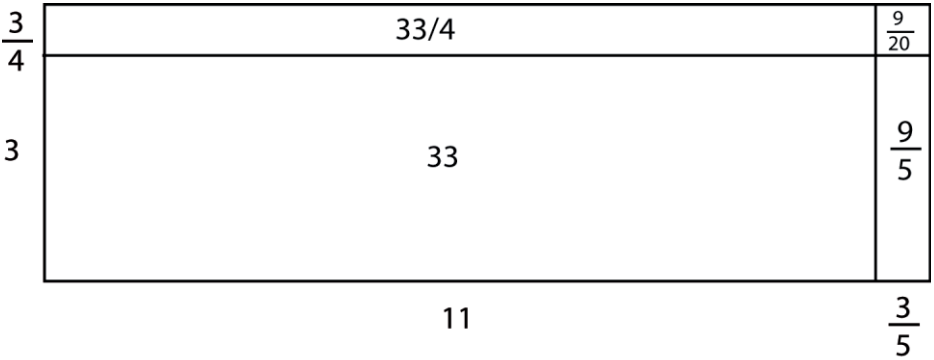
$$3\tfrac{3}{4} \times 11\tfrac{3}{5} =$$

$$\left(3+\frac{3}{4}\right)\times\left(11+\frac{3}{5}\right)=3\times 11+3\times\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\times 11+\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=33+\frac{9}{5}+\frac{33}{4}+\frac{9}{20}=$$

$$=$$

$$33+1+\frac{4}{5}+8+\frac{1}{4}+\frac{9}{20}=42+\frac{16}{20}+\frac{5}{20}+\frac{9}{20}=42+\frac{30}{20}=43\,\frac{1}{2}$$

Anche in questo caso un modello geometrico aiuta a passare dal registro del calcolo a quello dell'immagine sicuramente molto formativo




La figura evidenzia i 4 rettangoli nei quali è decomposto il rettangolo iniziale del quale si deve calcolare l'area: le aree dei 4 rettangoli si calcolano immediatamente con calcoli semplici così il problema iniziale è diviso in 4 moltiplicazioni più semplici che vanno poi sommate.

Il secondo modo per eseguire il prodotto tra due numeri misti, come abbiamo detto, consiste ne trasformare i numeri in frazioni e usando poi la regola generale: Vi saranno meno calcoli da fare ma con numeri più grandi:

$$3\,\frac{3}{4}\times 11\,\frac{3}{5}=\frac{15}{4}\times\frac{58}{5}=\frac{15\times 58}{20}=\frac{870}{20}=42\,\frac{1}{2}$$

Ovviamente vi sono scorciatoie, calcoli che si possono evitare, *evitazioni* dirà Fibonacci, che gli studenti si possono divertire a trovare, magari in forma di gara premiando chi le trova prima.

Ora che sappiamo come moltiplicare due frazioni, ci chiediamo che significato concreto, indipendente dall'interpretazione geometrica, abbia il moltiplicare due tali numeri? Intanto il prodotto di un intero $m$ per un numero rotto o misto $a$ si interpreta ancora come la somma ripetuta $m$ volte

$$m \times a = a + a + \ldots + a$$
(m volte)

Mentre $\frac{1}{n}\times a$ si interpreta come la *ennesima parte* ***di*** *a*. Questo osservazione deriva dal fatto che, quando $a=\frac{p}{q}$ allora $\frac{1}{n}\times\frac{p}{q}$ è, come abbiamo visto, la ennesima parte di $\frac{p}{q}$ e, più in generale, $\frac{m}{n}\times a=\left(m\times\frac{1}{n}\right)\times a=m\times\left(\frac{1}{n}\times a\right)$ si interpreta come *m volte la ennesima parte* ***di*** *a*. Il risultato mischia in maniera imprevista il moltiplicare e il dividere:

*moltiplicare un numero per* $\frac{1}{n}$ *significa dividere quel numero per n!*

Vediamo ora più da vicino l'operazione di divisione: se abbiamo due interi *m* ed *n* possiamo eseguire la divisione con resto di *m* per *n* e scoprire quante volte *n* entra dento *m* e cosa resta, il massimo numero di volte è il quoziente *q* della divisione e usando i numeri rotti possiamo scrivere il risultato della divisione *m/n* come

$$\frac{m}{n}=q\frac{r}{n}$$

questo è il valore ESATTO di ciò che si ottiene dividendo *m* in *n* parti uguali nel senso che

$$n\times(q\frac{r}{n})=m$$

ciò significa che se ripetiamo *n* volte la stessa quantità $q\frac{r}{n}$ otteniamo esattamente il numero che volevamo dividere, esattamente cioè senza resti. Questo stesso significato è quello che serve a Fibonacci per dividere due numeri qualsiasi anche se non sono interi. Dividere un numero *a* per un numero *b* non nullo significa trovare un numero *x* tale che:

$$b\times x=a$$

il risultato *x* della divisione si indica ancora, per uniformità col caso in cui i numeri sono interi, col segno di frazione

$$x=\frac{a}{b}$$

Fibonacci recupera consapevolmente il significato formale dell'operazione di divisione come l'operazione inversa alla moltiplicazione:

> *Ed è da notare in verità che quando un numero è diviso per un altro numero, allora dalla moltiplicazione del divisore per il risultato ne viene il numero diviso. Per esempio se si divide 40 per 4, risulta 10. Per cui se moltiplichiamo 4 per 10, si ha quaranta, vale a dire il numero diviso.* ***(V.9)***

ma ora questa divisione è possibile anche nel nuovo insieme numerico e Fibonacci sente l'esigenza di introdurre dei nomi per gli oggetti in questione

> E sia da notare che il numero che è diviso si chiama diviso o dividendo *(divisus vel dividendus),* e il numero che divide si chiama dividente o divisore *(dividens vel divisor)* e il numero che risulta dalla divisione si chiama procedente o uscente *(procedens vel exiens).* (V.10)

Ma come si calcola questo numero *uscente* se $a$ e $b$ non sono interi?

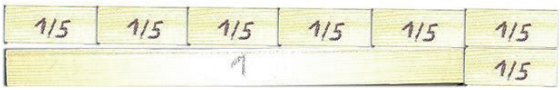
L'operazione è trattata da Fibonacci nel capitolo VII del *Liber abaci* con grande attenzione didattica partendo da esempi semplici che diventano via via più complessi. È interessante notare che Fibonacci non propone di seguire la via più semplice che consiste nell'applicare meccanicamente una formula generale ma si propone di motivare il procedimento facendo riferimento alla natura dei numeri che si vogliono dividere e al significato della divisione. Ogni numero, intero rotto o misto, si può pensare come una somma di tante *minuzie tra loro simiglianti*, come dirà Tartaglia, cioè di tante frazioni unitarie con lo stesso denominatore, come abbiamo fatto per sommare o sottrarre due numeri. Il risultato della divisione si ottiene, come è intuitivo capire, dividendo tra loro questi numeratori.

Supponiamo ad esempio di voler dividere 2 con $1\frac{1}{5}$, dobbiamo trovare quindi un numero $x$ tale che

$$\left(1\frac{1}{5}\right) \times x = 2$$

Rappresentiamo i due numeri con le nostre aste:


Poiché nei due numeri compare il denominatore 5, scriviamo i due numeri come somma di quinti


basterà ora dividere $\frac{10}{5}$ con $\frac{6}{5}$ e questo farà tanto quanto dividere 10 con 6. Il risultato è $1\frac{4}{6}$ cioè, semplificando il rotto, $1\frac{2}{3}$.

$$\frac{2}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{10}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{10}{6}=1+\frac{4}{6}=1\frac{2}{3}$$

Per verificare se il risultato è corretto basta vedere se $1\frac{1}{5}\times 1\frac{2}{3}$ fa 2. Eseguendo la moltiplicazione troviamo effettivamente $\frac{6}{5}\times\frac{5}{3}=2$. Ma ora il significato della divisione è quello originario cioè abbiamo diviso, con resto, invece che 10 interi per 6 interi, 10 quinti con 6 quinti.

Fibonacci fa questo esempio:

> ***(VII.3.2)*** *Se vorrai dividere 83 per* $\frac{2}{3}\,5$ *, fai i terzi di ciascun numero in questo modo: moltiplicherai 5 per il tre che è sotto la linea, e somma 2, farà 17 terzi: e moltiplica 83 per 3 per farne i terzi da esso, farà 249 terzi: dividi quindi 249 per 17, farà* $\frac{11}{17}\,14$ *per la divisione richiesta.*

Ma poi giustifica il suo calcolo citando la teoria delle proporzioni di Euclide

> Da ciò quindi è manifesto che la divisione di 83 per $\frac{2}{3}\,5$ è uguale a quella di 249 per 17; e questo è per ciò che dichiara Euclide, peritissimo geometra, nel suo libro: cioè che la proporzione che un qualunque numero ha con un qualunque numero è la stessa che c'è tra i loro multipli; e come

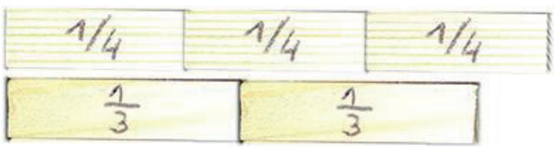
17 è multiplo di $\frac{2}{3}$ 5 , tanto 249 lo è di 83: infatti 17 è il triplo di $\frac{2}{3}$ 5 , e 249 è il triplo di 83.

Ritorna la regola fondamentale delle frazioni anche nel contesto dei nuovi numeri rotti o misti, e cioè: *se si moltiplica numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero, la frazione non cambia*:

$$\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$$

Molto importante è capire il significato della la divisione di un numero con un una frazione unitaria.

Ad esempio: quante volte 1/3 entra in 3/4? e quanto resta? Se usiamo il nostro materiale ci accorgiamo che 1/3 entra 2 volte con un certo resto minore di 1/3.




per valutare il resto possiamo eseguire la sottrazione passando a dodicesimi


$$\frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 4}$$

In generale, proprio come nel caso dei numeri interi, dato un qualsiasi rotto $a = m/n$ e una frazione unitaria $1/q$ possiamo calcolare il massimo numero $s$ di $q$-esimi contenuti in $a$ e il resto $t$ minore di $1/q$. In termini più precisi, esiste un intero $s$, eventualmente nullo, e un resto $t$ tale che

$$\frac{m}{n} = s \times \frac{1}{q} + t \quad \text{con} \quad 0 \leq t < \frac{1}{q}$$

per calcolare i due numeri $s$ ed $t$ possiamo sempre usare l'algoritmo delle differenze successive e cioè sottrarre $1/q$ da $a$ fino a quando il resto è maggiore di $1/q$ , e contare il numero $s$ di volte per il quale questo è possibile, come abbiamo fatto con le nostre aste, ma possiamo anche eseguire direttamente la divisione

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{q}} = \frac{m \times q}{n} = s + \frac{r}{n}$$

con $0 \leq r < n$ e $0 \leq s < q$

e quindi

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} \times \left( s + \frac{r}{n} \right) = \frac{s}{q} + \frac{r}{q \times n}$$

questa relazione ci dice che il la frazione *m/n* è formata da *s* *q*-esimi e un resto *t* minore di *1/q*. Vediamo ad esempio quanti decimi sono contenuti in 2/7. Per fare questo senza usare le aste dividiamo 2/7 per 1/10 il che ci porta a dividere 20 per 7: otteniamo 2 con un resto di 6/7 dunque

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{10} \times \left( 2 + \frac{6}{7} \right) = \frac{2}{10} + \frac{6}{10 \times 7}.$$

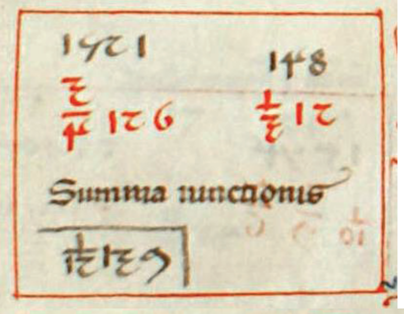
Trovare il numero di decimi contenuti nella frazione 2/7 significa trovare la sua prima cifra decimale, e iterando il procedimento, cioè trovando il numero di decimi contenuti nella frazione 6/7, troviamo la seconda cifra decimale della frazione 2/7, cioè il numero di centesimi nel suo sviluppo decimale:

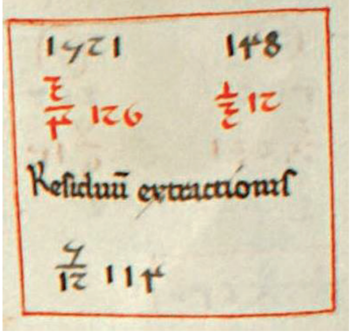
$$\frac{6}{7} = \frac{1}{10} \times \left( 8 + \frac{4}{7} \right) = \frac{8}{10} + \frac{4}{10 \times 7}$$ e quindi $$\frac{2}{7} = \frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{4}{100 \times 7}$$ cioè

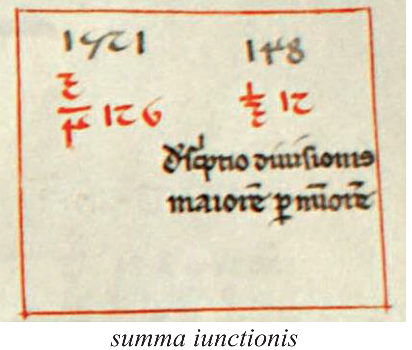
$$\frac{2}{7} = 0,28\ldots.$$

Fibonacci ha una notazione efficacissima per indicare questo tipo di decomposizioni frazionarie che lui chiama frazione multipla graduata e sviluppa una aritmetica completa per eseguire i calcoli con tali frazioni generalizzate che potrebbe essere oggetto di un approfondimento nell'ultimo anno delle suole di primo grado o nel primo anno di quelle di secondo grado.

In definitiva le operazioni di somma, differenza e divisione tra i nuovi numeri introdotti da Fibonacci, si riducono alle analoghe operazioni tra numeri interi (i numeratori) riducendo i due numeri sui quali si opera a delle frazioni con lo stesso denominatore e trasferendo le rispettive operazioni ai numeratori. Facciamo tre esempi attingendo dal manoscritto del *Liber abaci* più sopra citato




*summa iunctionis* *residuum extractionis* *descriptio divisionis maiorem per minorem*

Nel primo riquadro si esegue la somma 126 ¾ + 12 ⅓ = (1521+148)/12 = 1669/12 = 139 1/12,

nel secondo riquadro la sottrazione degli stessi numeri 126 ¾ - 12 ⅓ = (1521-148)/12 = 1373/12 = 114 5/12 mentre nella terza tabella si annuncia la divisione del numero maggiore per il minore che non viene eseguita e che eseguiamo noi per completezza:

$$\frac{126+\frac{3}{4}}{12+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1521}{12}}{\frac{148}{12}}=\frac{1521}{148}=10\,\frac{41}{148}$$

Viva le frazioni

*A ciò che nisuno sia ingannato*

Per capire la rivoluzione che il calcolo con le frazioni ha prodotto nel mondo latino, nella sua economia e organizzazione civile, con l'uscita del *Liber abaci* proviamo a metterci nei panni di un mercante pisano del '200. A quell'epoca i commerci erano per la maggior parte basati sul baratto: si scambiava una merce di un certo tipo con un'altra il cui valore in denari era noto ai due mercanti e generalmente condiviso. Il capitolo IX del *Liber abaci* contiene una intera sezione dedicata alla pratica del baratto. Leggiamo un problema nel quale due mercanti vogliono barattare del cotone misurato in rotuli (un rotulo è una unità di peso uguale a circa mezzo chilo) con del panno misurato a braccia (1 braccio è poco più di mezzo metro). Queste misure erano molto precise e garantite da concrete unità di misura (recipienti per i liquidi, aste o canne per le lunghezze, bilance per i pesi ecc) custoditi da notai e dai consoli della mercatura. L'inconveniente, non da poco, era che ogni amministrazione aveva le sue unità di misura e le sue monete. Ma, nel nostro problema i due mercanti sono entrambi pisani e quindi con le stesse monete e le stesse unità di misura.

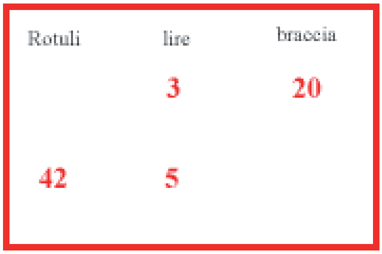
Il mercante di tessuti vuole barattare 50 braccia di panno con del cotone e la quantificazione matematica si rende necessaria per evitare inganni o furberie e garantire giustizia, come dice Piero della Francesca nel suo trattato d'abaco[6], *a ciò che niuno sia ingannato*. Per raggiungere questo obiettivo occorre sapere il prezzo sul mercato del cotone e del panno.

> (IX.1.2) 20 braccia di panno valgano 3 lire di pisanini; e 42 rotuli di cotone valgano 5 lire similmente di pisanini

Fibonacci indica un modo grafico, visivo, per sintetizzare i dati del problema che sarà lo stesso in tutti i problemi di baratto analoghi:

> *Poni le 20 braccia sulla tavola e alla loro sinistra scrivi le 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto poni le 5 lire; a sinistra di queste poni i 42 rotuli*

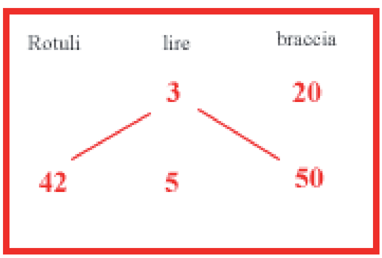
[6] Piero della Francesca.




Poiché il valore di una merce è proporzionale alla sua quantità, un braccio di panno vale lire $\frac{3}{20}$ e quindi 50 braccia di panno valgono lire $\frac{3\times 50}{20}=7\frac{1}{2}$.

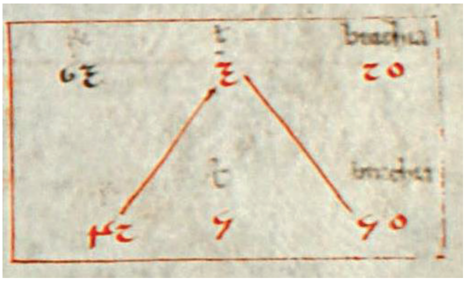
Inoltre, con una lira si comprano rotuli $\frac{42}{5}=8\frac{2}{5}$. Il baratto è onesto se le merci che vengono barattate hanno lo stesso valore cioè se in cambio di 50 braccia di panno (che valgono 7 lire e mezzo) si ricevono $8\frac{2}{5}\times 7\frac{1}{2}=\frac{42}{5}\times\frac{3\times 50}{20}=63$ rotuli di cotone.

Fibonacci indica ora non solo un metodo grafico per scrivere i dati del problema, ma anche un modo semplice per memorizzare il tipo di calcolo da fare per risolvere il problema:




Se si vogliono scambiare 50 braccia di panno si scrive 50 sotto il 20 nella colonna del panno e si tracciano le righe diagonali. La giusta quantità di cotone, che corrisponde a 50 braccia di panno, si ottiene moltiplicando i numeri uniti dalle diagonali cioè $50\times3\times42 = 6300$ e dividendo il risultato per gli altri numeri cioè $20\times5 = 100$. Il risultato è 63 rotuli.

Ecco come nel citato manoscritto è riportata la tavola:



La tavola non solo rappresenta un modo visivo per registrare i dati del problema ma fornisce anche, attraverso le due diagonali, la regola, il metodo da seguire per risolvere il problema in ogni caso analogo, regola che era stata dimostrata nel primo esempio preso in considerazione. L'uso di queste tavole, da riempire nel modo detto con i numeri che intervengono nello specifico problema, e la pratica del calcolo con i rotti, consentiva al mercante di muoversi con rapidità contribuendo a sviluppare un nuovo modello economico basato su regole condivise che trovano nella matematica un semplice criterio di equità e giustizia al di sopra delle opinioni.

Insieme al commercio su grande scala e proprio per renderlo possibile nascono anche le prime società di consoci, le prime banche, le società di assicurazioni impensabili senza una matematica in grado di registrare per iscritto e governare un immenso movimento di merci e di numeri sani o rotti in tutto il mediterraneo. Un intero capitolo del *Liber abaci*, il capitolo X, riguarda come si debbano distribuire gli utili ottenuti da una cooperativa di soci. Prendiamo un problema di questo tipo anticipato nel terzo paragrafo del capitolo VIII.

> (VIII.3.19) Poniamo il caso di qualcuno, che abbia avuto un capitale di 152 lire, con il quale ci fu un profitto di 56 lire; e si chiede quanto di questo profitto, per lira, si debba rendere a ciascuno dei suoi soci. Innanzitutto, secondo la consuetudine pisana, dal suddetto profitto dobbiamo sottrarne la quarta parte, essendo questa la parte di chi se ne occupava, restano 42 lire.

Fibonacci suppone che il profitto sia proporzionale all'investimento e quindi, se con 152 lire di investimento si è ottenuto un profitto di 42 lire, il profitto prodotto da una lira diventa lire $\frac{42}{152}=\frac{21}{76}$ e quindi il socio che ha partecipato alla cooperativa con *a* lire deve ricevere un guadagno di lire $a\times\frac{21}{76}$. Il problema è molto semplice ma si tratta di saper fare con molta cura i conti *a ciò che nisuno sia ingannato*. Si tratta di dividere la lira in 76 parti e prenderne 21. In realtà nel '200 un ventesimo di una lira era un soldo e un dodicesimo di un soldo era un denaro. Moneta di minor valore non era prevista. Dobbiamo allora calcolare quanti soldi e quanti denari si ricevono in cambio di una lira di investimento. Poiché $a$ lire corrispondono a $20\times a$ soldi. Il profitto sarà soldi $\frac{420}{76}=5\,\frac{10}{19}$. Si tratta ora di vedere quanti denari corrispondano a soldi $\frac{10}{19}$.

Poiché un soldo è 12

denari, abbiamo denari $\frac{120}{19}=6\,\frac{6}{19}$. Dunque il profitto per una lira di investimenti è 5 soldi 6 denari e circa un terzo di denaro quantità non monetizzabile e quindi non rimborsata all'investitore. È chiaro che la perdita per il singolo è insignificante, ma per la banca che gestisce l'investimento, il cumulo delle perdite trascurabili di molti investitori fornisce un capitale non più trascurabile che si aggiunge a quel quarto che comunque spetta a *chi se ne occupava*. In questo modo si realizzava, per la prima volta una sorta si miracolo: si potevano produrrei soldi senza lavoro! La sola conoscenza del calcolo e delle sue regole consentiva al "banchiere" di accumulare utili senza produrre valore.

Il metodo che abbiamo utilizzato per calcolare il profitto corrispondente a una lira è quello che Fibonacci chiama "volgare". In realtà per questo e per tutti i calcoli analoghi lui usa le sue frazioni multiple graduate matematicamente molto più raffinate. Nello specifico, essendo un soldo un ventesimo di una lira, bisogna sapere quanti ventesimi contiene la frazione di lira 21/76 e poi quanti dodicesimi sono contenuti nel resto cioè nella frazione di soldo 10/19. Tutto questo lo porta al risultato

$$\frac{21}{76}=\frac{5}{20}+\frac{6}{20\times12}+\frac{6}{20\times12\times19}$$

numero che Fibonacci scrive, compattando l'informazione, come frazione multipla graduata:

$$\frac{5\;\;6\;\;6}{20\;\;12\;\;19}.$$

La teoria matematica che riguarda le frazioni multiple graduate, che comprende come caso particolare le frazioni ordinarie se il grado è uno, è una teoria completa, rigorosa e molto bella che fornisce un quadro teorico generale, oggi dimenticato, nel quale ogni tipo di commercio, di scambio, di operazione bancaria, in un mondo di infinite unità di misura tra loro diverse, trova una semplice formulazione e un conseguente algoritmo risolutivo al di sopra delle opinioni e alla portata di tutti.

Bibliografia

[1] N. TARTAGLIA, *Tutte le opere d'aritmetica del famosissimo Nicolò Tartaglia*, Venezia, 1592-93
[2] E. CASTELNUOVO, *L'insegnamento delle frazioni*, da La scuola secondaria e i suoi problemi, 1952
[3] F. ENRIQUES, *L'insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, s. IV, vol. 1, pp 6-16, 1921
[4] Leonardo Pisano, *Liber Abbaci*, a cura di B. Boncompagni, Roma, 1857
[5] L. CATASTINI, *Tra parole, matematica e musica*, da Quale scuola? Carocci, 2015
[6] Euclide, *Elementi*, a cura di A. Frajese, L. Maccioni, UTET, Torino, 1996
[7] PIERO DELLA FRANCESCA, *Trattato d'abbaco*, Istituto poligrafico e Zecca dello Stato, Roma, 2012.

# Derivabilità e continuità della funzione derivata

# *Differentiability and continuity of the derivative*

***Lorenzo Di Biagio*[1]**

**Abstract:**

*At the beginning of a more in-depth study of the concept of differentiability, students often confuse the notion of differentiability of a real function with that of continuity of the derivative. They consider themselves always entitled to verify the differentiability at a point not through the more appropriate (but least loved) definition as limit of the difference quotient but through the study of the limits of the derivative at that point. Even without a theoretical understanding, they generally reach the correct result. Why? Essentially because the derivative of a function cannot be discontinuous at will. In this paper we want to study this issue in depth and provide a solid basis for the students'reasoning, including also examples and counterexamples.*

*–"per vedere se una funzione èderivabile in un punto come faccio? calcolo i limiti della derivata? Spesso funziona, giusto? [...] penso di continuare col mio metodo e sperare che vada bene"*
*–"per studiare la derivabilitàdi una funzione in un punto devo per forza calcolare il rapporto incrementale oppure posso piùsemplicemente eseguire i limiti sinistro e destro della funzione giàderivata?"*
*–"ma questo èchiaro se pensi che la derivata di una funzione èa sua volta una funzione e quindi calcolare la derivabilitàdi una funzione significa calcolare la continuitàdella sua derivata"*

(da alcuni forum di matematica)

## Introduzione

Nella mia esperienza di insegnante di un primo corso di matematica generale per economisti mi sono accorto che gli allievi che si

---

[1] Lorenzo Di Biagio - Luiss "Guido Carli", Viale Romania 32, Roma -lorenzo.dibiagio@gmail.com

approcciano per la prima volta e con un certo rigore allo studio della derivabilitàdelle funzioni incappano spesso in un abbaglio, più concettuale che pratico, di cui non sono neanche ben coscienti. Il fatto che anzi il risultato "torni", e che i libri di testo non li mettano in guardia, non li aiuta certo a rendersi conto della sottigliezza della questione.

A cosa mi riferisco? Quando gli studenti sono chiamati a risolvere il classico esercizio di stabilire se certe funzioni continue definite a tratti, e derivabili in ogni tratto, sono anche derivabili nei punti di raccordo, di solito si preoccupano esclusivamente di controllare che le derivate (calcolate indipendentemente in ogni tratto con le solite regole meccaniche) abbiano o no lo stesso limite in un punto di raccordo. In questo modo pensano di cavarsela, evitandosi di dover ricorrere alla meno amata definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (e beffando quindi l'esercitatore, che aveva proposto l'esercizio con quel preciso scopo). In concreto generalmente non commettono un errore, ma difficilmente sapranno giustificare concettualmente la loro tecnica, perché in effetti confondono i concetti di 'derivabilità' (come limite del rapporto incrementale) e 'limite della derivata'. Ovvero ritengono che una funzione continua, definita a tratti e derivabile in ogni tratto, è derivabile anche nei punti di raccordo se e solo se la funzione derivata lìècontinua. Si stupiscono nell'apprendere che invece è possibile fornire esempi di funzioni derivabili in un punto ma con funzione derivata non continua in quel punto, e spesso si rassegnano (ma con un certo abbattimento) a ricorrere alla definizione di derivata.

Fortunatamente per i nostri studenti, però, non è necessario gettare il bambino con l'acqua sporca: i punti di discontinuità delle funzioni derivabili devono sottostare a vincoli piuttosto rigidi, e –benché lo utilizzino in modo inconsapevole– il loro trucco all'atto pratico si rivela corretto e risolutivo. Anche se non è generalizzabile a casi più complessi.

Questa breve nota vuole chiarire per bene la questione, presentando in modo organico teoremi, esempi e controesempi (alcuni originali) per accrescere la nostra consapevolezza sulla nozione di derivabilità.

Derivabilitàe limiti della derivata

Sia, una funzione reale di variabile reale, continua ine derivabile un intorno di, tranne al più in.

***Il nostro obiettivo èstudiare la derivabilitàdi f nel punto.***

Premettiamo una chiarificazione lessicale e di notazione: non bisogna confondere i due concetti di

1) , il limite destro del rapporto incrementale di in.
2) , il limite destro in della funzione derivata.

Il limite destro del rapporto incrementale diinè definito come

Invece il limite destro in della funzione derivata è definito come

Analogamente per i concetti di limite sinistro del rapporto incrementale e limite sinistro della funzione derivata. Se il limite esiste finito allora si dice che esiste la derivata destra di in (o che ammette derivata destra in) e è detto derivata destra di in(cfr. [1, par. 14.3]). Ricordiamo che una funzione è derivabile inse e solo se la derivata destra e sinistra di in (esistono e) coincidono. Per le nozioni di base sulla derivazione si veda [3] o [5].

***Il nostro scopo èstabilire quale relazione c'ètra l'esistenza del limite destro (sinistro) in della funzione derivata e l'esistenza della derivata destra (sinistra) di in.***
Si consideri il seguente esempio

*Esempio 1.* Sia

La funzioneè continua per ogni, visto che i due tratti sono continui,è l'unico punto di raccordo e. Si veda la Fig. 1. Cfr. [2, ex. 3.2].

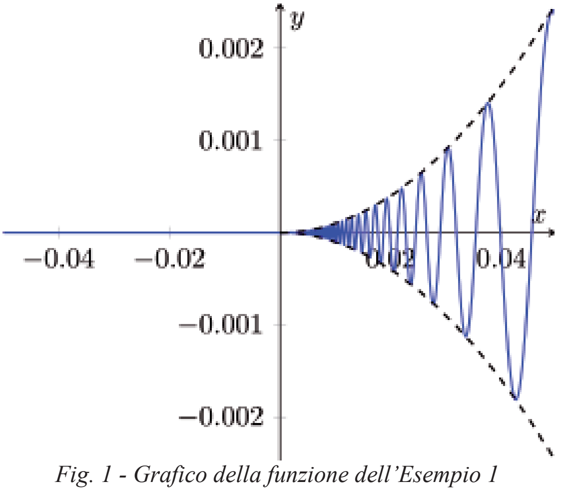


*Fig. 1 - Grafico della funzione dell'Esempio 1*

Inoltreè derivabile su e, con le usuali regole di derivazione, si verifica facilmente che

Notiamo che il non esiste, mentre. Gli studenti alle prime armi sarebbero portati a dire che non è derivabile in. Invece non ècosì: calcolando la derivata destra in si ha, e quindi la funzione è derivabile, perché le derivate destra e sinistra esistono e coincidono. Si veda la Fig. 2.

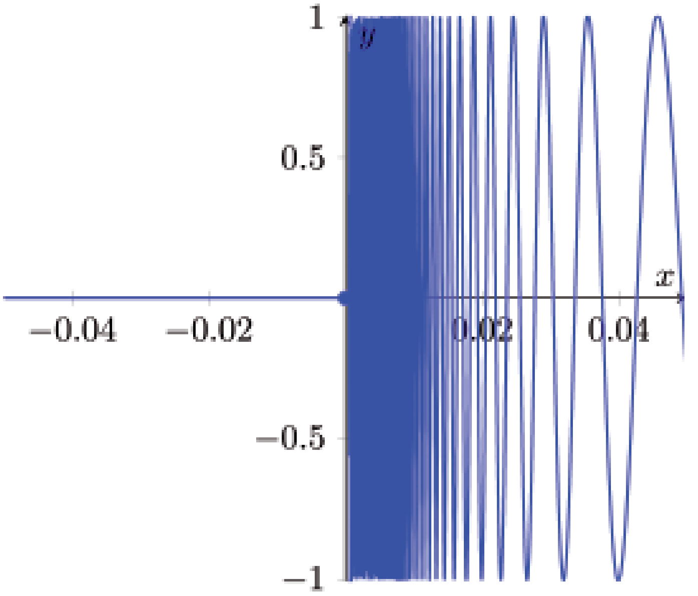



*Fig. 2 -Grafico della funzionedell'Esempio 1*

Perciò: data una funzione continua in e derivabile in un intorno di, tranne al piùin, non èpossibile escludere la derivabilitàinsulla base della non esistenza del limite destro (o sinistro) della derivata, perche tende a(o).

Fortunatamente però un teorema può aiutarci a stabilire se una tale funzione è derivabile in (oppure no). Il teorema ci consente di ottenere informazioni sulla derivabilità in attraverso lo studio dei limiti in della funzione derivata, evitandoci di dover ricorrere alla definizione di derivata in come limite del rapporto incrementale.

Teorema 1. *Sia funzione continua su e derivabile in. Supponiamo che il limite esista e sia pari a (finito o infinito). Allora, il limite destro del rapporto incrementale di inè pari a. (Analogamente: se allora).*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si basa su una semplice applicazione del teorema del valor medio, o di Lagrange (cfr. [3, Teor. 8.1]), attraverso il quale riusciamo ad approssimare il rapporto incrementale in con la derivata in un punto vicino, e quindi a mettere in relazione il limite destro del rapporto incrementale con il limite destro della funzione derivata.

Più in dettaglio: per ogni, per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste tale che

.

Perciòcalcolando il limite destro del rapporto incrementale in abbiamo per l'ipotesi su e perché, conper ogni.

*Osservazione 1.* Notiamo in particolare che seè finito allora per definizioneè derivabile a destra in. Se èinfinito la derivata destra in non esiste. Analogamente per il limite sinistro e la derivata sinistra.

*Osservazione 2.* L'ipotesi di continuità inè essenziale, altrimenti non possiamo applicare il teorema di Lagrange. In effetti, come ben si sa, se non è continua inda destra allora la derivata destra innon esiste.

Ricapitolando: per una funzione continua su e derivabile su, l'esistenza del limite difinito perche tende ada destra implica l'esistenza della derivata destra diin. Se il limite è infinito invece la derivata destra innon esiste. Analogamente per il limite sinistro e la derivata sinistra. Attenzione però! il viceversa non è vero: come abbiamo visto, nell'Esempio 1 il limite destro diperche tende anon esiste ma invece esiste la derivata destra in.

A questo punto, utilizzando contemporaneamente due intervalli aperti concome punto di accumulazione, uno alla sinistra die uno alla sua destra, possiamo cosìconcludere:
Consideriamo una funzione continua ine derivabile in un intorno di, tranne al più in. Se inesistono finiti il limite destro e il limite sinistro della funzione derivata e coincidono allora la funzione èderivabile ine la sua derivata ècontinua in. Se invece uno dei limiti èinfinito oppure se esistono entrambi ma non coincidono allora la funzione non èderivabile in.

Seguono tre semplici esempi di applicazione del principio appena esposto, in positivo e in negativo. Nella Sezione 5 si discute se èpossibile estendere il principio anche ai casi in cui il limite della funzione derivata non esiste ma la derivata è limitata.

*Esempio 2.* Sia

Si veda la Figura 3.

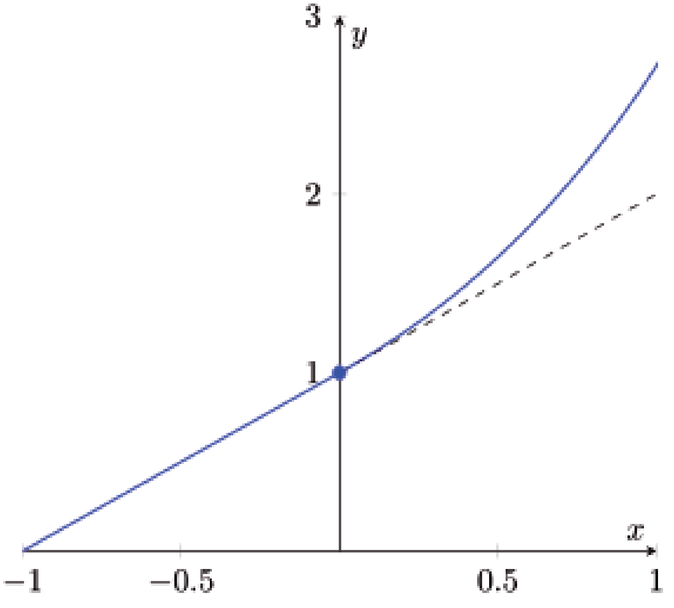



*Fig. 3 - Grafico della funzionedell'Esempio 2*

è continua sue derivabile sucon

Inoltreè derivabile anche in, unico punto di raccordo, e. Lo si può dimostrare o utilizzando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (, i due limiti coincidono, quindi il limite del rapporto incrementale inesiste e vale 1) oppure applicando direttamente quanto abbiamo visto. Consideriamo la funzione derivata calcolata nei due tratti, e notiamo che i suoi limiti sinistro e destro coincidono:

*Esempio 3.* Sia

Si veda la Figura 4.

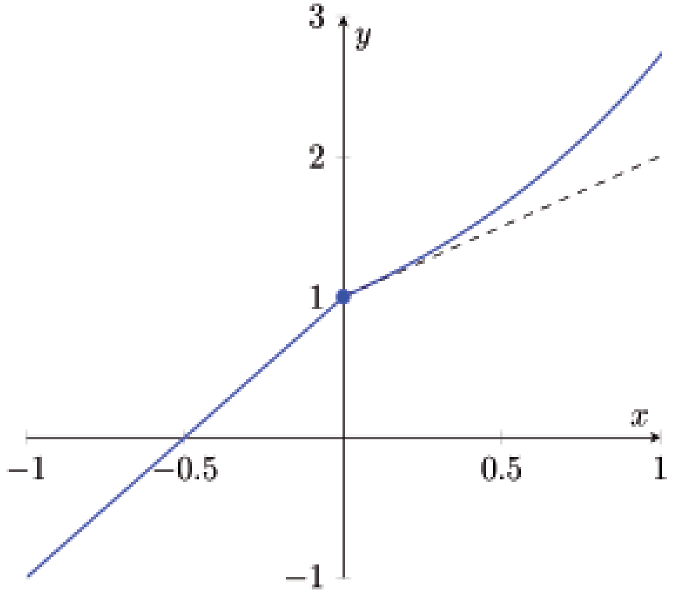



*Fig. 4. Grafico della funzionedell'Esempio 3*

è continua sue derivabile sucon perònon èderivabile in. Lo si può dimostrare o utilizzando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (, quindi il limite del rapporto incrementale non esiste e la funzione non è derivabile in) oppure applicando direttamente quanto abbiamo visto. Consideriamo la funzione derivata calcolata nei due tratti, e notiamo che i limiti sinistro e destro della derivata esistono ma non coincidono:

*Esempio 4.* Sia

Si veda la Figura 5.

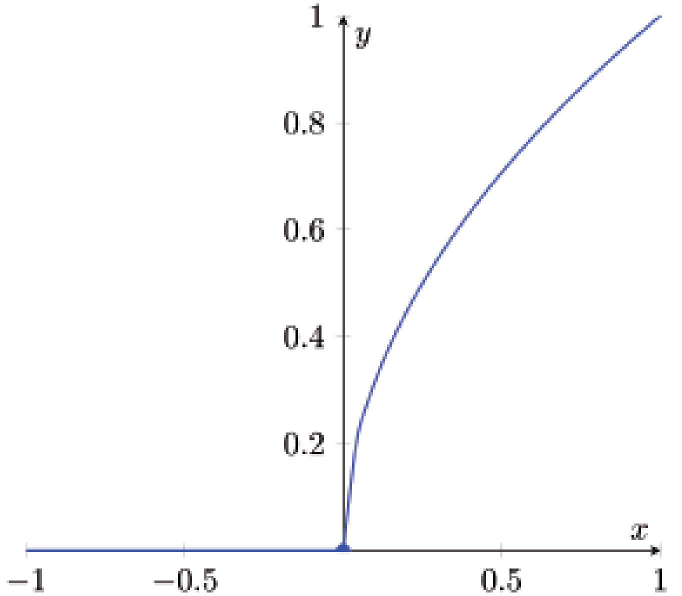



*Fig. 5. Grafico della funzionedell'Esempio 4*

è continua sue derivabile sue

perònon èderivabile in. Lo si può dimostrare o utilizzando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale ( e quindi la funzione non è derivabile in) oppure applicando direttamente quanto abbiamo visto. Consideriamo la funzione derivata nel tratto destro, e notiamo che il suo limite destro è infinito:

Le discontinuitàdelle funzioni derivabili

Nell'Esempio 1 abbiamo visto come una funzionederivabile possa non avere una funzione derivatacontinua. Nella discussione che ne è seguita abbiamo però anche intuito che se una funzione è derivabile, le discontinuità della funzione derivata non possono essere totalmente arbitrarie.

Infatti seè derivabile, allora per ognidevono esistere finitiecon. Siccome, per il Teorema 1, seesiste allorae seesiste allora, concludiamo che o uno dei due limiti della funzione derivata non esiste, e quindiha per definizione una discontinuitàessenziale in(o del terzo tipo) oppuredeve essere continua in. In particolarenon può avere discontinuità eliminabili (cioè in cui i limiti destro e sinistro esistono finiti e coincidono ma non con il valore della funzione nel punto), di tipo salto (cioè in cui i limiti destro e sinistro esistono finiti ma non coincidono) o discontinuità di secondo tipo (cioè in cui i limiti destro e sinistro esistono ma almeno uno è infinito).

Il teorema di Darboux

Come abbiamo appena visto, la funzione derivata di una funzione derivabile può essere discontinua solo in un modo. Quindi non tutte le funzioni possono essere una funzione derivata. In effetti la funzione derivata di una funzione derivabile, anche se non per forza continua, gode di una tipica proprietà delle funzioni continue: la proprietà del valore intermedio.

Teorema 2 (di Darboux). *Siafunzione derivabile. Se, sono punti inconallora per ognicompreso traeesistetale che.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si basa ancora una volta su un'applicazione del teorema di Lagrange. Si veda [5, par. 5.3] o, per una dimostrazione alternativa, [4] o [6, par. 30.7].

In poche parole il teorema afferma che la funzione derivata,anche se non continua, assume traealmeno una volta tutti i valori trae.

E' possibile estendere il Teorema 1?

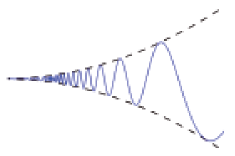
Consideriamo funzioni continue in, derivabili in un intorno di, tranne al più in, e per le quali non esiste il limite destro indella derivata.

Visto l'Esempio 1 si è tentati di ipotizzare che l'esistenza della derivata destra dipenda dalla limitatezza della derivata in un intorno di.In uno slancio di ottimismo – ricordando l'Osservazione 1 – si potrebbe poi supporre che, al contrario, la derivata destra non possa esistere se in un intorno dila derivata è illimitata.

Non è così: nella Tabella 1 sono riportati quattro esempi di funzioni continue ovunque (basta porle uguali ain), che verificano anche le altre assunzioni iniziali, con derivata limitata/illimitata in un intervalloe con derivata destra inche esiste/non esiste. La tabella esaurisce tutte le possibilità. I primi tre esempi sono ben noti in letteratura (cfr. ad esempio [2, ex. 3.2, 3.6]). Per l'ultimo esempio non si può ricorrere a funzioni simili alle prime tre (vedi [5, ex. 13, cap. 5]), quindi bisogna inventarsi una funzionein modo un po' artificioso, che viene descritto sotto.

In conclusione il Teorema 1 non si può generalizzare ulteriormente: se inil limite destro della funzione derivata non esiste allora non possiamo dedurre nulla sull'esistenza della derivata destra. Può esistere, può non esistere, e c'è poco da fare: bisogna verificarlo con la definizione di limite del rapporto incrementale.

*Tabella 1. Esempi*

| Funzione $f$ | $f'$ in $(0,\epsilon)$ | $f'_+$ in $0$ | $f$ in $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ | $f'$ in $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ | illimitata | esiste finito |  | |

Per trovarecon le proprietà richieste partiamo dalla funzionedi Figura 6 costruita a tratti suddividendo l'intervallonei sotto-intervallial variare die considerando, in ogni sotto-intervallo, la funzione seno trae, dopo averla compressa adeguatamente. Ovvero:

La funzioneècontinua ovunque tranne ined èlimitata, quindièRiemann-integrabile. Chiamiamola funzione integrale di,i.e.,.

Si veda la Figura 7.

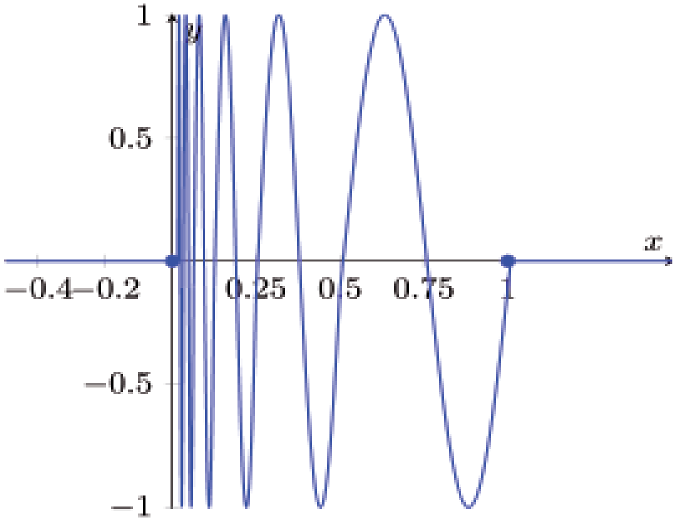



*Fig. 6- Grafico della funzione*

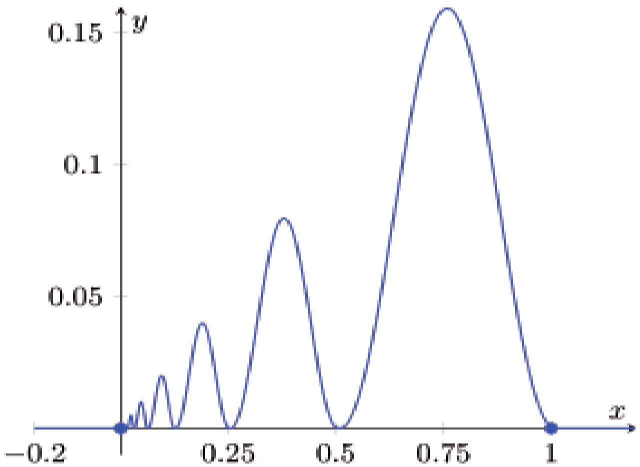



*Fig. 7 - Grafico della funzione*

Potremmo ricavarci l’espressione analitica di, ma non ènecessario. Il teorema fondamentale del calcolo integrale (cfr. [3, teor. 9.2]) ci assicura cheovunque tranne al piùin, quindiha derivata limitata in.
Dimostriamo chenon ha la derivata destra in.

Si veda la Figura 8.

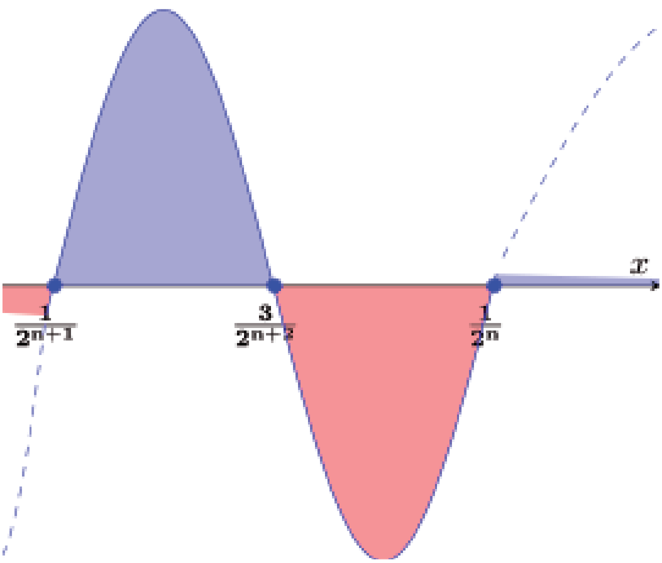



*Fig. 8 - Grafico della funzionetrae*

Dato che la parte positiva (in azzurro) e la parte negativa (in rosso) del seno si compensano in ogni intervallo, allora, per ogni. D’altra parte, visto che l’area azzurra sotto la curva traeèpari a, si ha.

Considerando i limiti del rapporto incrementale in(da destra) relativo alle due successioni, abbiamo:

,

.

Il rapporto incrementale in(cioè)è una funzione di. Allora per il cosiddetto “teorema ponte” tra successioni e funzioni (cfr. [3, Teor. 4.1]) il suo limite perche tende ada destra se esiste deve coincidere con il limite calcolato sostituendo auna qualsiasi successione che tenda ada destra. Ma i limiti calcolati attraverso le due successioni differiscono e quindi il limite destro del rapporto incrementale innon può esistere. Quindinon ha la derivata destra in.

## Conclusioni

Gli studenti spesso preferiscono controllare la derivabilità di una funzione in un punto evitando la definizione di limite del rapporto incrementale, e studiando invece la continuità della funzione derivata nel punto, senza realmente essere consapevoli del perché ciòsia lecito. Come abbiamo visto in questo articolo, il sistema è effettivamente corretto per le funzioni usualmente oggetto di verifica nell’ultimo anno delle scuole superiori o nei corsi di matematica generale del primo anno dell'università, ovvero in tutti i casi in cui i limiti della funzione derivata, da destra e da sinistra, tendono all’infinito, oppure esistono finiti. Abbiamo anche visto però che continuità della derivata e derivabilità non sono condizioni equivalenti, e che il metodo non è generalizzabile ai casi in cui il limite della funzione derivata non esiste, neanche se la derivata è limitata.

## Ringraziamenti

Ringrazio Alfonso Sorrentino, Antonio Cigliola, Cristiana Di Russo, Roberto Natalini per i loro preziosi suggerimenti.

## Riferimenti bibliografici

[1] De Marco G. (1996), *Analisi uno*, Zanichelli, Bologna.

[2] GELBAUM B.R., OLMSTED J.M.H. (2003), *Counterexamples in analysis*, Dover, New York.

[3] GIUSTI E. (1988), *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino.

[4] OLSNES L. (2004), A new proof of Darboux's theorem, *The American Mathematical Monthly*, 111(8), 713-715.

[5] RUDIN W. (1976), *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York.

[6] SPRECHER D.A. (1987), *Elements of real analysis*, Dover, New York.

# La vocazione politica dell'Istruzione

## *The political vocation of education*

**Virgilio Santato**[1]


### Abstract

*Three words,* logoi *indeed, identify the status of each formative event: education, constitutional obligations for decision-makers and duty, for each teacher, to build citizen who live up to their expectations and their time, true protagonists in the polis. A possible goal if pupils find in the classrooms true masters. Hence the unavoidable political vocation of education.*


### Premessa

Tre parole, una sorta di statuto, oggi come ieri, ovvero della intrinseca destinazione sociale di ogni atto educativo e del contestuale ruolo politico degli autori di tale atto.

Chiunque *vocatus* a svolgere un ruolo educativo si pone, oggi come ieri ancora, protagonista nella *polis*, veicolo di *thauma*, come Socrate al mercato, quella meraviglia che la conoscenza provoca, inquieta e fa interrogare, rendendo il cittadino protagonista, capace pure di chiamarsi fuori, praticare persino l'*atopia* se la città compie atti non degni, come non molti fecero nel maledetto *secolo breve* 1), *secolo perduto* 2), "dramma globale del Novecento… che con i suoi conflitti e le sue atrocità, appare una desolata discarica di violenza e un arsenale di miti a cui qualcuno sarebbe incline ad attingere"3).

Prendo spunto per il titolo di questo scritto dal recente lavoro di Donatella Di Cesare, saggio sulla natura politica della filosofia, sui filosofi migranti del pensiero "…restando nella città ma da stranieri…. Espatriati in patria, quei senza-città finiranno per dichiararsi cosmopoliti…cittadini del cosmo, sovversivi abitanti di un ordine futuro" 4). È lo spaesamento che la conoscenza *tout court* genera, che l'istruzione pur nelle sue conformità organizzative e propositive assume, in tal modo allargando confini e promuovendo sensibilità,

---

[1] Accademico dei Concordi _ Rovigo

ponendo domande e chiedendo approfondimenti, un dilatarsi di orizzonti e un profilarsi di sempre nuove conquiste, una *recherche* di senso mai dismessa, nulla a che vedere con l'*hortus conclusus* dei supponenti e dei dogmatismi.

## Istruzione

Poniamo in tale prospettiva, ovvero di ricerca aperta, una prima ed elementare analisi dei termini in questione, a cominciare dalla ***istruzione***. Si tratta della finalità fondativa della scuola, obbligo per i decisori politici nel provvederne alla piena realizzazione, dovere per quanti nella e per la scuola operano.

È dettato costituzionale, laddove alla Repubblica spetta garantire a tutti i cittadini pari dignità sociale e uguaglianza davanti alla legge, pieno sviluppo della persona umana, effettiva partecipazione alla vita politica, economica e sociale (art.3), ponendoli in condizione "…di svolgere, secondo le proprie possibilità e la propria scelta, una attività o una funzione che concorra al progresso materiale o spirituale della società" (4). E al fine di assicurare l'effettività di tali diritti "La Repubblica detta le norme generali sull'istruzione ed istituisce scuole statali per tutti gli ordini e gradi" (art.33), una scuola aperta a tutti ove "…i capaci e meritevoli, anche se privi di mezzi, hanno diritto di raggiungere i gradi più alti degli studi" (art. 34).

Poste le norme-fondamento, al legislatore ordinario, all'ordinamento giuridico e quindi ai soggetti protagonisti nella istituzione scolastica, alla società civile tutta, concorrere affinché siano effettive, via via all'altezza dei tempi.

L'effettività in questione, e come non dimenticare sul punto la lezione quasi coeva di H. Kelsen (5), è storia degli ultimi settant'anni, faticosi all'inizio per una eredità dilaniante ancora presente pur nell'impegno a ricostruire, stagione che vede realizzarsi una scuola di massa, crescere la partecipazione se non l'appartenenza, un proliferare normativo testimoniato dalla decretazione delegata del 1974, uno spartiacque questo, i genitori negli organismi scolastici rappresentativi, poi un dileguarsi fino a tentare una scuola ove professionalità e condivisione, ruoli e reti, dirigenza e collegialità possano concorrere alla qualità del servizio scolastico.

Solo un accenno, a titolo esemplificativo ma dai risvolti illuminanti per la natura politica della istruzione di cui più avanti, merita la vicenda dell'insegnamento della educazione civica.

Mentre con il D.P.R. n. 503 del 1955 venivano dettate indicazioni per la primaria, il primo testo normativo compiuto su questo insegnamento è rappresentato del D.P.R.n.585 del 1958, ministro della pubblica istruzione Aldo Moro, con il quale il legislatore riteneva opportuno "integrare i programmi di insegnamento della storia in vigore negli istituti e scuole d'istruzione secondaria e artistica con elementi di educazione civica". E nell'allegato veniva ben illustrato il programma di studio, contiguo in particolare alle discipline di filosofia, economia e diritto, stabilendo anche l'orario: due ore mensili, nell'ambito dell'insegnamento e dell'orario di storia.

Quanto sia stato "effettivo" il decreto è storia di generazioni di studenti, purtroppo. E si è trattato di omissione, togliendo agli studenti la possibilità di conoscere e argomentare su tematiche formative, dalla conoscenza ragionata del testo costituzionale allo studio degli organismi internazionali e relative problematiche, una apertura critica che avrebbe ben potuto concorrere alla formazione del cittadino responsabile.

Ora è in atto un tentativo di recupero della educazione civica con la L. del 20 agosto 2019, n. 92, da impartirsi dall'a.s.2020, con l'intenzione di " formare cittadini responsabili e attivi e a promuovere la partecipazione piena e consapevole alla vita civica, culturale e sociale delle comunità, nel rispetto delle regole, dei diritti e dei doveri "(art.1, co.1) e istituendo "l'insegnamento trasversale della educazione civica, che sviluppa la conoscenza e la comprensione delle strutture e dei profili sociali, economici, giuridici, civici e ambientali della società. (art.2, co.1)". E l'insegnamento per non meno di 33 ore nell'ambito del monte orario annuale complessivo è affidato "ai docenti abilitati all'insegnamento delle discipline giuridiche ed economiche, ove disponibili nell'ambito dell'organico dell'autonomia" (art. 2, co.4).

Apprezzabile impegno e adeguati gli obiettivi, e come non rendersi conto della necessità di formare cittadini responsabili, ma inadeguati ancora gli strumenti messi a disposizione, ovvero limitare ai docenti abilitati quando si sarebbe potuto allargare ai professionisti del diritto esterni, portando nell'istituzione scolastica ulteriori aggiornate competenze. Molto potrà fare in tal senso una "effettiva" autonomia scolastica, potessero essere assegnate risorse adeguate.

Del resto il sistema-istruzione ha dovuto confrontarsi con attenzioni pubbliche e private variegate e mutevoli, con una legislazione *stop and go* quando non visto come spazio politicamente occupabile. Lo stesso studente, titolare del diritto costituzionale allo studio, ovvero di una formazione all'altezza delle sue potenzialità e del tempo in cui vive, è stato sacrificato quando premiante era/è considerata la mediocrità e un modello di società silente, altre le priorità, o semplicemente distratti in molti, quando al contrario l'emergenza formativa dovrebbe essere semplicemente e sempre al centro delle attenzioni, delle politiche, delle risorse e delle persone. Dal nido, primo evento formativo-socializzante, alle istituzioni accademiche superiori, alla vigilia del proprio futuro lavorativo e civile.

Che destino ha una società non istruita? Quale futuro può avere oggi uno studente privato degli migliori opportunità formative? Quale comprensione del presente in assenza di cultura? Quale responsabilità si assume uno Stato assente o distratto o incapace in tema di politica scolastica?

## Politica

"Nessuno metterebbe in dubbio che il legislatore debba occuparsi soprattutto della educazione dei giovani, dal momento che il trascurarla costituisce un grave danno per i vari regimi politici." Questo l'*inci*pit del libro ottavo, l'ultimo, della *Politica* di Aristotele, fondatore del Liceo, morto a Calcide nel 322, ove si era rifugiato per sfuggire all'accusa di empietà, "empio" pure Socrate che all'amico Fedro confessava: "Perdonami carissimo! Sono uno che ama imparare. Ma la campagna e gli alberi non vogliono insegnarmi niente; gli uomini della città, invece, si." 6). E fino all'ultimo con quegli uomini, amici e allievi, farà dell'interrogarsi, del dialogo che muove dalla consapevolezza del non sapere come fondamento della ricerca, della conoscenza insomma, la cifra della nuova Atene.

Che la vicenda storica dell'educazione nel nostro panorama occidentale sia sempre stata *peri politeias*, ovvero questione politica e formazione del cittadino, buono o conforme, libero o ripiegato se non confinato, è facilmente riscontrabile ed intrinseca alla natura *politica* dell'uomo: "È chiaro che la città appartiene ai prodotti naturali, che l'uomo è un animale che per natura deve vivere in una città" 7). Dunque, nessuna educazione è possibile se non entro e per la *polis,* aristotelicamente comunità per eccellenza, o medioevale *città terrena* di cui argomenta Sant'Agostino nel suo *De doctrina christiana* o Stato moderno per giungere al cosmopolitismo d'oggi. Questione questa che rinvia a due aspetti fondamentali: il ruolo del decisore politico, ovvero la legislazione e il conseguente apparato ammnistrativo, e quello *ex parte discipuli,* lo studente in formazione.

La stessa titolarità regolativa in materia di istruzione ha seguito l'evolversi nel nostro Occidente europeo del modello di potere politico via via esistente e del grado di autonomia o meno riconosciuto a poteri decentrati o comunque riconosciuti. A titolo esemplificativo, in epoca carolingia la regolamentazione era impartita con apposita *Epistula de litteris colendis* con encomiabili intenti di unificazione nella nuova dimensione imperiale, ma venuta meno quest'ultima nel corso del medioevo prima con l'intensa stagione monastica e l'autonomia dei singoli monasteri, si pensi a Bobbio, poi con la nascita delle università a libero statuto e l'affermarsi degli ordini religiosi, si pensi alla gesuitica *Ratio studiorum* del 1599, detta regolamentazione diventa sempre più specifica.

È con la nascita degli Stati moderni e la conseguente affermazione della competenza in materia educativa che la legislazione scolastica si fa nazionale e in capo a funzionari ministeriali. Il cittadino viene formato in scuole pubbliche, a fronte della introduzione dell'obbligo scolastico, si pensi alla ben nota legge Casati estesa nel 1861 con la avvenuta unificazione a tutta l'Italia: riformati l'ordinamento scolastico e l'amministrazione, affermata la volontà dello Stato di farsi carico del diritto-dovere di occuparsi della istruzione, fine dell'egemonia cattolica in materia. E dall'Italia liberale a legislazione scolastica di ispirazione prussiana, nel periodo postbellico la scuola, prima organicamente riformata con la legge Gentile del 1923, si fa poi con il regime fascista "libro e moschetto", indottrinamento di massa e obbligo di iscrizione al partito per tutti gli insegnanti. A guerra conclusa, si aprirà la stagione costituzionalista e la collocazione della istruzione in un nuovo avanzato contesto culturale, si pensi all'avvento della scuola media unificata nel 1962. Con la decretazione delegata del 1974 si aprirà altra stagione, forte nelle speranze ma con irrisolti problemi.

Relativamente all'aspetto *ex parte discipuli* non vi è dubbio che la sua centralità nel sistema scuola è sempre stata proclamata, in una evoluzione da soggetto di istruzione, quindi da e-ducare di medioevale memoria, fino a diventare nella legislazione più recente e attuale protagonista, *protos agonistés,* primo attore, titolare del diritto alla istruzione e alla formazione per essere cittadino responsabilmente partecipe e realizzatore del proprio progetto di vita, consapevole dei propri doveri quanto dei diritti. Affermazioni impegnative che richiedono una contestuale messa in opera di azioni e risorse, di competenze e opportunità, di contesti all'altezza del nostro tempo: altrimenti restano enunciazioni, proclami a futura memoria. Ma che possono tradursi in coerenti opportunità se gli studenti troveranno di fronte a loro in aula, a loro fianco nel percorso formativo, persone all'altezza. Dei maestri *vocati*.

Il ***vocatus***, ovvero il maestro

Della professionalità docente: di questo, fuor di metafora e retorica, solo qualche parola.

Che il processo formativo richieda un concorso di persone e condizioni non vi è dubbio: è un concerto finalizzato, un *koinòn*, certamente un'azione comune e convergente, ma è nell'esperienza educativa di tutti come nella letteratura scolastica o negli studi sociali la dimostrazione che l'insegnante educatore gioca un ruolo fondamentale. Non la rincorsa affannosa e posticcia ad un riformismo magari sbandierato come storico e rivendicandone, ovviamente, il valore.

Ma come viene scelto e formato il formatore? Quale suo profilo è atteso dagli studenti? Quale il suo statuto etico e professionale? Portatore di una *paideia disinteressata* o veicolo rassicurante di conoscenze date? Regista discreto o attore sul palcoscenico? Autorevole o condiscendente fino alla remissività su richiesta magari di un sistema centrato sul cliente/studente in una tranquilla e tranquillizzante *aurea mediocritas*? Un inquietante socratico interrogare sulla *politeia* o un chiamarsi fuori cercando, riuscendovi, alibi a portata di mano?

Il dibattito è aperto, le conclusioni incerte.

Sarebbe già sufficiente se gli studenti, ogni mattina, guardando il loro insegnante, scoprissero nei suoi occhi l'amore per quello che sta facendo. Non c'è educazione infatti senza *philia.* Quando c'è, si trasmette la bellezza dell'esistenza, si dilatano gli orizzonti, è accolta la coesistenza, si vive bene in città anche questa viva solo se c'è *philia*, si costruiscono gli strumenti della conoscenza per navigare in mare aperto, ognuno la sua strada.

Ricordando i suoi maestri.

## Bibliografia

[1] Cfr. E.J. HOBSBAWM, *Il secolo breve 194-1991*, Rizzoli, Milano 1995.

[2] Cfr. P. SLOTERDIIK, *Che cosa è successo nel XX secolo?,* Bollati Boringhieri, Torino, 2017.

[3] D. DE CESARE, *La vocazione politica della filosofia*, Bollati Boringhieri, Torino, 2018, p.96.

[4] Ibid., pp. 63-64.

[5] H. KELSEN, *Teoria generale del diritto e dello Stato*, Ed. di Comunità, Milano,1952.

[6] PLATONE, *Fedro*, 230d.

[7] ARISTOTELE, *Politica*, I,2.

# Leonardo: apogeo e crisi del primo Rinascimento

## *Leonardo: apogee and crisis in the early Renaissance*

***Andrea Guaraldo***[1]

**Abstract**

*The article looks at the figure of the great artist, placing him in the delicate historical moment of passage from the Age of Lorenzo the Magnificent, in which he is born and trained, to that of the dawn of the modern Age and of the mature Renaissance, of which he is undisputed protagonist. (...) Identifying the limits of the Florentine Neoplatonism precisely in its interior and literary self - referentiality, Leonardo puts the attention back to the need for a concrete and experimental art, capable, if required, of betraying the application of ancient models in order to re-propose their innovative spirit. (...) It follows a conception of Beauty different from the Neoplatonic and Botticellian ones, free from regrets or moral torments. At the same time, bringing back the focus on experience as the basis for all knowledge, Leonardo makes perspective more concrete, limiting its mathematical-geometric foundation and developing its physical and perceptive dimension instead. All of this is made possible by an idea of science not as a relvelation of the Being, but as a methodology of knowledge, so open and progressive as essentially anti-metaphysical. In this lies his modernity.*

Scrivere di un grande artista e inventore come Leonardo nel cinquecentesimo anniversario della morte espone a dei rischi di banalizzazione. Il primo riguarda il ruolo che l'artista di Vinci occupa nel nostro immaginario collettivo, in rapporto agli stereotipi che nutriamo nei confronti delle personalità difficilmente classificabili e per le quali usiamo senza particolari precauzioni il termine "genio". Il secondo ordine di riflessioni richiama invece l'appartenenza di Leonardo alle figure più

[1] Docente di disegno e storia dell'arte presso il liceo scientifico statale P. Paleocapa di Rovigo.

rappresentative del Rinascimento, che nei nostri ricordi scolastici sono tutt'uno con le trasformazioni nelle quali l'arte parve avere per la prima volta nella storia un ruolo primario e trainante, all'alba di quell'età che, con un certo compiacimento, è chiamata ormai da secoli "Età moderna".

Entrambe le connotazioni di Leonardo, quella di "genio innovatore" e di "testimonial" del Rinascimento, diventano facilmente cliché, che dogmaticamente diventano la premessa logica e il punto di arrivo di ogni discettare intorno all'argomento e che si prestano alle strumentalizzazioni più varie. È ricorrente, per fare un esempio, il richiamo a improbabili "nuovi Rinascimenti" anche nel linguaggio e nelle figure metaforiche della politica contemporanea, e non certo da oggi. Leonardo, in questa visione "New Age" e "liberal" diventerebbe allora un uomo libero di estrinsecare il proprio genio, in lotta contro le idee dominanti del suo tempo, fondatore di nuovi paradigmi conoscitivi e tecnologici, portatore di una "vision" e di una "mission" dinamiche e innovative.

Già mezzo secolo fa il grande storico dell'arte rinascimentale André Chastel così riassumeva la questione della modernità anacronistica di Leonardo:

> *"Si è esagerata fuori d'ogni misura l'originalità di Leonardo; un'analisi attenta alle date e ai fatti basta a rivelare quanto egli sia del suo tempo e viva i suoi stessi problemi; ma egli sembra aver voluto ricostruire la propria cultura al di là delle posizioni confuse o incomplete dei contemporanei. E la figura più tipica di Firenze ha definito se stessa attraverso una critica incessante della cultura fiorentina"*[2]

Assumere come date e già dimostrate categorie complesse quale quella del "genio" conduce fatalmente all'agiografia, ovvero a discorsi meramente laudatori, nei quali alla realtà si sostituisce il mito, e al dovere di distinguere e confrontare, fondamento di ogni disamina razionale e scientifica, si sostituiscono l'emotività e la coralità del consenso. Uno studio su Leonardo che rimanesse entro queste pastoie sarebbe sì degno di essere a sua volta studiato, ma nell'ambito della psicologia delle masse e del feticismo culturale. Le ragioni per le quali si organizzano mostre non sono infatti meno interessanti degli oggetti e delle opere che espongono: le creazioni e gli azzardi di un intellettuale e artista come Leonardo, svuotato dal contesto nel quale crebbe e si mosse, diventano così straordinarie icone della cultura pop, della citazione continua ma vuota, del tributo e del rituale della ricerca dei

---

[2] ANDRÉ CASTEL, Leonardo da Vinci e il Neoplatonismo, in Arte e Umanesimo al tempo di Lorenzo il Magnifico, Torino, 1964, anche in: http://www.franuvolo.it/sito/doc/Leonardo-in/041.pdf

grandi padri e dei nobili precursori, ciò di cui, in altre parole, un'epoca senza più padri, post-ideologica e iper-stimolata dalla vuota idolatria della tecnica come la nostra, ha disperatamente bisogno.

Comunque, mettendo da parte questa prospettiva critica, ispirata a una certa dialettica negativa e demistificatoria, occorre subito precisare che la stessa nozione di Rinascimento è tutt'altro che omogenea e lineare, tant'è che proprio nel passaggio dal Quattrocento al Cinquecento avvengono dei cambiamenti di paradigma dei quali Leonardo stesso è tanto l'effetto quanto una delle cause, o per essere più prudenti, uno degli attori che accelerarono quel passaggio.

Leonardo nasce nel 1452 in un momento particolare della storia e dell'immaginario scientifico, artistico e culturale dell'Italia dell'epoca. È quella l'Italia delle Repubbliche oligarchiche e delle Signorie, un consesso di piccole e medie potenze regionali che ormai da circa un secolo e mezzo, approfittando dell'indebolimento dei grandi poteri del tardo Medioevo, Papato e Impero *in primis*, ma anche dell'interminabile Guerra dei Cent'anni, sostanzialmente andava cristallizzandosi in un equilibrio apparentemente splendido, legittimato culturalmente dalla promozione dell'attività artistica, dagli ideali classici e dallo studio dell'Antico, ma sostanzialmente statico e privo di futuro. Nel 1454 la Pace di Lodi, impedendo che una singola potenza italiana, soprattutto Venezia, Milano o Napoli, potesse ancora praticare una politica egemonica e di ampio respiro sulla Penisola, ratificherà di fatto la sostanziale equivalenza delle forze in campo, ma anche la perdita di quel dinamismo politico e militare che aveva caratterizzato gli inizi del XV secolo, con i tentativi di raggiungere una "Signoria d'Italia" da parte dei vari Giangaleazzo Visconti o Ladislao Durazzo d'Angiò. In seguito il progetto egemonico sarà ripreso da Venezia, tramite una lenta e metodica sottrazione di territori veneti, lombardi e emiliano-romagnoli da parte della Serenissima ai loro legittimi proprietari, finché anche Venezia stessa non sarà definitivamente fermata dalla Lega di Cambrai con il determinante aiuto francese, ma questo avverrà soltanto circa mezzo secolo dopo.

Gli Stati rinascimentali, con l'eccezione assoluta di Venezia, sono in gran parte fragili potentati familiari, nei quali il rapporto tra Signore e Popolo è assai instabile e in genere privo di duraturi vincoli di lealtà, poiché tali Stati sono costruiti spesso secondo logiche personalistiche, frutto dell'avventurismo e della *Virtus* personale che si contrappone alla *Fortuna*, una dicotomia letterario-filosofica da intendere proprio in senso umanistico, più che con categorie politiche. Il mecenatismo artistico dei Medici, degli Este, dei Gonzaga e dei Montefeltro, per citare soltanto alcuni dei grandi committenti del periodo, è spesso una veste splendida che nobilita una politica pre-moderna, in gran parte accentrata sulle qualità eccezionali di un individuo.

Emblema di questa tipologia di uomini, allo stesso tempo politici e umanisti è indubbiamente Lorenzo de' Medici.

La corte di Lorenzo è ben rappresentata filosoficamente da un Neoplatonismo sognante e misticheggiante, dominato da Marsilio Ficino e Poliziano, che aleggia nei dipinti di Sandro Botticelli. Qui l'incanto intellettuale di una ricostruzione dell'etica classica si fa nostalgia irrimediabile e dolente. Bellezza e Realtà vi compaiono come termini dialettici di una condizione di inconciliabilità totale: la tonalità psicologica della "Primavera" e della "Nascita di Venere" è tutt'altro che gioiosa e ottimistica, bensì dominata da mestizia e senso della perdita. Questa "*Sehnsucht*" è d'altra parte evidente nei sonetti del Magnifico:

*"Quant'è bella giovinezza,*
*che si fugge tuttavia!*
*chi vuol esser lieto, sia:*
*di doman non c'è certezza.*

*Quest'è Bacco e Arïanna,*
*belli, e l'un dell'altro ardenti:*
*perché 'l tempo fugge e inganna,*
*sempre insieme stan contenti.*
*Queste ninfe ed altre genti*
*sono allegre tuttavia.*

*Chi vuol esser lieto, sia:*
*di doman non c'è certezza. (...)"*

Il Bello sognato dagli umanisti della cerchia del Magnifico è quello di un'*Aurea Etas* diventata finzione letteraria: siamo ormai lontani dall'ottimismo del primo Umanesimo fiorentino che aveva innanzitutto ricercato quale fosse la natura dell'uomo, individuandola nella possibilità di mettersi al centro del mondo con disposizione intellettuale libera da pregiudizi. Era quella l'inebriante esperienza di una libertà totale della mente, impegnata nella ricerca delle condizioni fondative del sapere.

L'uomo di cultura del primo Quattrocento, tanto l'Umanista quanto l'artista, si poneva di fronte alla realtà con la fiducia di poterne comprendere i principi, affidandosi alla razionalità dello studio, tanto degli oggetti naturali quanto di quelli culturali. Simboli di quella sicurezza in un ordine certo e immutabile, ma allo stesso tempo svincolato dalla concezione teocentrica dei secoli passati, erano la matematica e la geometria, le quali trovavano la loro perfetta rappresentazione nell'ordine metrico che la prospettiva dà all'esperienza visiva, stabilendo con precisione distanze reciproche e posizione misurabile di ogni oggetto, figura o piano nello spazio. Il punto di fuga nei dipinti rinascimentali, per esempio di Piero della Francesca, era forma simbolica della centralità dell'intelletto umano rispetto al mondo, nonché mito di una rappresentazione scientifica *"more geometrico demonstrata"* della totalità, qualche secolo prima di Spinoza e Cartesio. Quel fondamentale ottimismo gnoseologico sugli orizzonti senza limiti della volontà di sapere, che allo stesso tempo era anche espressione di una volontà di potenza, dopo tanti secoli di sudditanza del sapere all'autorità della Chiesa, si era però trasformato, nel secondo Quattrocento, in un misticismo ineffabile e nell'evocazione nostalgica e autoconsolatoria dell'Antico.

L'Antico, in realtà, nel primo Quattrocento era stato concepito in modo nient'affatto nostalgico e i primi filologi e cultori delle antichità romane studiavano le testimonianze latine con lo spirito agonistico di chi si sentiva in competizione con i lontani avi. In un certo senso quell'esperienza culturale ormai lontana, separata dal presente più vivo dai mille anni di quello che noi chiamiamo Medioevo e che per gli intellettuali come l'Alberti era soltanto l'epoca "gotica", dunque barbara e da dimenticare, era invece viva e produttiva. Gli artisti e gli intellettuali della prima metà del XV secolo avrebbero potuto benissimo affermare: "Gli Antichi siamo noi!", con ciò volendo intendere che lo straordinario percorso della cultura classica era tutt'altro che morto: non era affatto un sentiero interrotto, ma una via maestra sulla quale rimettersi in cammino. I modelli antichi di studio della natura e della storia sono per gli Umanisti esempi e modelli attuali, dunque vivi e produttivi. Tutt'altra sarà invece la fuga dal reale della cultura neoplatonica, alla quale apparteneva Sandro Botticelli, di poco più anziano di Leonardo, essendo nato nel 1445.

Leonardo da Vinci, che pure conosceva l'ambiente mediceo e del quale frequentava per ragioni di lavoro alcuni dei suoi rappresentanti, se ne tenne però sostanzialmente alla larga, preferendo lo sperimentalismo naturalistico e la concretezza psicologica del suo maestro, Andrea del Verrocchio. Questi, infatti, non riteneva che l'arte dovesse farsi portavoce di una visione simbolica e allegorica dell'etica e neppure che la letteratura o la fede avessero, come avverrà per il tardo Botticelli, tormentato seguace del Savonarola, una sorta di primato sull'esistenza. Verrocchio insegna a Leonardo probabilmente più di quello che gli viene solitamente riconosciuto, in particolare la teoria dei moti dell'animo o "degli affetti". Secondo questa impostazione, la cui origine sta nella retorica aristotelica, i sentimenti, che costituiscono la sfera più profonda e caratterizzante di un individuo, sono dei "moti dell'animo" e non sono di per sé conoscibili, tuttavia questi moti interiori possono essere indirettamente conosciuti tramite l'atteggiarsi del corpo stesso (i "moti esteriori"). L'artista -pittore o scultore non fa differenza- è dunque in grado di rappresentare la dimensione psichica dell'individuo ("Psiche" significa appunto "anima" in Greco) tramite la fisicizzazione della sua dimensione interiore, così la natura "abscondita", grazie alla sua abilità, si fa natura manifesta. Allo stesso tempo, la valorizzazione della gestualità e il costante rapporto con l'osservatore pongono le basi di un'arte nuova, che colloquia e dialoga anche con chi sta fuori dal quadro, prologo di quella retorica della comunicazione efficace che costituirà l'anima della pittura barocca. Leonardo comprenderà a fondo la grande novità psicologica dell'introspezione verrocchiesca e ne farà la travatura sulla quale costruirà la sua visione realistica e concreta dell'uomo. L'uomo di Leonardo, infatti, non è un uomo astratto e ideale, ma appartiene alla realtà variabile e sorprendente del quotidiano, una molteplicità degli enti che ridà dignità alla percezione e all'esistenza sensibile. Verrebbe da dire che non potremmo essere più lontani dall'idealismo neoplatonico, benché non sia affatto chiaro quale fosse l'opinione di Leonardo sul Neoplatonismo. Potremmo anche affermare, con una forzatura retorica, che per Leonardo, come poi nel XVIII secolo con Condillac, "nulla è nell'intelletto che prima non sia stato nei sensi"… un Leonardo "sensista", insomma…

Di certo possiamo dire che con Leonardo, forse con la particolare eccezione di alcune sue Madonne, viene meno la tipizzazione iconografica di una bellezza universale che tanto tormentava il perfezionismo formalistico di Botticelli, o di Filippo Lippi. Quest'ultimo aveva dato a Botticelli "l'imprinting" nella resa della grazia femminile, dell'eleganza della linea e dell'ineffabilità delle immagini sacre.

Con Leonardo si afferma non un'idea superiore del bello, universale e puramente noumenica, ma un concetto pragmatico di bellezza, "differenziale" e sensibile. Il bello, per Leonardo, è semplicemente una "differenza" rispetto alla bruttezza o un caso concreto, più realistico rispetto ai modelli sovrasensibili. Nelle sue più affollate composizioni, come nell'Ultima Cena o nell'Adorazione dei Magi, il Bello e il Brutto convivono come possibilità del reale, come fenomeni dell'esperienza sensibile. Hanno pari dignità, e questo è decisamente moderno.

È da notare, poi, che nella stessa bottega del Verrocchio si formò anche Pietro Perugino, ma che, diversamente da Leonardo, non capì fino in fondo l'atteggiamento empirista e sperimentale del Verrocchio. Anzi, Leonardo fu l'unico dei seguaci del Verrocchio a comprenderne per davvero tutta la sconvolgente novità.

Il fatto è che in quella bottega, forse inconsapevolmente, si stavano ponendo le basi di quel cambiamento di paradigma che renderà Leonardo il primo grande artista del '500, lui che morirà nel 1519, mentre, nonostante la vicinanza d'età, Botticelli (morto nel 1510) sarà ancora e soltanto l'epigono della grande arte del Quattrocento, l'uomo di un secolo ormai concluso. Perché possiamo sintetizzare in modo così drastico questa differente appartenenza storica nonostante entrambi gli artisti considerati vivano buona parte della loro parabola esistenziale nel XV secolo? La risposta sta nella diversa concezione della cultura e della ricerca che anima i due grandi protagonisti dell'età del Magnifico.

Per Botticelli il sapere è dato e l'esperienza dell'Antico semplicemente ce lo rivela. Possiamo contemplarlo o evocarlo, porlo a modello etico, ricorrere alle sue figure retoriche e ai suoi insegnamenti, ma noi moderni non possiamo aggiungervi niente di veramente nuovo. Botticelli rifà la Calunnia di Apelle e ce la mostra, ma, platonicamente, la sua sarà dell'originale antico soltanto una sembianza. L'Antico è infatti l'Età dell'Oro che non ritorna. Possiamo soltanto rimpiangerlo, poiché viviamo in un cattivo presente nel quale l'anima è prigioniera e geme. È la dottrina neoplatonica nella sua dimensione più pessimistica ed è un pessimismo che poi Botticelli rivolgerà contro se stesso quando asseconderà la cupa volontà espiatoria di Girolamo Savonarola e dei suoi seguaci, i "piagnoni". Sarà così che l'anima tormentata di Sandro abbandonerà anche la prospettiva, come nell'aspra "Natività mistica" degli ultimi anni della sua vita, quasi a farsi perdonare il presunto neo-paganesimo delle sue figure, prese in prestito dalla mitologia e dall'Olimpo classico, che tanto l'avevano affascinato in gioventù. La cultura e l'orizzonte conoscitivi di Botticelli sono dunque chiusi in se stessi –"centripeti"- verrebbe da dire, e l'amore per i valori classici è un "peccato" da espiare. Con Botticelli giunge dunque al suo epilogo il conflitto tra visione cristiana e apertura umanistica. È un conflitto tra filosofi e teologi, tra "dover essere" cristianamente inteso e "principio di piacere" laico, che sfortunatamente si serve di figure neopagane per esprimersi. Con Botticelli il sogno sincretistico e ottimistico della *"Pax philosophorum et theologorum"* di Pico della Mirandola va in pezzi e con esso ogni possibilità di giungere a una visione universale della verità e della pace interiore che concili fede e conoscenza. Il testimone di questa contraddizione passerà in seguito a Michelangelo, indubbiamente la figura più tormentata dell'arte del Cinquecento, ma con lui, pur formatosi come Botticelli nell'ambiente neoplatonico e mediceo fiorentino, l'arte prenderà la strada dell'interrogazione esistenziale nell'accettazione del fondamentale squilibrio tra la nostra aspirazione alla totalità e la condizione imperfetta dell'essere ultimamente creature di Dio. Michelangelo, diversamente da Botticelli, vede nell'uomo una grandezza tragica e il suo pessimismo non si fa mai accidia, non rimane inerte contemplazione dell'ineluttabile, ma è dignità che l'uomo trova nella lotta, se necessario anche contro la sua stessa natura, vissuta fino in fondo per guadagnarsi la grazia di Dio.

Per Leonardo, invece, il problema del rapporto tra esistenza e arte non si pone né nei termini della ricerca di un senso ultimo dell'azione umana, né nella costruzione di un'etica cui aderire attraverso le figure allegoriche e la persuasione retorica. Leonardo è e sarà sempre del tutto indifferente a questi temi.

Il nucleo attorno a cui ruota il pensiero di Leonardo è invece la natura dell'azione conoscitiva e se questa debba essere conforme a modelli dati e al principio di autorità oppure no. In questo senso Leonardo può essere considerato una contraddizione in termini dal punto di vista della sua appartenenza logica alle categorie fondanti del Rinascimento.

Il grande artista da un lato conduce a necessaria conclusione le premesse del primo Rinascimento, ma dall'altro le mette coscientemente in crisi. Con Leonardo si ha una linea di faglia nello sviluppo interno del pensiero rinascimentale e avviene il drastico cambiamento di paradigma cui accennavo all'inizio. Da un modello di conoscenza data e fondata sull'esattezza matematico-geometrica si passa a un modello nuovo, che ha la sua ispirazione nella fisica e nella biologia: all'atemporalità e fissità delle scienze fondate sulla logica si sostituisce la dimensione dell'esperienza. Ciò è plasticamente evidente nella prospettiva: Leonardo non considera la prospettiva piana sufficientemente realistica, poiché non è che un portato delle leggi sui triangoli simili. È su queste che la prospettiva si fonda e ciò costituisce tanto la sua forza quanto il suo limite. L'esattezza logica delle triangolazioni della prospettiva è sì splendida, ma è anche al di là dell'umana percezione.

È forzatura della realtà dentro una gabbia che la rende astratta. Già dall'Annunciazione del 1475, infatti, Leonardo è alla ricerca di un fondamento diverso per la prospettiva, che trova nell'intuizione che l'aria non è mero vuoto geometrico, non è assenza di corpi che si contrappone alla presenza dei volumi. Non è la geometria che può dare il segreto della resa della profondità, ma la fisica. Tutto dipende dalla densità dell'aria e dagli effetti che questa, se umida oppure secca, produce sulla percezione dei colori e sulla distinzione dei contorni. Premesse scientifiche conducono alla scoperta della prospettiva atmosferica, e, si faccia attenzione: "scoperta". Leonardo, infatti, ha colto la natura convenzionale della rappresentazione prospettica geometrica, ha colto cioè la natura non ontologica ma strumentale del metodo prospettico, e questo è decisamente straordinario e attiene al puro ambito filosofico, alla gnoseologia pura! Brunelleschi e Alberti avevano "costruito" un modello e con quel modello la profondità era diventata per la prima volta credibile e quasi realistica, ma il modello era pur sempre una costruzione geometrica, non un dato di fatto.  Ora Leonardo "scopre" nella realtà stessa la verità dei rapporti di distanza e la pittura se ne fa mezzo di rappresentazione. La prospettiva atmosferica non è infatti modellizzazione geometrica della Natura, ma la Natura stessa!

Dunque, la verità è esperienza, non ci sono degli "a priori", e la cultura non ha sempre la forza dell'autorevolezza, perché il passato talvolta è un peso, un freno o un inciampo che impedisce di giungere a sempre nuove scoperte. Qui si manifesta un altro snodo cruciale o, come già detto, un'altra faglia rispetto al terreno del primo Rinascimento: si tratta della relativizzazione del principio di autorità. Se ci si pensa bene, la libertà di ricerca tanto esaltata dai primi Umanisti era sì espressione di un affrancamento rispetto alla *forma* *mentis* del Medioevo, ma al prezzo di un recupero entusiastico e spesso altrettanto acritico dei pensatori dell'antichità, ripresi in toto e senza verifiche sulla validità delle loro tesi, specialmente di quelle degli autori scientifici. Leonardo, invece, se da un lato rispetta gli antichi, d'altro lato lo fa perché essi stessi si erano affrancati dai loro maestri. Rispettare i principi morali della ricerca significa spesso tradire i propri maestri, "tradirli" proprio per comprenderli più profondamente. È questo il senso della celebre affermazione con cui Leonardo scrive di essere un "homo sanza lettere". Si è visto in questo un'irrisione della cultura classica, ma ciò non coglie il senso profondo di quell'affermazione. Essere "sanza lettere" o "litterae" voleva dire nel Quattrocento non conoscere né il Latino né il Greco, e dunque vedersi preclusa la via d'accesso alle opere dei grandi maestri, ma se questa fosse stata davvero un'ostentata arroganza o rozza autosufficienza, come si concilierebbe allora con il dato di fatto che Leonardo in realtà il Latino si mise proprio a studiarlo, benché all'età di più di quarant'anni? La risposta è una sola: se d'ignoranza si deve parlare, allora è una forma di "ignoranza socratica", è un "so di non sapere" e una forma di "*epoché*", ovvero di sospensione metodologica del giudizio, con la quale si mettono tra parentesi le verità ereditate per sottoporre tutto a verifica senza pregiudizi, e farlo soprattutto sul piano sperimentale, non con sterili confutazioni retoriche, come si faceva nelle università.

Non basta: Leonardo afferma una concezione dinamica e aperta della conoscenza, nella quale la dimensione pratica, poietica e teorica si integrano a vicenda. Leonardo è consapevole che le risposte che cerca la scienza o le soluzioni cui approda la tecnologia sono sempre di natura provvisoria, a volte incerte e instabili. Ogni risposta alle nostre domande genera inevitabilmente nuovi quesiti, in un processo senza fine, perciò il vero scienziato, l'autentico ricercatore, ma anche il bravo ingegnere, si misurano continuamente con il mistero e l'incertezza. Questi, però, non sono eticamente motivo di sconforto o ineluttabile segno che la tensione conoscitiva dell'uomo è pura "hybris", peccato di tracotanza. L'uomo deve convivere con una concezione del tutto immanente e laica del mistero. Il mistero non è un limite metafisico, ma soltanto il confine temporaneo che perimetra lo stato attuale delle nostre conoscenze e che non ci toglie affatto la speranza di poterlo superare.

La modernità di Leonardo, ed è forse la lezione più profonda che lo rende così straordinario, non sta tanto nella incredibile prolificità del suo talento o nella validità di tutte le sue proposte, anche se la nostra attenzione è attratta dalle sue multiformi "macchine", ma l'idea che il sapere si costruisce per tentativi ed errori, che i "segreti" della natura non hanno niente di metafisico, in conclusione che la strada della scienza è aperta e dinamica, e mai definita una volta per tutte.

# Teorema del calcolo delle ridotte per progressioni aritmetiche polinomiali

## *A calculus theorem for polynomial arithmetic progressions*

ABSTRACT *Lorenzo Millanti*

In generale non esiste un metodo unico per calcolare le somme parziali di tutte le tipologie di successioni ma è possibile farlo soltanto per alcune successioni, come ad esempio nel caso delle progressioni geometriche o di quelle aritmetiche.

Si illustra adesso un metodo per il calcolo esatto delle ridotte che vale sia per le progressioni aritmetiche che per le combinazioni polinomiali dei termini delle progressioni aritmetiche.

Data la progressione aritmetica seguente:

$$a_n = \begin{cases} a_1 & n = 1 \\ a_{n-1} + d & n > 1 \end{cases} \qquad \forall a_1, d \in Q, \forall n \in N^*$$

si ricava:

$$p_n = \begin{cases} a_n & n \le k \\ Pol_m(\{a_n\}) & n > k \end{cases} \qquad \forall k, m \in N$$

dove $p_n$ è la successione delle combinazioni polinomiali di m termini della successione aritmetica $a_n$ di ragione d.

Come metodo della determinazione esatta delle ridotte della successione $p_n$ possiamo ricorrere al calcolo delle differenze finite dei termini consecutivi delle somme parziali $S_n$ di $p_n$.

Questo metodo fornisce il grado q del polinomio, espresso in funzione della variabile n, che a sua volta equivale alla formula algebrica della somma parziale n.esima $S_n$.

Il metodo prevede l'iterazione del calcolo delle differenze finite dei termini di $S_n$ fino al raggiungimento di quell'ordine di differenza q tale che le differenze finite di ordine q+1 sono tutte nulle, il valore di q allora rappresenterà il grado del polinomio cercato, dopodiché siano in grado di ricavare i suoi coefficienti perché vale il seguente Teorema:

$$\exists q \in N \mid \Delta^{q+1} S_n = 0 \quad \forall n \in N^* \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \sum_{j=0}^{q} \beta_j n^j \quad dove \quad \beta_j \in Q \quad \forall j$$

Dimostrazione del teorema.

Dimostrazione del verso $\Leftarrow$

Data la serie polinomiale di grado q

$$S_n = \sum_{j=0}^{q} \beta_j n^j \quad dove \quad \beta_j \in Q \quad \forall j$$

Si calcola la differenza di ordine 1 seguente

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{j=0}^{q} \beta_j (n+1)^j - \sum_{j=0}^{q} \beta_j n^j$$

$$= \sum_{j=0}^{q} \beta_j [(n+1)^j - n^j]$$

Sostituendo $(n+1)^j$ con il corrispondente binomio di Newton, si ottiene

$$= \sum_{j=0}^{q} \beta_j [(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} n^{j-k} 1^k) - n^j]$$

$$= \sum_{j=0}^{q} \beta_j [(n^j + jn^{j-1} + \frac{j(j-1)}{2} n^{j-2} + \dots + jn + 1) - n^j]$$

$$= \sum_{j=0}^{q} \beta_j [jn^{j-1} + \frac{j(j-1)}{2} n^{j-2} + \dots + jn + 1]$$

Ciò che si ottiene è un polinomio di grado q-1 e non più di grado q come $S_n$.

Calcolando le differenze semplici di ordine successivo al primo, si itera ciò che è stato appena fatto per la differenza di ordine 1 e, quindi, ad ogni iterazione si ridurrà di 1 il grado il polinomio della serie $S_n$. Così procedendo, sarà possibile calcolare le differenze di ordine q delle $S_n$ che daranno come risultato dei polinomi di grado zero costituito da un valore numerico costante K (∈ Q) al variare di n, ossia

$$\Delta^q S_n = \mathrm{K} \quad \forall n \in N^*$$

dove K ∈ Q. Di conseguenza

$$\Delta^{q+1} S_n = 0 \quad \forall n \in N^*$$

come volevasi dimostrare.

Dimostrazione del verso ⇒
Si procede per induzione.
Si sceglie un qualunque valore di q ∈ N.

Step 1
Posto n = 1, poiché per n = 1 la serie $S_n$ è costituita da un solo addendo per definizione di serie numerica allora

$$S_1 = a_1$$

e se

$$\Delta^{q+1} S_1 = 0$$

allora in particolare

$$\Delta^1 S_1 = 0$$

quindi

$$S_1 = a_1 = \beta_0$$

dove $\beta_0$ ∈ Q è una costante.

Quindi, la tesi è vera perché il valore numerico $\beta_0$ è anche un polinomio di grado zero.

Step 2
Si assume che n>1 e che se

$$\Delta^{q+1} S_n = 0$$

allora

$$S_n = \sum_{j=0}^{q} \beta_j n^j \quad dove \quad \beta_j \in Q \quad \forall j$$

Si ipotizza poi che

$$\Delta^{q+1} S_{n+1} = 0$$

e si osserva che per definizione di somma parziale di una successione

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + p_{n+1}$$

e poiché

$$S_n = \sum_{j=0}^{q} \beta_j n^j \quad dove \quad \beta_j \in Q \quad \forall j$$

allora $S_n$ è somma di un polinomio di grado q con un singolo valore della successione degli $a_n$ (o dei $p_n$) e quindi $S_{n+1}$ continua ad essere un polinomio di grado q perché composizione di polinomi danno come risultato polinomi di grado pari al massimo dei polinomi composti, come volevasi dimostrare.
Quindi, all'interno della serie $S_n$, i coefficienti $\beta_j$ con j=0,1,2,…,q si calcolano in modo esatto tramite il sistema seguente ottenuto imponendo a $S_n$ di soddisfare le prime q+1 somme parziali:

$$\begin{cases} S_1 = \sum_{j=0}^{q} \beta_j (1)^j \\ S_2 = \sum_{j=0}^{q} \beta_j (2)^j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_q = \sum_{j=0}^{q} \beta_j (q)^j \\ S_{q+1} = \sum_{j=0}^{q} \beta_j (q+1)^j \end{cases}$$

In questo modo, otterremo il valore dei q coefficienti e di un ulteriore termine noto che definiscono un polinomio di grado q in funzione di $n \in N^*$ che al variare di n fornisce i valori delle ridotte della serie $S_n$.

# Sistema Internazionale di Unità di Misura: note applicative e cenni storici

# *International System of Units: application and historical notes*

***Antonio Salmeri*** [1] **-** ***Marcello Salmeri*** [2]

**Abstract**

*Given the recent modification of the International System of Units, we show the changes that it introduced, that actually have no effects in our life. We take the opportunity to recall the correct writing of symbols and notations, unfortunately very often ignored or disregarded, remembering that in Italy a law imposes them since 1982 and that their incorrect use can invalidate official documents. To get a better understanding of the importance of the International System of Units, we report, by way of curiosity, what were the units of length, surface, capacity, weight and values in the various Italian cities taken from an authoritative arithmetic book of the early 1900s.*

## Recenti modifiche apportate al SI

Dal 20 maggio 2019, data coincidente con la Giornata Mondiale della Misurazione, è entrato in vigore il nuovo Sistema Internazionale di Unità di Misura (SI). Da un punto di vista pratico nulla è cambiato: il valore delle sette unità di misura fondamentali è rimasto invariato, ma sono cambiate diverse definizioni. Le unità sono ora definite in termini di altrettante costanti naturali invariabili (o allo stato attuale presunte tali). Queste sono state quindi espresse attraverso un valore che rimarrà fisso nel tempo. Questo passo fondamentale è stato reso possibile sia dalla tecnologia che da scoperte scientifiche come gli effetti quantistici.

Viene quindi dismesso l'ultimo manufatto ancora utilizzato come campione di misura, il kilogrammo, e la sua definizione è ricondotta al valore della

[1] Direttore di "Euclide. Giornale di matematica per i giovani", Roma, salmeriantonio@tiscali.it.

[2] Docente di "Misure ed Analisi Dati" presso l'Università degli Studi di Roma Tor Vergata, Roma, salmeri@ing.uniroma2.it.

costante di Plank. Si risolve in questo modo l'annoso problema della non stabilità della massa del kilogrammo campione che pare sia variata negli ultimi 100 anni di circa 50 microgrammi.

Inoltre la non stabilità del campione di massa si ripercuoteva sulle unità di intensità luminosa (candela), intensità di corrente elettrica (ampère) e ammontare di sostanza (mole) a causa della interdipendenza nelle definizioni di queste in funzione del kilogrammo.

Scompaiono inoltre definizioni legate a esperimenti ideali, ma irrealizzabili, come quella dell'ampère che era legata alla realizzazione di "due conduttori di lunghezza infinita e sezione trascurabile".

Ora, qualunque laboratorio in possesso della adeguata strumentazione sarà in grado di riprodurre campioni delle unità di misura senza riferirsi a campioni primari. Essendo inoltre le unità definite in termini di grandi multipli di piccole quantità sarà molto più semplice la realizzazione di campioni di sottomultipli di unità (come il grammo o il milligrammo per esempio).

**Uso corretto delle unità**

Non ci sembra fuori luogo ricordare alcune regole sulla scrittura dei numeri e l'uso corretto di alcune unità troppo spesso ignorate o disattese. Riteniamo opportuno in questa occasione ricordare come esso è nato e si è in continuazione modificato.

Il precursore è il sistema metrico decimale elaborato da una commissione presieduta da Lagrange dal 1791. Tale sistema si diffonde lentamente in tutta Europa.

Unità, terminologia e raccomandazioni del SI sono fissate dalla "Conférence générale des poids et mesures" (CGPM, "Conferenza generale dei pesi e delle misure").

Il sistema nacque nel 1889 con la 1ª CGPM: allora si chiamava "Sistema MKS" perché comprendeva solo le unità fondamentali di lunghezza (m), di massa (kg) e di tempo (s). Nel 1935, su proposta del fisico italiano Giovanni Giorgi, il sistema fu denominato "Sistema MKSΩ" e adottato dalla Commissione Elettrotecnica Internazionale, perché la quarta unità fondamentale introdotta era stato l'ohm, unità di misura della resistenza elettrica. Nel 1946, ancora su proposta di Giorgi, la CGPM approvò l'entrata dell'ampère come unità di misura fondamentale della corrente elettrica, in luogo della resistenza elettrica. Nacque così il "Sistema MKSA", chiamato anche "Sistema Giorgi", in onore del proponente. Nel 1954 la 10ª CGPM aggiunse il kelvin e la candela come unità di misura fondamentali.

Nel 1961 la 11ª CGPM sancì la nascita del Sistema internazionale di Unità di Misura (SI).

Nel 1971 la 14ª CGPM aggiunse la mole fra le unità fondamentali.

Infine nel 2018 la 26ª CGPM ridefinisce le unità fondamentali in termini di costanti fisiche.

Quindi oggi il SI è basato su sette grandezze fisiche fondamentali e sulle corrispondenti unità di misura con le quali vengono definite le grandezze fisiche derivate e le corrispondenti unità di misura.

Inoltre il SI definisce i prefissi da aggiungere alle unità di misura per identificare multipli e sottomultipli. Il SI è un “sistema coerente” in quanto le sue grandezze fisiche derivate si ricavano come prodotto e rapporto di grandezze fisiche fondamentali senza uso di multipli o sottomultipli.

I continui cambiamenti nel tempo hanno però creato difformità di scrittura nei simboli e nei numeri in quanto molti continuano a utilizzare le regole imparate a scuola senza aggiornarsi sulle evoluzioni.

Si ricorda che nei testi di carattere tecnico e scientifico è obbligatorio che le unità di misura siano scritti in maniera corretta in accordo al DPR n. 802 del 12 agosto 1982.

Tale Decreto all’art. 4 prevede pesanti sanzioni amministrative e pecuniarie che espresse in valuta del tempo erano fissate da un minimo di L. 500 000 a L. 1 500 000.

Si riportano qui di seguito, per gli usi più comuni, le principali regole per le quali si rimanda per completezza ai documenti ufficiali.

I simboli devono essere indicati con l’iniziale minuscola (ad eccezione di quelli in cui l’unità di misura è eponima o deriva dal nome di una persona e non devono essere seguite dal punto. Si scrive kg (kilogrammo), kN (kilonewton) e non Kg e KN.

I simboli devono seguire, separati da uno spazio, il valore numerico a cui si riferiscono e non precederlo. Pertanto è corretto scrivere 12 kg e non kg 12. Fanno eccezione i simboli per le valute monetarie, si scrive infatti € 320 e non 320 € ed anche €/kg 35 e non € 35/kg.

Le unità di misura, all’interno di un testo, dovrebbero essere scritte per esteso e non con il simbolo e va usato il carattere tondo minuscolo senza accenti o segni diacritici.

Particolare attenzione bisogna porre a quei simboli che nelle precedenti disposizioni erano diversi da quelli del SI:

- si scrive s e non sec,
- si scrive g e non gr,
- si scrive t e non ton (unità non SI ma ammessa),
- si scrive m$^2$ e non mq,
- si scrive cm$^2$ e non cmq,
- si scrive cm$^3$ e non cc,
- si scrive m$^3$ e non mc,
- si scrive m e non ml,
- si scrive l o L e non lt

Si rammenta che la scrittura cmq o mq veniva usata nel Sistema metrico decimale.

Le unità derivate si scrivono separando le stesse con uno spazio o un punto centrale oppure interponendo fra numeratore e denominatore il tratto obbliquo di divisione o utilizzando gli esponenti negativi.

Si scrive N m oppure N·m e non Nm o N.m o N x m, così come si scrive m/s oppure m $s^{-1}$ e non m / s,

Si fa inoltre presente che alcune unità di misura, di uso comune, sono state abolite e, nonostante tutto, vengono ancora erroneamente usate; ne riportiamo alcune:

- è abolito q (quintale) = 100 kg
- è abolito hp o HP o Hp (cavallo vapore) = 745,699 W,
- è abolito CV (cavallo vapore) = 735,499 W, esso è utilizzato soltanto per calcolare la potenza di un motore di un'auto per fini fiscali,
- è abolita atm n (atmosfera normale) = 1101 325 Pa,
- è abolita atm t (atmosfera tecnica) = 98 066,5 Pa,
- è abolito kgf (kilogrammo-forza) o kgp (kilogrammopeso = 9,8126 N),
- è abolito mm Hg (millimetri di mercurio) = 133,322 Pa,
- è abolito mm $H_2O$ (millimetro d'acqua) = 9,81 Pa,
- è abolito cal (caloria) = 4,187 J,
- è abolito Cal (grande caloria) = 4186,8 J,
- è abolito °F (grado Fahrenheit) = 5/9 K e non 5/9 °K,
- è abolito b (bes) = 1 kg.

Per alcune di queste è ammesso l'uso parallelo esclusivamente da scrivere fra parentesi a fianco di quello del SI.

**Scrittura dei numeri**

Anche la scrittura dei numeri nel tempo è stata modificata. Le attuali regole prescrivono uno spazio per separare le cifre intere in gruppi di tre per i numeri che hanno più di quattro cifre. Ad esempio si scrive 1982 e non 1 982, si scrive 1 000 000 e non 1000000, si scrive 342 142 e non 342142.

Si usa la virgola e non il punto come separatore fra la parte intera e la parte decimale, ovvero si scrive 247,13 e non 247.13. Il punto è stato ammesso nel 2003 limitatamente per i testi in lingua inglese.

Nella scrittura della parte decimale ci si limita al numero di cifre necessarie per esprimere esattamente il valore voluti; ove le cifre significative sono poche, si raccomanda di usare l'unità SI o quel suo multiplo o sottomultiplo che dia luogo a valori numerici compresi fra 0,1 e 1000, con il criterio di scrivere soltanto le cifre significative; per esempio al posto di 0,00394 m si scriverà 3,94 mm ed al posto di 12 000 N si scriverà 12 kN.

**Unità non SI ma accettate**

Fra le unità di misura non SI, ma il cui uso è ufficialmente ammesso, troviamo le seguenti misure di tempo:

- minuto con simbolo min,
- ora con simbolo h,
- giorno con simbolo d.

Di conseguenza la velocità si deve esprimere in m/s, ma è ammessa anche la velocità espressa in km/h.

Sono ammesse anche le seguenti misure di angolo piano:

- grado di arco con simbolo ° che segue il numero, ovvero si scriverà 45° ed anche 37,2° dove 1° = (π/180) rad.
- minuto primo con simbolo ’, equivalente ad 1/60 di grado di arco,
- secondo con simbolo”, equivalente ad 1/60 di minuto primo.

Per queste ultime si preferisce utilizzare i decimali di grado di arco, quindi invece di scrivere 27°15’ si preferisce usare la divisione decimale del grado 27,25°.

Inoltre sono ammesse le seguenti unità:

- litro, con simbolo l (elle) e in alternativa L per evitare confusione con il numero 1, equivalente ad un volume di 1 $dm^3$. Del litro sono ammessi il sottomultiplo decilitro con simbolo dl ed il multiplo ettolitro con simbolo hl, mentre per i volumi maggiori si usa il $m^3$. Per esempio al posto di 10 000 L si scriverà 10 $m^3$. Nel sistema metrico decimale il litro era l’unità di misura della capacità che nel SI è stata inglobata nelle unità di volume,
- tonnellata, con simbolo t, equivalente a 1000 kg, miglio nautico (ma non miglio terrestre) con simbolo nm, equivalente a 1852 m,
- ettaro, con simbolo ha, equivalente a 10 000 $m^2$,
- nodo, con simbolo kn, equivalente ad un miglio nautico all’ora, ovvero a circa 0,514 m/s.
- Misure antiche nelle principali città d’Italia

È noto che prima dell’entrata in vigore del Sistema metrico decimale, ogni località aveva unità di misura proprie diverse da città a città. Il loro uso continuò, e a volte nei ceti poco scolarizzati continua ancora, per tradizione. In un libro di "Elementi di Aritmetica Pratica" del 1902 di Michele De Franchis, Ordinario di Geometria proiettiva e descrittiva nella R. Università di Catania, troviamo un capitolo denominato "Tavole di ragguaglio delle misure antiche delle principali città d'Italia con quelle del sistema metrico decimale introdotto in Francia nel 1795 e diffusosi negli anni seguenti in tutta Europa ad eccezione dell'Inghilterra".

In un Regio Decreto del 27 gennaio 1851 a firma di Vittorio Emanuele II troviamo:

> *Art. 1 - L'indennità di via, che per lo addietro si corrispondeva in ragione di miglio di Piemonte, sarà invece corrisposto in ragione di chilometro. Il peso dei bagagli militari sino ad ora calcolato a rubbo di Piemonte sarà invece calcolato a miriagramma.*

A titolo di curiosità storica, riportiamo alcune principali unità in uso nelle varie città italiane, semplificando tali informazioni. Per esempio in alcune città si faceva distinzione fra capacità relative a vino o a olio e sempre per le capacità si trovano unità diverse se riferite a prodotti liquidi o solidi, chiamati questi ultimi "aridi", qui di seguito per semplicità faremo riferimento soltanto a liquidi.

Nell'ordine per ogni località (in ordine alfabetico) riporteremo le misure di Lunghezza (L), di Capacità (C), di Peso (P) e di Moneta (M) con cambio in Lire italiane (Lit) rapportato al 1904.

***Bologna***

L: Miglio (2080,44 m); Pertica (4,16 m); Piede (0.416 m)
C: Castellata (785,03 L); Corba (78,50 L); Quartirola (19,62 L)
P: Peso (9,41 kg); Libbra (0,36 kg); Oncia (0,03 kg)
M: Scudo (5,32 Lit)

***Cagliari***

L: Miglio (2548,56 m); Trabucco (3,19 m); Piede (0,53 m)
C: Botte (44,84 L); Quartara (4,48 L); Mezzetta (1,12 L)
P: Cantaro (40,66 kg): Libbra (407 g); Oncia (33,87 g); Quarto (8,47 g)
M: Carlino (49,34 Lit); Doppietta (8,07 Lit): Lira (1,61 Lit)

***Firenze***

L: Miglio (1646,09 m); Canna (2,92 m); Braccio (0,58 kg)
C: Barile (45,58 L); Fiasco (2,28 L); Mazzetta (0,57 L)

P: Cantaro (50,92 kg); Libbra (340 g); Oncia (28,33 g); Denaro (1,18 g)
M: Lira (0,84 Lit); Soldo (0,04 Lit)

***Genova***
L: Miglio (1488,48 m); Cannella (2,98 m); Palmo (24,81 cm)
C: Barile (65,48 L); Quarterone (0,51 L); Misuretta (0,08 L)
P: Cantaro (47,65 g); Rubbo (7,94 g); Libbra (0,32 g)
M: Lira (0,84 Lit); Soldo (0,04 Lit)

***Milano***
L: Miglio (1784,81 m); Braccio (0,59 m); Oncia (4,92 cm)
C: Brenta (75,55 L); Staia (25,18 L); Quartara (6,29 L); Boccale (0,79 L)
P: Quintale (32,68 kg); Rubbio (8,17 kg); Libbra (326,80 g)
M: Fiorino (2,25 Lit)

***Napoli***
L: Miglio (1851,85 m); Canna (2,64 m); Palmo (26,4 cm)
C: Botte (43,62 L); Barile (3,63 L); Caraffa (0,06 L)
P: Cantaro (80,01 kg); Rotolo (0,80 kg); Trappeso (0,8 g)
M: Ducato (4,25 Lit); Carlino (0,42 Lit); Grano (0,04 Lit)

***Palermo***
L: Miglio (1485,64 m); Corda (33,04 m); Canna (2,06 m)
C: Botte (412,63 L); Barile (34,39 L); Quartuccio (0,85 L)
P: Cantaro (79,34 kg); Rotolo (793,42 g); Oncia (66,12 g)
M: Ducato (4,25 Lit); Baiocco (0,04)

***Roma***
L: Miglio (1489,04 m); Canna (1,99 m); Palmo (24,87 cm)
C: Botte (933,44 L); Soma (226,68 L); Barile (113,34 L)
P: Quintale (33,91 kg); libbra (339,07 g); Oncia (28,25 g)
M: Scudo (5,38 Lit); Paolo (0, 54 Lit); Baiocco (0,05 Lit)

***Torino***
L: Miglio (2409,14 m); Trabucco (3,08 m); Piede (51,33 cm)
C: Sacco (33,05 L); Emina (6,61 L); Coppo (0,83 L)
P: Rubbo (9,22 kg); Libbra (368,88 g); Oncia (30,74 g)
M: Marengo (23,6 Lit); Lira (1,18 Lit); Soldo (0,06 Lit)

***Venezia***
L: Miglio (1738,67 m); Passo (1,74 m); Piede (34,77 cm)
C: Moggio (333,27 L); Staio (83,32 L); Mezzeno (41,66 L)

P: Libbra (476,99 g); Oncia (39,75 g); Carato (0,21 g)
M: Lira (0,52 Lit); Soldo (0,03)

**Cronologia**

Qui di seguito le date principali dell'evoluzione del SI.

- 1882 Sistema CGS - centimetro, grammo secondo
- 1889 1a Conferenza generale dei pesi e delle misure
- 1889 Sistema MKS - metro, kilogrammo, secondo
- 1890 Testo unico delle leggi metriche n. 7088 del 23 agosto
- 1935 Sistema MKSΩ - metro, kilogrammo, secondo, ohm
- 1945 Provvedimento legislativo del 23 novembre
- 1946 Sistema MKSA - metro kilogrammo, secondo, ampere
- 1961 Sistema Internazionale
- 1982 DPR n. 802 del 12 agosto

**Bibliografia**

[1] MICHELE DE FRANCHIS, Elementi di Aritmetica Pratica, Remo Sandron Editore, 1902.

[2] ANTONIO SALMERI, Brevi note sul Sistema Internazionale, N. 1, Gen - Apr 2009, Vol. 1, S. XI, Anno CXIX.

[3] MARCELLO SALMERI, Misure ed Analisi Dati, Mar 2019, TeXMAT.

# Prime esperienze di creatività in matematica per una scuola primaria

# *First experiences of creativity in mathematics for a primary school*

***Matteo Fantinati*[1] *- Federico Malucelli*[2]**

**Abstract:**

*In the early years of school, pupils have a very positive approach towards any new topic. In the Italian school the first taste of mathematics often risks to give a limited and somehow negative impression with long lasting effects. In this paper we report on a small experience carried out in a second year class of a primary school, where we introduced a series of games during the classes of mathematics. The aim was to stimulate the creativity and empower pupils. We have used simple materials and applied the Puzzle Based Learning technique. Despite the limited time devoted to this experience, the outcomes have been extremely positive.*

## 1. Introduzione

I bambini dei primi anni delle elementari generalmente affrontano qualsiasi argomento con grande entusiasmo e motivazione. Risulta davvero facile catturare la loro attenzione e coinvolgerli attivamente nel processo di apprendimento. Generalmente nelle prime classi della primaria il primo contatto con la matematica riguarda i numeri e l'aritmetica. Questo è senza dubbio importante per dare agli alunni gli strumenti di base per destreggiarsi con concetti più avanzati da affrontare più avanti nella loro carriera scolastica. Tuttavia questa attività assorbe la maggior parte del tempo. Al di là di quelle che sono le "Indicazioni nazionali per il curricolo del 2012", bisogna convenire che l'equivalenza che si rischia di instaurare tra matematica e aritmetica può essere fuorviante, e generare un'idea arida e poco creativa della disciplina.

---

[1] Ist. Comp. 5 Dante Alighieri di Ferrara, fantinatimatteo@libero.it

[2] DEIB, Politecnico di Milano, P. L. da Vinci 32, federico.malucelli@polimi.it

Ci si pongono spesso delle domande banali: perché i primi approcci alla matematica riguardano le operazioni di base e le "tabelline" da imparare a memoria? Gli stessi primi approcci all'italiano e alla musica, tanto per citare due materie molto coinvolgenti, e però non meno creative della matematica, raramente riguardano l'analisi grammaticale e il solfeggio.

Perché quando guardiamo un disegno di un bambino, dove lo si lascia libero di esprimere la propria creatività, lo troviamo bello e originale, ma non diamo la possibilità di fare la stessa cosa in matematica?

L'impressione e le sensazioni che si ricevono dai primi approcci restano a lungo. Come sostenuto in [11], la combinazione di esecuzione di attività ripetitive, l'apprendimento a memoria e la ripetizione meccanica di concetti creano i presupposti per inibire qualsiasi slancio creativo, non solo nella matematica.

Il rischio quindi è di far crescere i bambini con un'idea distorta della matematica con ricadute che possono essere decisive sulla loro carriera scolastica e più a lungo termine sul loro futuro, come l'eventuale scelta universitaria e le opportunità lavorative.

In questo contesto, la questione fondamentale, anche in alunni delle prime classi della primaria, è cercare di stimolare la creatività attraverso la curiosità e dare agli alunni l'opportunità di un apprendimento "inclusivo", dove possano avere un ruolo attivo nell'identificare ed esplorare la conoscenza [11]. Alcuni docenti potrebbero avere l'impressione di non essere in grado di affrontare un simile compito. Con la nostra esperienza, dove proponiamo attività semplici e alla portata di tutti, vogliamo dimostrare il contrario.

Con il presente articolo non vogliamo dare un contributo teorico-pedagogico all'insegnamento della matematica nella scuola primaria. Vogliamo piuttosto illustrare un piccolo progetto (meno di 10 ore in totale) realizzato nell'anno scolastico 2016-17 in una classe seconda primaria di Ferrara. Gli obiettivi del progetto sono stati principalmente quelli di aprire una piccola finestra su una visione alternativa della matematica e dell'informatica ponendo l'accento sulla componente creativa e intuitiva delle due materie, con l'unico scopo di stimolare la curiosità e la voglia di scoprire degli alunni.

Secondo lo psicologo Wertheimer [16], l'obiettivo chiave dell'attività scolastica è quello di favorire il cosiddetto "*pensiero produttivo*" negli studenti, orientare cioè gli alunni alla risoluzione di problemi nuovi e inconsueti per stimolare la componente intuitiva. Il nostro scopo è stato proprio questo: proporre attività che facessero emergere l'intuizione e la capacità di affrontare problemi nuovi da parte dei bambini, il cosiddetto *insight* di Köhler [12, 4], attivare cioè i meccanismi cognitivi che permettono di risolvere situazioni mai affrontate.

Secondo Emma Castelnuovo [3], l'osservazione, l'uso di materiali e oggetti e la loro manipolazione sono gli strumenti principali per innescare il processo di intuizione e creazione. Per perseguire questo obiettivo abbiamo fatto ricorso al racconto di storie [5], abbiamo utilizzato materiali semplici come corde, cartoncini, torce elettriche, grucce appendiabiti [2], e soprattutto abbiamo fatto muovere i bambini in spazi aperti o in palestra, anche se talvolta il rischio è stato quello di creare situazioni un po' caotiche.

Ci si è ispirati alle tecniche dell'apprendimento basato su rompicapo (*Puzzle Based Learning* [13]) facendo leva sulla componente ludica delle attività, utilizzando il più possibile materiali, strumenti tratti dalla vita quotidiana, proponendo agli alunni giochi e lavoro a gruppi.

Nel seguito riprenderemo brevemente i concetti di base del Puzzle Based Learning, per poi descrivere in sintesi le attività svolte, mettendo in luce ogni volta lo scopo dell'incontro. Un breve resoconto sui risultati conseguiti concluderà l'articolo.

## 2. Puzzle based learning

Il *Puzzle Based Learning* [13] è un approccio didattico che ha l'intento di sviluppare le capacità di ragionamento, la perseveranza e la motivazione nell'affrontare i problemi, fornendo quindi le basi fondamentali delle tecniche di *problem solving*. In questo contesto, il docente guida solamente lo svolgimento delle attività lasciando gli alunni liberi di affrontare il problema e di sperimentare metodi di soluzione, o al limite riportandoli in carreggiata se necessario.

Il ruolo del docente non è quello di "insegnare" a risolvere i problemi, quanto invece quello di proporre giochi stimolanti per tutti, seguire il ragionamento degli alunni, arrivare assieme a loro alla soluzione. Egli deve essere pronto ad accettare metodi di risoluzione dei problemi diversi da quello che ha pensato. Il docente deve essere quindi pronto a mettersi in gioco e non trovarsi a disagio di fronte a possibili intoppi. Adottando una similitudine sportiva, il docente assume, durante il *Puzzle Based Learning*, il ruolo dell'allenatore, le cui capacità motivazionali devono essere preponderanti rispetto a quelle meramente tecniche.

In questo modo gli studenti sono chiamati in prima persona a cercare nuove strategie di "*problem solving*", a scegliere tra opzioni diverse, a prendere decisioni e agire con flessibilità, ad acquisire ed interpretare le informazioni, ad individuare collegamenti e relazioni [10].

Gli insegnanti devono solo favorire un apprendimento per scoperta ovvero un apprendimento basato sull'esperienza dei discenti che si attua attraverso il fare e l'operare, un apprendimento cooperativo e collaborativo che riesca a potenziare la motivazione degli studenti. Gli insegnanti svolgono il ruolo di motivatore - stimolatore, una sorta di tutor che utilizza le abilità dei discenti per arrivare a costruirne altre di livello superiore ("*scaffolding*") [14].

## 3. Esperienza in classe

La classe in cui abbiamo svolto l'attività è composta da 26 alunni, alcuni dei quali molto vivaci e altri difficilmente coinvolgibili in attività strutturate. Fin dall'inizio gli alunni hanno capito lo spirito delle attività, anche perché ne hanno apprezzato la componente ludica.

Riportiamo sinteticamente le esperienze fatte durante i 6 incontri della durata di circa un'ora e mezza, svolti durante l'orario curricolare, elencando brevemente le attività e la loro finalità.

Incontro 1: ***Rompiamo il ghiaccio e scopriamo la topologia***

Il primo incontro ha avuto lo scopo di far cadere ogni timore reverenziale nei confronti del docente esterno e far entrare immediatamente gli alunni nello spirito del *Puzzle based learning* assumendo un ruolo attivo. Vista l'età dei bambini e la loro spontaneità, la cosa non ha richiesto un grande sforzo, più attenzione ha richiesto invece farli giocare secondo le regole stabilite. Abbiamo proposto un rompicapo fisico molto coinvolgente, già sperimentato in precedenza in una classe di scuola secondaria superiore [9]. Gli alunni sono stati suddivisi in gruppi di 3 e in ognuno è stato designato un volontario che ha indossato una maglietta e a cui sono stati legati i polsi con una corda che lasciasse una ventina di centimetri di gioco. La sfida consisteva nel togliersi la maglietta e infilarla nuovamente in modo che, una volta rinfilata, risultasse rovesciata con l'etichetta all'esterno e sulla schiena. Il compito degli assistenti del volontario è stato quello di aiutarlo nei movimenti limitati dalla corda e suggerire le azioni da fare per arrivare alla soluzione. Il docente ha solo stimolato l'osservazione: cosa succede alla maglietta una volta sfilata? Rimane appesa come quando si stende il bucato, ha osservato qualcuno. È dritta o è alla rovescia? Se la infiliamo nuovamente facendo l'operazione inversa, cosa succede? Come possiamo fare per rovesciarla prima di infilarla nuovamente? Dopo qualche tentativo tutti i gruppi sono arrivati alla soluzione. Abbiamo quindi proposto a tutti di provare a progettare una maglietta utilizzando dei nastri di carta lunghi una ventina di centimetri e larghi 3, della colla e delle forbici, ottenendo un anello, con un "dentro" e un "fuori" che possono essere colorati in modo diverso. Abbiamo poi invitato i bimbi con un alto nastro di carta delle stesse dimensioni a costruire una "maglietta", quindi un altro anello, in cui non fosse possibile distinguere il "dentro" dal "fuori", ovvero un anello di Moebius; la proprietà è stata verificata tracciando con una matita una linea longitudinale all'interno del nastro chiuso. Li abbiamo quindi spinti a sperimentare cosa succede ai due tipi di anelli tagliandoli con le forbici longitudinalmente sul centro, o rimanendo a un cm dal bordo, scoprendo qualche cosa di magico. Abbiamo quindi concluso l'incontro mostrando alla classe delle immagini di opere d'arte dove viene rappresentato l'anello di Moebius, come per esempio molte opere di Escher.

Incontro 2: ***Il problema di ottimizzazione più antico della storia***

I problemi di ottimizzazione sono abbastanza semplici da cogliere, dopo tutto l'ottimizzazione è insita nella natura umana, e nella natura più in generale. Lo scopo di questo incontro è stato quello di far entrare in contatto i bimbi con lo spirito dell'ottimizzazione. La stessa Emma Castelnuovo proponeva nei suoi libri di testo per le scuole medie, coraggiosamente ma a ragion veduta, i primi rudimenti di programmazione lineare. Esperienze di problemi di ottimizzazione affrontati in una scuola superiore sono riportati in [8,15]. L'importanza dell'ottimizzazione nella scuola superiore e la sua collocazione nei programmi in Italia e all'estero è descritta in [6].

Siamo partiti raccontando la leggenda della regina Didone quando, giunta con le sue navi su quelle che oggi sono le coste tunisine, chiese agli abitanti locali se potevano cederle un fazzoletto di terra grande quanto la pelle di un bue. Didone però fece tagliare la pelle del bue in modo da formare una corda molto lunga e la utilizzò per racchiudere il pezzo di terra più grande possibile e in questo modo fondò la città di Cartagine.

Siamo andati in palestra per "giocare a Didone". La classe è stata divisa in 3 gruppi di circa 8 bambini e ogni gruppo è stato dotato di una corda chiusa ad anello lunga 8 metri. Ogni gruppo ha fatto finta di essere l'equipaggio di una nave di Didone che aveva bisogno di uno spazio per poter dormire. Dato che la classe ovviamente non era ancora in possesso del concetto di area, abbiamo utilizzato i bambini sdraiati a terra come unità di misura. Inizialmente ci siamo limitati a fare forme rettangolari, scoprendo che nei rettangoli lunghi e stretti ci stavano pochi bimbi, nel quadrato ce ne stavano 4. Se invece lasciavamo la corda libera di assumere la forma più utile abbiamo scoperto che nel cerchio ci stavano tutti quelli di un equipaggio, anche se un po' stretti. Abbiamo quindi chiesto di indovinare cosa sarebbe successo unendo due corde e avendo quindi un perimetro doppio rispetto a prima e tutti si sono sbilanciati nel dire che se una corda riusciva a ospitare 8 bimbi, due corde unite ne avrebbero ospitati il doppio. Con molto stupore invece hanno verificato che con due corde unite si riusciva a sistemare tutta la classe, e anche molto comodamente.

Uno scopo secondario del gioco è stato anche quello di introdurre i concetti di perimetro e di area e di osservare come le due misure siano correlate.

Incontro 3: ***Arianna, Teseo e il labirinto***

Lo scopo di questo incontro è stato quello di far entrare in contatto i bimbi con i primi elementi di programmazione.

Siamo partiti dalla storia di Teseo e del Minotauro rinchiuso nel labirinto e abbiamo spiegato lo stratagemma utilizzato da Arianna per permettere a Teseo di fuggire. Questo è stato lo spunto per giocare con i labirinti. Abbiamo distribuito un piccolo labirinto rappresentato su un foglio quadrettato e abbiamo chiesto di trovare l'uscita a partire da un punto abbastanza centrale. Abbiamo inoltre invitato i bimbi a fare attenzione alla sequenza degli spostamenti fatti: numero di passi in avanti, svolte a destra, svolte a sinistra. Abbiamo quindi riproposto lo stesso labirinto in scala maggiore su un grande foglio di carta da pacchi, dove i quadretti avevano lato 20 cm e abbiamo aperto una sfida a gruppi a chi riusciva a fare uscire una Beebot[3] dal labirinto, programmandone gli spostamenti. Come ultima attività, abbiamo fatto notare ai bimbi come uscire da un labirinto vedendolo dall'alto non è difficile, mentre Teseo non poteva avere la visione dall'alto. Abbiamo quindi invitato i bimbi a pensare cosa potrebbe fare Teseo nel labirinto. Non avendo a disposizione un labirinto vero in cui immergerci, sul tipo dei labirinti di siepi o di piante di mais che si possono trovare in varie località, abbiamo dato loro un labirinto racchiuso in una scatola da scarpe e fatto con dei "muri" di cannucce per bibite incollate opportunamente. Sul pavimento della scatola abbiamo messo un foglio lucido e l'uscita del labirinto è stata aperta sul bordo della scatola. Abbiamo quindi coperto la scatola con un cartoncino in cui abbiamo praticato un foro dove abbiamo inserito un pennarello da lavagna bianca, in modo da poter ricostruire il percorso fatto una volta tolto il coperchio, e poter cancellare facilmente la traccia per fare un altro tentativo. I bimbi a turno hanno provato a uscire dal labirinto sperimentando varie strategie e verificando come quella di tenere sempre la destra, o sempre la sinistra, sebbene non dessero luogo al percorso più breve, permettessero sempre di uscire dal labirinto senza perdersi.

Incontro 4: ***L'invenzione degli scacchi e i numeri binari***

Lo scopo di questo quarto incontro è stato duplice. Da una parte abbiamo voluto far riflettere i bambini sul concetto di crescita esponenziale e come questa vada al di là dell'intuizione. Dall'altra abbiamo voluto introdurre la numerazione binaria e come questa venga utilizzata all'interno dei computer.

Siamo partiti dalla storia di Lahur Sessa, l'inventore del gioco degli scacchi, che come ricompensa ha chiesto che gli venisse dato un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, 2 per la seconda, 4 per la terza, 8 per la quarta, e così via, raddoppiando ogni volta la quantità fino alla sessantaquattresima casella. Il re che aveva accettato con leggerezza la richiesta, credendo addirittura che fosse modesta, al crescere delle caselle e dei chicchi di grano, si rese conto che la richiesta di ricompensa era esorbitante e impossibile da

[3] www.bee-bot.us

soddisfare. Abbiamo quindi provato a pensare allo spessore di un foglio di carta che viene piegato a metà ripetutamente.

Ci siamo quindi costruiti delle carte: su ciascuna abbiamo raffigurato tanti pallini quanti le prime potenze di 2: 1, 2, 4, 8 e 16. Abbiamo posizionato le carte su una lavagna magnetica in ordine decrescente di numero di pallini da sinistra a destra. Abbiamo quindi invitato i bimbi a utilizzare le carte per comporre dei numeri sommando i pallini tra loro, prendendone ciascuna al massimo una volta, e abbiamo constatato che ogni numero da 0 a 31 può essere ottenuto in un modo unico. In seguito abbiamo provato a rappresentare le scelte delle carte mettendo un 1 sotto la carta scelta e 0 viceversa. Questo codice "segreto", a questo punto senza bisogno delle carte, ci è bastato per decifrare i numeri. Al posto delle carte abbiamo messo delle torce elettriche, appese a dei ganci, dove la torcia accesa è da interpretare come un 1 e la torcia spenta come uno 0. È stato un gioco abbastanza semplice e coinvolgente quello di ottenere i numeri dalla configurazione delle lampadine e viceversa. Abbiamo concluso dicendo come la memoria all'interno dei computer o dei telefoni cellulari, funzioni sul principio delle lampadine che abbiamo usato nel nostro gioco, anche se ovviamente sono molte di più.

Incontro 5: ***Indoviniamo, pesiamo e mettiamo in ordine***

Lo scopo di questo incontro è stato quello di introdurre l'idea di efficienza di calcolo, cioè far riflettere su quante operazioni servano per raggiungere un obiettivo e come sfruttare le informazioni per minimizzarne il numero.

Abbiamo iniziato l'incontro giocando a indovinare dove si trovava una particolare carta in un mazzo non ordinato di 8 carte, dietro ognuna delle quali avevamo scritto un numero diverso compreso tra 1 e 100. A dei volontari abbiamo dato l'incarico di trovare un particolare numero e 8 caramelle da usare come denaro, per ogni tentativo bisognava "pagare" una caramella. Abbiamo subito notato che, se si era fortunati, se ne spendeva solo 1 mentre nel caso più sfortunato ne servivano 8. Siamo quindi passati al caso in cui le carte erano ordinate e i bimbi hanno messo a punto abbastanza rapidamente una strategia che faceva tesoro dell'informazione ricorrendo a una ricerca binaria con la quale sono riusciti a scovare la carta con al massimo 4 tentativi, nel caso peggiore.

Partendo dall'importanza di avere gli oggetti in ordine, abbiamo svolto l'attività successiva. Abbiamo presentato alla classe 8 oggetti (un sacchetto di riso, uno di pasta, uno di farina, uno con delle carote, uno con delle arance, uno con delle mele e uno con del pane) dal peso ignoto e ci siamo posti il problema di metterli in ordine di peso. Prima di procedere all'ordinamento abbiamo però dovuto pensare a come fare a confrontarli. Dopo aver sentito le varie proposte e valutando il materiale a disposizione, abbiamo costruito una bilancia a 2 bracci utilizzando una gruccia per gonne appesa a un bastoncino abbastanza robusto e sottile messo a cavallo tra due sedie. Abbiamo quindi proceduto a confrontare gli oggetti, facendo in pratica i confronti tra tutte le coppie di oggetti. In seguito abbiamo pensato se alcuni confronti potevano essere evitati, sfruttando la proprietà transitiva dell'ordinamento.

Abbiamo quindi proposto di utilizzare una rete di ordinamento (nota nella letteratura informatica come "*sorting network*" [7]) disegnata su un grande foglio di carta da pacchi steso a terra, dove il numero di confronti è minimo. La sorting network è stata utilizzata per ordinare in altezza un gruppo di 6 bimbi.

Incontro 6: ***I problemi di un sindaco: giochi con i grafi***

Lo scopo dell'ultimo incontro è stato quello di affrontare dei problemi decisionali, come la determinazione dell'albero di copertura di costo minimo e la colorazione di un grafo. A prima vista potrebbero sembrare concetti astrusi e lontani dagli interessi di bambini di 7-8 anni, ma in realtà visti all'interno del gioco diventano semplici e intuitivi.

Lo scopo secondario dell'incontro è stato anche quello di tentare di educare i bimbi a prendere delle decisioni condivise.

Prima di iniziare abbiamo disegnato nel cortile della scuola dei grafi non orientati, in modo da non avere tempi morti durante l'attività. Nel caso del primo problema sugli archi abbiamo messo dei numeri.

Il contesto comune ai due giochi è stato quello cittadino. Nel primo gioco abbiamo immaginato una città che ha subito un'inondazione rendendo necessario collegare tra loro le isole che si sono formate (i nodi del grafo) tramite la costruzione di ponti (gli archi) in modo da far sì che da qualsiasi isola sia possibile raggiungere qualsiasi altra isola utilizzando percorsi che comportino l'attraversamento di anche più di un ponte. Il costo di ricostruzione di ciascun ponte è dato dal numero che abbiamo messo sugli archi. L'obiettivo è minimizzare la spesa complessiva. Il problema astratto è noto con il nome di albero di copertura di costo minimo.

Nel secondo gioco invece abbiamo fatto finta di essere in una città dove gli abitanti sono molto litigiosi e vogliono colorare le case (i nodi del grafo) in modo che ciascun abitante dalla propria finestra non possa vedere altre case con lo stesso colore della sua. Gli archi del grafo rappresentano proprio la possibilità di vedere una casa dalle finestre di un'altra. Per limitare le spese si vogliono utilizzare meno colori possibile.

I bimbi sono stati organizzati in gruppi, uno per grafo, e in ciascun gruppo sono stati individuati: un sindaco (colui che prende le decisioni dopo aver consultato i cittadini), un ingegnere (colui che con un gesso colorato costruisce i ponti tra isole) un capo contabile e un aiutante (che tengono conto delle spese facendo la somma) e i cittadini, uno per isola, che richiedono la costruzione dei ponti e che provano a muoversi nella città una volta che i ponti sono presenti.

Nel secondo problema, essendo richiesta una contabilità più semplice, abbiamo solo il sindaco e i cittadini, i quali provvedono personalmente a colorare le case con dei gessi colorati, dopo che il sindaco ha assegnato loro un colore.

In entrambi i casi, dopo qualche animata discussione, si è arrivati a fornire la soluzione.

## 4. Note conclusive

L'obiettivo di questi incontri è stato quello di sperimentare un approccio creativo e originale nei confronti della matematica. Gli alunni sono stati chiamati ad agire in prima persona, a utilizzare le conoscenze (assimilazione di informazioni), le abilità (applicare le conoscenze e usare il know how per risolvere problemi) e le competenze (capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali, metodologiche) in loro possesso [17]. Il discente non recepisce più le informazioni in modo passivo, ma diventa egli stesso il protagonista del processo di apprendimento. Oltre a stimolare il processo cognitivo dei singoli alunni, si sono attuate strategie di "*Learning Together*" e "*Learning by doing*" [1] grazie alle quali si è cercato di sviluppare uno spirito di iniziativa, di partecipazione condivisa, che favorisse l'acquisizione delle competenze chiave di cittadinanza. In particolare si è cercato di coinvolgere attivamente gli alunni nei confronti delle attività proposte portando il proprio contributo personale. La collaborazione e la partecipazione sono diventate strumenti indispensabili per organizzare il proprio apprendimento ed acquisire nuove abilità di studio, ma anche per comprendere e discutere i diversi punti di vista dei compagni.

Un secondo obiettivo del progetto è stato provare far entrare in contatto dei bimbi della primaria con concetti evoluti di matematica e informatica, quali l'algoritmica, la complessità computazionale, la topologia e l'ottimizzazione, che generalmente vengono affrontati a livello universitario, sebbene in modo più approfondito. Contando sul fatto che abbiamo utilizzato un approccio ludico e sul fatto che i bimbi, al contrario degli adulti, non manifestano alcun timore reverenziale, l'esperienza è stata molto positiva ed è stato entusiasmante vedere come dei bimbi di 7-8 anni siano arrivati a fare le proprie scoperte con grande naturalezza.

Questa serie di incontri ha avuto un riscontro positivo sul gruppo classe. Gli alunni hanno accolto in maniera gioiosa la presenza di un insegnante esterno dimostrando da subito un approccio interessato nei confronti delle nuove attività presentate. Bisogna ricordare che l'attenzione dei bambini durante questa fascia d'età è relativamente bassa (all'incirca un'ora), ed è quindi fondamentale strutturare le attività proposte in maniera tale da favorire la concentrazione, la varietà delle attività e il movimento fisico, per non appesantire troppo la lezione. L'aspetto ludico dell'apprendimento, l'originalità e la novità nelle metodologie di insegnamento sono componenti fondamentali che attirano lo studente e condizionano il suo interesse e la sua partecipazione.

È inoltre da tener conto il fatto che ogni bambino reagisce in maniera soggettiva verso nuove attività in cui si trova coinvolto: può dimostrare entusiasmo, voglia di fare e partecipare, esuberanza oppure, al contrario, può risultare disinteressato o restìo, questo a seconda del carattere di ciascuno. È qui compito degli insegnanti favorire la partecipazione e il coinvolgimento di tutti gli alunni della classe, da un lato contenendo coloro che risultano essere un po' troppo "eccitati", e dall'altro stimolando quelli che sono più timidi e riservati.

Durante le nostre attività non sono di certo mancati momenti caotici. Ricordiamo che la classe è molto numerosa (26 alunni), gli alunni sono quasi sempre euforici nei confronti di nuove attività che esulano dalla didattica tradizionale e lo dimostrano con un comportamento più attivo. Ciò è però dovuto anche in parte al fatto che ogni alunno è indirizzato a sfruttare le proprie conoscenze e le proprie esperienze pregresse e, di conseguenza, a volerle condividere con gli insegnanti e i suoi compagni.

Bisognerebbe forse concentrarsi su questo aspetto, in modo tale da organizzare e strutturare le diverse attività cercando di ridurre il più possibile i momenti di disturbo e sfruttare al massimo le potenzialità di queste esperienze.

Dal punto di vista oggettivo le ricadute delle attività di questa esperienza sono state tangibili. La classe, che in precedenza era considerata di difficile gestione e con elementi con problemi di inclusione, ne è uscita più coesa e motivata. I risultati nelle prove di matematica successive all'esperimento, stati complessivamente discreti con qualche eccellenza. Possiamo quindi affermare che l'attività svolta ha motivato gli studenti a impegnarsi nei confronti della disciplina e ha comportato generali miglioramenti nel profitto dei singoli alunni.

In conclusione questo laboratorio è stato un'ottima opportunità per fornire agli studenti un approccio diverso e originale nei confronti della matematica e per fare capire loro che la matematica è presente in molte attività che affrontiamo ogni giorno, anche se non sempre siamo consapevoli della sua presenza.

Con le attività proposte si è inteso rafforzare le abilità di inquadrare e affrontare alcuni problemi matematici che sorgono dalla vita di un bambino, piuttosto che da libri di testo. Questo ha comportato ottenere le informazioni pertinenti, elaborare strategie, verificare sul campo le strategie e toccare con mano i risultati. Quest'ultima cosa è stata facilitata dall'utilizzo di materiali. Inoltre si è anche inteso dare un punto di vista dell'informatica che la svincola dal legame con il computer, mentre la lega con il pensiero algoritmico e la sistematizzazione delle istruzioni necessarie per raggiungere un obiettivo o una soluzione.

Dal punto di vista comportamentale, queste attività sono state pensate per stimolare il pensiero divergente e lo spirito critico, nonché il coinvolgimento e l'inclusione di tutti gli alunni mettendo in luce le abilità di ciascuno.

Questo tipo di progetto può essere integrato con altre discipline, come per esempio l'italiano, l'arte o il teatro. In questo modo, l'esperienza può acquistare maggiore forza e risultare ancora più efficace, come evidenziato in [11], dove si mette in evidenza come la connessione con l'arte rafforzi le capacità creative e di problem solving.

## Bibliografia

[1] BESSEN J. (2017), "*Learning by Doing: The Real Connection between Innovation, Wages, and Wealth"*, 2017.

[2] CASTELNUOVO E. (1993), "*Pentole, ombre, formiche*", La Nuova Italia, Firenze (1993).

[3] CASTELNUOVO E. (2008), "*L'officina matematica, ragionare con i materiali*", Ed. La Meridiana.

[4] CHRONICLE E.P., MACGREGOR J.N., ORMEROD T.C. (2004), "*What makes an insight problem? The roles of heuristics, goal conception and solution recoding in knowledge-lean problems*". Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition, 30, 14-27.

[5] D'AMORE B., FANDIÑO PINILLA M.I. (2016), "*Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*", Giunti Universale Scuola (2016).

[6] DE LEONE R. , SAGRIPANTI R., SCHETTINO A. (2012): "*La Ricerca Operativa nella scuola italiana e all'estero*", Periodico di Matematiche, Organo MATHESIS, N. 2, Vol. 4 Serie XI, Anno CXXII, pag. 116-128

[7] FELLOWS M. R. (1991), "*Computer SCIENCE and mathematics in the elemantary schools*".

citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.473.4791&rep=rep1&type=pdf

[8] FORNASIERO M., MALUCELLI F., (2018) "*Building an awareness in optimization in a high school through games*" submitted to RAIRO-OR.

[9] FORNASIERO M., MALUCELLI F., SATERIALE I. (2017), "*Intuizione e creatività: il potere del gioco*", L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate Vol. 40, Sez. B pag. 439-462, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, Paderno del Grappa (TV).

[10] FRABBONI F. (2000), "*Manuale di Didattica generale"*, Laterza.

[11] GROHMAN M. G., SZMIDT K. J. (2013) "Teaching for Creativity: How to Shape Creative Attitudes in Teachers and in Students", in "Teaching Creatively and Teaching Creativity", Gregerson M. B., Kaufman J. C, Snyder H. T. (Eds.) , pag. 15-35, Springer New York.

[12] KÖHLER W. (2009), "*Intelligenzprüfungen an Anthropoiden*" (1917), tr. it. "*L'intelligenza delle Scimmie Antropoidi*", Giunti, Firenze.

[13] MEYER III E. F., FALKNER N., SOORIAMURTHI R., MICHALEWICZ Z. (2014), "*Guide to teaching puzzle-based learning*", Springer.

[14] MORTARI L. (2004), "*Apprendere dall'esperienza"*, Carrocci.

[15] SCHETTINO A. (2012), "*La Ricerca Operativa: una strategia multifunzione per la scuola superiore*", L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 35, Sez. B, pag. 171-191, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin Paderno del Grappa (TV).

[16] WERTHEIMER M. (1945), "*Productive thinking*", New York, NY: Harper.

[17] www.indicazioninazionali.it

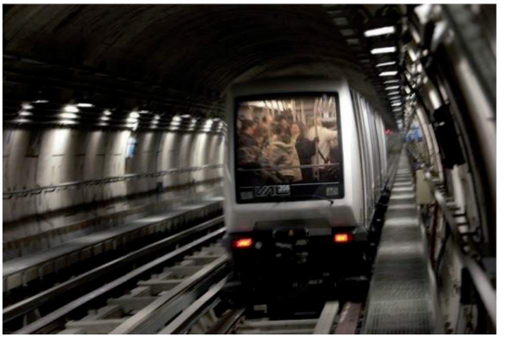
# Il Treno della Metropolitana
# Materiali per la formazione dei docenti di matematica

## *The Metro Train*
## *Materials for the training of mathematics teachers*

***Fabio Brunelli***

**abstract**

**Introduzione**



Contrario: *"I test invalsi possono essere rifiutati dal collegio! possono essere esclusi dal pof! tutti si lamentano ma nessuno si organizza in collegio per escluderli dal pof! eh si! non lo sapevate?? si possono eliminare dal pof!! il collegio può mettere nel pof altre attività di valutazione delle competenze, oppure non tenerne proprio conto, ed escludere l'invalsi! questo cosa comporta? l'invalsi può venire a somministrare le sue prove se vuole, ma noi docenti non siamo più tenuti a correggerle!! chiaro??? chiaro???"*

Favorevole: *"Sono caduto dalla sedia a causa del troppo ridere ahimè sguaiatamente e da solo dopo aver letto che "la valutazione non deve essere autoritaria!" e qui sono le rilevazioni INVALSI che sono causa di autoritarismo! Ma occorre "una pausa di riflessione" e magari occorre un "confronto" con docenti alunni e famiglie! Ah ah ah ma chi vogliamo prendere in giro! Da scompisciare dal ridere con questo linguaggio da veterosessantottino: il confronto e le pause di riflessione!!! Da morire! Siamo in pausa da una vita e il confronto ci dà la paralisi anche vocale, per favore basta! Basta!"*

Questi sono i toni che spesso incontriamo in rete, dovuti a colleghi che dialogano vivacemente, e con le motivazioni più varie, riguardo alle "prove di valutazione esterne". Recentemente è apparso in Facebook addirittura il gruppo "INVALSICOMIO"!

Nell'articolo, "Pratiche sensate di resistenza all'epidemia valutativa" [1], gli autori, dopo avere ampiamente criticato l'INVALSI, la valutazione esterna delle scuole e il "teaching test" dilagante, affermano:

> *"Un modo avalutativo di usare le prove INVALSI di matematica (che sono interessanti e stimolanti) l'abbiamo sperimentato in una quinta lo scorso anno. Invece di rispondere a 35 quesiti in 75 minuti a maggio, abbiamo cominciato a frequentare da ottobre i quesiti INVALSI degli anni precedenti, ragionando collettivamente solo su tre domande alla volta, per oltre due ore.*
> *La modalità in questo modo era rovesciata. Non si trattava di rispondere il più rapidamente possibile, da soli, ai quesiti posti, ma di ragionare a lungo, insieme, sul perché qualcuno avesse inventato quel quesito.*
> *A volte riguardavano argomenti non ancora trattati ed era molto interessante scoprire come ciascuno costruiva strategie ed elaborava proposte, che condivideva in gruppo, per rispondere a quei quesiti o sfuggire ad alcune trappole, perché alcuni bambini rapidamente si sono accorti che i test INVALSI sono pieni di trappole. Al tempo stesso, insieme, cercavamo di interpretare il senso di quelle domande e il perché erano state così formulate.*
> *Insomma cercavamo di scoprire cosa volevano da noi gli esperti dell'INVALSI, ed era interessante per i bambini scoprire che anche il maestro aveva i suoi problemi.*
> *Alla fine davamo un titolo ad ogni quesito e lo collocavamo in una mappa che cresceva, indicandoci le regioni da esplorare. I quesiti in cui molti trovavano difficoltà ci hanno così aiutato a progettare momenti di approfondimento."*

Il presente contributo va proprio nella direzione indicata da questi ultimi detrattori dell'INVALSI. Vorremmo infatti documentare un uso didattico di queste prove e dimostrare come esse siano di qualità diversa e superiore alla media degli esercizi che generalmente proponiamo ai nostri alunni a partire dalla maggior parte dei libri di testo. Vorremmo rivolgere le nostre riflessioni in modo particolare ai docenti in formazione con l'invito a verificare nelle loro classi gli esiti della nostra proposta.

Dalle prove Invalsi di matematica, classe quinta scuola primaria, anno 2010-11

Ecco il quesito oggetto della mia sperimentazione e riflessione:

D7. Un treno della metropolitana parte dalla stazione 1 alle 8:54. Impiega tre minuti a percorrere il tragitto tra due stazioni e sosta due minuti in ogni stazione. A che ora arriva alla stazione 5?


- 9:02
- 9.12
- 9.14
- 9.15

A distanza di qualche anno mi è capitato ancora in mano il quesito del treno della metropolitana proposto nella primavera del 2011. Già a suo tempo mi aveva colpito l'aspetto aritmetico del quesito e nello stesso tempo pre-algebrico e propedeutico al concetto di funzione. A suo tempo il quesito era risultato "difficile" nelle classi quinte della scuola primaria, facendo registrare poco più del 20% di risposte esatte. Ecco i risultati del quesito nel dettaglio su scala nazionale [2]:

| Quesito | Ambito | Parametro di difficoltà | Mancat e risposte | Distrattor e A | Rispost a corretta B | Distrattor e C | Distrattor e D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D7 | Relazioni e funzioni | 1,6 | 1,7% | 24,9% | 20,5% | 37,5% | 15,3% |

L'ho voluto proporre nuovamente alle mie tre classi della scuola secondaria di primo grado. L'istituto è situato in una zona semicentrale di una grande città del Centro Italia e le classi sono ritenute dagli insegnanti di livello medio o medio-buono. I risultati delle prove Invalsi di matematica delle nostre classi si pongono mediamente di poco al disopra di quelli delle scuole del Centro Italia.

Il quesito è stato proposto in modo individuale e a risposta aperta, senza quindi fornire i quattro possibili risultati del quesito originale.

I risultati della classe prima possono essere raccolti nella seguente tabella:

Le risposte corrette sono 5 su 21 alunni presenti, quasi il 24%, percentuale confrontabile con i risultati della quinta elementare del 2011.

| **Numero di alunni** | **Risposte fornite** |
|---|---|
| 5 | 9:12 risposta corretta |
| 6 | 9:14 errata, non tiene conto che nella stazione 5 non si calcola la sosta |
| 1 | 9:15 |
| 2 | 9:16 |
| 1 | 9:18 |
| 1 | 9:19 |
| 1 | 2:04 |
| 4 | tenta dei calcoli ma non arriva a un risultato |
| Totale 21 | |

Tra i cinque alunni che hanno risposto correttamente quattro hanno calcolato viaggi e soste separatamente:

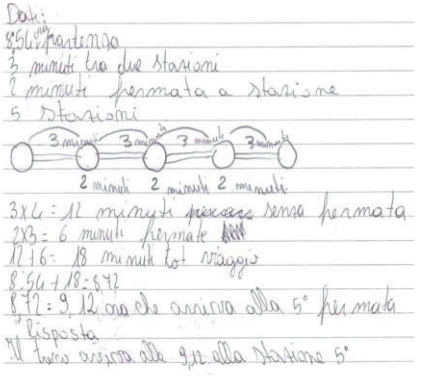
$$3 * 4 = 12 \text{ minuti}$$
$$2 * 3 = 6 \text{ minuti}$$
$$12 + 6 = 18 \text{ minuti}$$
$$8{:}54 + 18 \text{ minuti} = 9{:}12 \text{ orario di arrivo del treno alla stazione 5}$$

Il quinto alunno invece ha seguito questo errato procedimento:

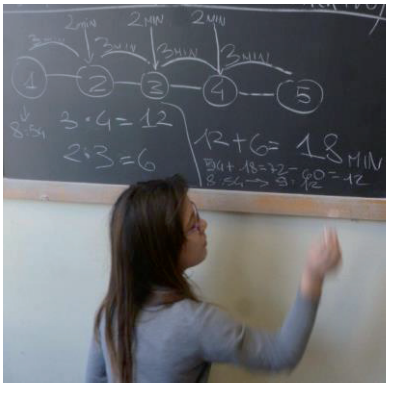
$$8{:}54 + 5 = 8{:}59 + 5 = 9{:}04 + 5 = 9{:}09 + 3 = 9{:}12$$

Il risultato è corretto, ma il procedimento è scritto in modo formalmente sbagliato (per i giovani colleghi: la *semantica* va bene, la *sintassi* non va bene). Si tratta di un errore tipico (errore di alunni e qualche volta anche di docenti e … di libri di testo!) nell'uso del segno uguale che viene interpretato come una freccia, oppure un "e allora …"

Tutti questi alunni hanno riprodotto nel loro quaderno lo schema del viaggio proposto dal testo e scritto in ogni parte dello schema i minuti corrispondenti.




*L'elaborato di un allievo*




*Spiegazione alla lavagna*

Nella classe prima il lavoro si è concluso senza considerazioni di tipo algebrico. Ho solo accennato che lo stesso problema poteva presentare molte più stazioni e quindi necessitava di strumenti matematici più potenti.

Nella classe seconda la percentuale di risposte esatte è salita a 16 su 24 alunni presenti (62%)

Così distribuita:

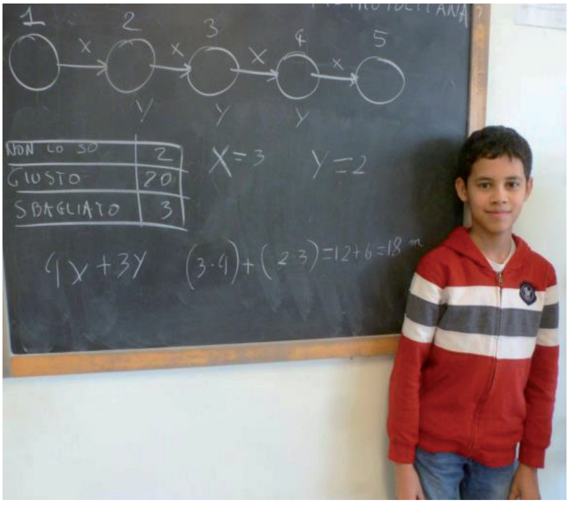
| Numero di alunni | Risposte fornite |
|---|---|
| 15 | 9:12 risposta corretta |
| 1 | 9:00 |
| 2 | 9:08 |
| 1 | 9:10 |
| 1 | 9:11 |
| 3 | 9:14 anche nella classe seconda si registra un massimo relativo per questo orario che potremmo anche definire il miglior "distrattore" del problema |

| | |
|---|---|
| 1 | 10:54 |
| Totale 24 | |

Tra gli allievi che hanno risposto correttamente otto hanno seguito il procedimento che abbiamo chiamato "aritmetico analitico" o anche "passo dopo passo", aggiungendo poco alla volta i minuti, quasi volendo seguire il treno nella sua marcia. Sette allievi tra quelli che hanno risposto correttamente hanno seguito invece quello che abbiamo definito metodo "aritmetico sintetico" già illustrato precedentemente.

Da notare che, durante la correzione alla lavagna, diversi alunni tra quelli bravi hanno tentato vie algebriche senza peraltro giungere alla formula risolutiva.

Nella classe terza la percentuale di risposte esatte è ulteriormente salita a 20 su 25 alunni presenti (80%). Abbiamo registrato tre risposte errate e due allievi che hanno ammesso di non aver saputo come procedere (uno di questi è un allievo con difficoltà).




*Primi "balbettii algebrici"*
*citazione dal progetto ArAl dell'Università di Modena*
*http://www.aralweb.unimore.it/site/home.html*

Alla richiesta di generalizzare il problema la prima idea dei ragazzi non è stata quella di rendere variabile il numero delle stazioni, bensì di chiamare con x e y la durata dei viaggi e delle soste, salvo poi sostituirle con i numeri corrispondenti. L'algebra qui non viene ancora utilizzata come modellizzazione della realtà, ma semplicemente come una sorta di "rappresentazione" ed "etichettatura" dei dati numerici.

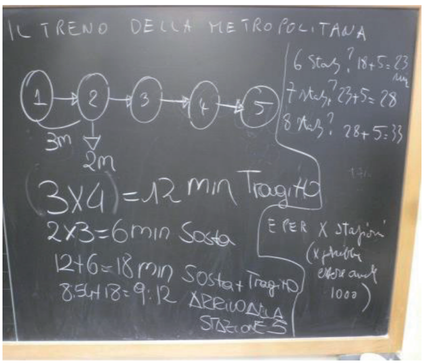
Ho allora posto nuovamente il problema chiedendo di risolverlo nel caso le stazioni fossero sei, oppure sette, oppure otto, …

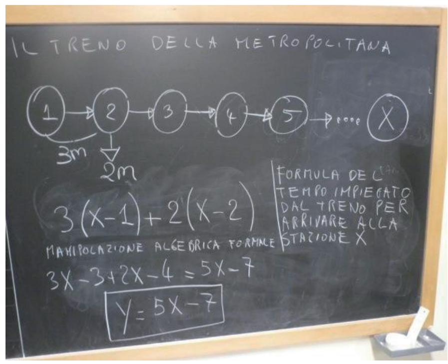
Finalmente gli allievi sono giunti alla generalizzazione del problema riguardo al numero delle stazioni (vedi immagini):

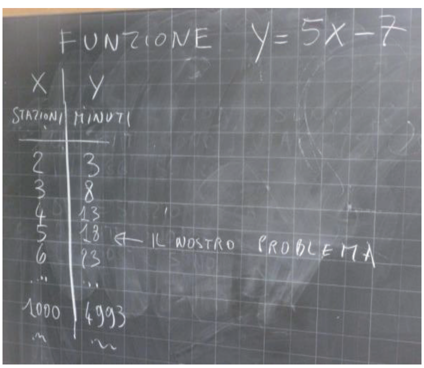
$$y = 3\ (x - 1) + 2\ (x - 2) \text{ da cui}$$
$$y = 5\ x - 7$$

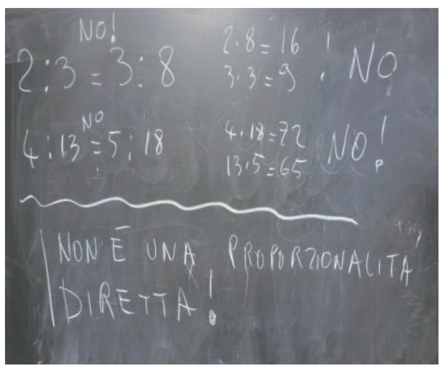
Qui si è aperta la discussione su quale tipo di corrispondenza stabilisse questa legge.

Purtroppo ho constatato più volte come l’argomento “funzioni lineari”, “proporzionalità diretta”, “proporzionalità inversa”, ampiamente trattato in seconda media, a distanza di tempo, quando viene richiesta agli allievi la competenza di riconoscere il tipo di funzione in un contesto diverso da quello delle “proporzioni”, presenti grandi difficoltà.




La prima reazione, osservando l’andamento “crescente” della funzione è quella di riconoscerla come proporzionalità diretta. Ho dovuto chiedere loro insistentemente di calcolare diversi rapporti di coppie di numeri corrispondenti per verificare che il rapporto tra le variabili non era costante e che si trattava di una corrispondenza lineare.

La lezione si è conclusa con la costruzione del grafico della funzione. Solo al termine del lavoro qualcuno ha tardivamente affermato: “Del resto questo grafico non passa nemmeno per l’origine!”

Spesso imputiamo all’INVALSI certi risultati negativi dei nostri allievi in prove oggettive esterne. “L’INVALSI fa domande trabocchetto!” ho sentito a volte affermare.

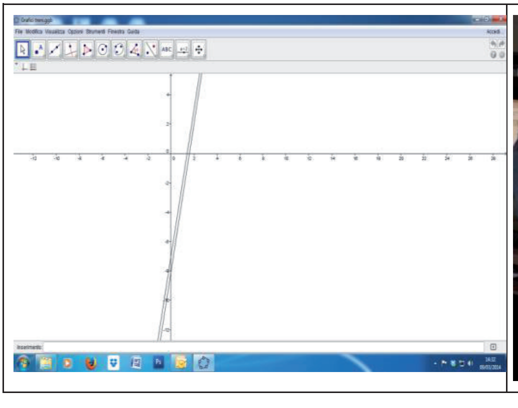
Ritengo semplicemente che i nostri allievi abbiano più difficoltà del previsto a consolidare competenze matematiche. Il più delle volte gli apprendimenti sono di breve durata, finalizzati alla interrogazione o al compito del mese che nel caso in esame sarebbe stato un compito “sulle proporzioni”. Quando il contesto è diverso, quando del tempo è trascorso, quando non è evidente la regola o la formula necessaria alla risoluzione del problema, affiora uno smarrimento generale e si ritorna a “intuizioni e concezioni primitive” spesso erronee.

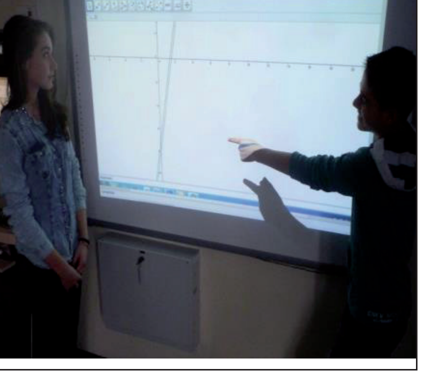
Nella lezione successiva, sempre nella classe terza, ho proposto di confrontare due ipotesi di orario. La prima quella del treno già preso in considerazione nel quesito e la seconda di un treno che impiegasse solo due minuti tra una stazione e l’altra e sostasse tre minuti in ogni stazione.

Abbiamo ottenuto quest’altra funzione

$$y = 5x - 8$$

I ragazzi hanno rappresentato i grafici delle funzioni con il disegno sui loro quaderni a quadretti e anche mediante Geogebra sulla Lim di classe.





Dai grafici si osserva che uno dei due treni arriverebbe prima, impiegando meno tempo complessivamente, ma senza accumulare vantaggio durante il viaggio rispetto all’altro, in altre parole la velocità media dei due treni sarebbe la stessa.

La conclusione di tutta l'attività, al di là del rinforzamento degli strumenti matematici è che il percorso di un treno, con le sue velocità e le soste nelle varie stazioni, può essere modellizzato con strumenti algebrici e visualizzato in un diagramma cartesiano.

## Conclusioni

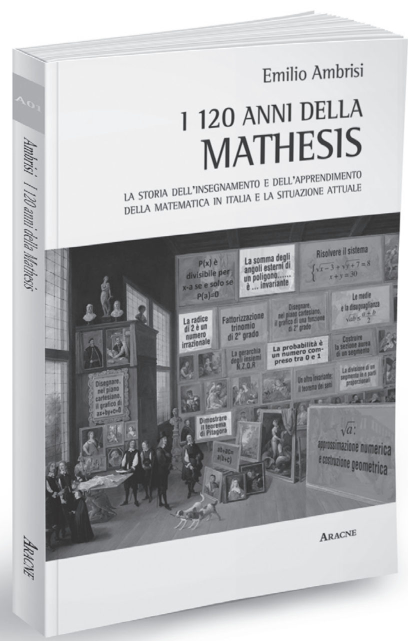
Gli insegnanti italiani troppo spesso rifiutano psicologicamente i quesiti dell'INVALSI e li rimuovono mentalmente dal loro curricolo scolastico. Anche i fascicoli cartacei con le risposte giuste o errate dei nostri allievi vengono rapidamente inghiottite dagli archivi delle scuole. In questo contributo abbiamo cercato di mostrare come i quesiti dell'Invalsi si confermino non banali e matematicamente ricchi di spunti didattici. Essi possono essere riproposti con eventuali cambiamenti nelle stesse classi a distanza di tempo, oppure in classi di diverso livello e si prestano sempre ad una discussione matematica e a importanti approfondimenti disciplinari.

## Bibliografia

[1] FRANCO LORENZONI e ROBERTA PASSONI, "Pratiche sensate di resistenza all'epidemia valutativa", n.18, ottobre 2013, Rivista "Gli asini" (numero interamente dedicato ad una critica degli attuali sistemi di valutazione). http://gliasinirivista.org/gli-asini-n-18-ottobre-novembre-2013/

[2] Gli esiti del Servizio nazionale di valutazione 2011 e della Prova nazionale 2011 http://www.invalsi.it/snv1011/documenti/Rapporto_SNV%202010-1_e_Prova_nazionale_2011.pdf
Le Prove INVALSI 2011: prime valutazioni (Sintesi) http://www.invalsi.it/snv1011/documenti/prove_invalsi_2011_prime_valutazioni_sintesi.pdf

# Indice


Emilio Ambrisi
I 120 ANNI DELLA
MATHESIS
LA STORIA DELL'INSEGNAMENTO E DELL'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA IN ITALIA E LA SITUAZIONE ATTUALE
ARACNE

# MATHESIS
**Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche**

**Presidente**

**Elisabetta Lorenzetti**
È presidente dal 18 febbraio 2019, ventitreesima dal 1895, anno della fondazione.
**presidente@mathesisnazionale.it**

**Consiglio Nazionale**
Francesco de Giovanni *vice presidente*, Massimo Fioroni *segretario*, Roberto Franzina *tesoriere*, Tiziana Bindo, Antonietta Carbone, Atalia Del Bene, Domenica Di Sorbo, Marcello Pedone, Alessio Russo, Annalisa Santini.

**Sezioni**
Avellino - Bari - Benevento - Bergamo - Brescia – Caserta - Castellammare di Stabia - Catania - Chieti - Crotone - Firenze - Ferrara - Foggia* Grottaglie - Latina - Lecce - Mantova - Messina - Milano - Napoli - Napoli Flegrea - Olbia - Pavia - Pescara - Piacenza - Roma - Rovigo - Salerno - Serra San Bruno - Spoleto - Terni - Tricase - Udine - Varese - Venezia- Verona - Vicenza.

**Rivista**
***Periodico di Matematiche***
Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 "di Matematiche". La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell'Editrice Zanichelli.

**Sito web**
www.mathesisnazionale.it

**Sede**


*Accademia dei Concordi - Piazza Vittorio Emanuele - Rovigo*


ISSN: 1582-8832

Matematica, oltre.....

È il titolo del Congresso Mathesis 2019 che sarà celebrato il prossimo ottobre a Matera, capitale europea della Cultura: esprime l'intendimento di contribuire al processo d'integrazione culturale in atto potenziando la ricerca di una "nuova grande alleanza intellettuale per l'educazione" con la matematica in una posizione di guida. È come se la matematica, la più disciplina delle discipline, il modello costitutivo delle discipline, si liberasse di talune sovrastrutture formali per mostrare l'essenza della sua natura e della sua finalità. "È come se abbandonasse le sue sistemazioni perfette e levigate, da bella signora in abiti da festa, [...] per mostrarsi nelle sue forme più naturali e genuine come nelle immagini tramandateci in alcuni miti dell'antichità classica. L'immagine, ad esempio, di Giano bifronte, dio non greco, ma latino [...] che guarda ovunque. Il dio delle porte e dei ponti, che sovraintende ai passaggi, ai legami, alle connessioni! [...] Giano, pater divorum, come metafora della matematica che non nasce e non perisce, della matematica che è attività della mente e espressione della sua vitalità, manifestazione del suo esserci; della matematica che pervade ogni campo d'azione umana, guarda ovunque, abbatte steccati e costruisce ponti." Giano ha due teste e due volti, diversi come gli aspetti antitetici che rendono viva la matematica, le grandi opposizioni concettuali che in essa armonicamente coesistono: algoritmico/dialettico, astratto/concreto, continuo/ discreto, esatto/ approssimato, finito/infinito, forma/ contenuto, individuale/ collettivo, intuitivo/rigoroso, locale/ globale, ordine/caos, possibilità/necessità, qualità/ quantità, razionale/irrazionale, sintetico/ analitico, teoria/applicazione, utile/inutile. Sono, ma altre se ne possono aggiungere, le grandi coppie filosofiche che pervadono la matematica e la realtà dell'essere. *[da: Emilio Ambrisi, Editoriale, PdM 3/2017]*

Mathesis
Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
c/o Accademia dei Concordi
Piazza Vittorio Emanuele, 14
45100 Rovigo

www.mathesisnazionale.it