

# Periodico di Matematiche



**Organo della  
MATHEISIS**

Società italiana di scienze  
matematiche e fisiche  
fondata nel 1895

**Numero** 1-2 (Gen-Ago 2020)  
**Volume** 12 **Serie** XIV  
**Anno** CXXX

## **Direttore**

Francesco de Giovanni  
degiovan@unina.it

## **Comitato di Redazione**

Maria Cocozza	<a href="mailto:mariacocozza@iscortese.com">mariacocozza@iscortese.com</a>
Atalia Del Bene	<a href="mailto:atalia.delbene@istruzione.it">atalia.delbene@istruzione.it</a>
Umberto Dello Iacono	<a href="mailto:umberto.delloiacono@unicampania.it">umberto.delloiacono@unicampania.it</a>
Massimo Fioroni	<a href="mailto:fioronimassimo@gmail.com">fioronimassimo@gmail.com</a>
Paola Gario	<a href="mailto:paola.gario@unimi.it">paola.gario@unimi.it</a>
Franco Ghione	<a href="mailto:ghione@axp.mat.uniroma2.it">ghione@axp.mat.uniroma2.it</a>
Elisabetta Lorenzetti	<a href="mailto:elisabetta.lorenzetti@unife.it">elisabetta.lorenzetti@unife.it</a>
Marcello Pedone	<a href="mailto:marcellopedone@tin.it">marcellopedone@tin.it</a>
Alessio Russo	<a href="mailto:alessio.russo@unicampania.it">alessio.russo@unicampania.it</a>
Annalisa Santini	<a href="mailto:annalisanantini66@gmail.com">annalisanantini66@gmail.com</a>
Luigi Verolino	<a href="mailto:verolino@unina.it">verolino@unina.it</a>

## **Staff editoriale**

Marco Menale [marco.menale@unicampania.it](mailto:marco.menale@unicampania.it)

Autorizzazioni e supporti Autorizzazioni Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Il Periodico di Matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su [www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it)

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia € 60,00 – Per l'Estero € 70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati: [segreteria@mathesisnazionale.it](mailto:segreteria@mathesisnazionale.it)

c/c postale, Codice IBAN:  
**IT051076010400000048597470**

intestato a:  
**Mathesis Nazionale** c/o Accademia dei Concordi, Piazza Vittorio Emanuele, 14,  
45100 Rovigo (RO),  
[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it)

Numero 1-2 Gennaio-Agosto 2020 Volume 12 serie XIV anno CXXX

Rivista quadrimestrale

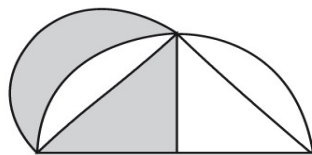
# Periodico di Matematiche

**Organo della MATHESIS**

*Società italiana di scienze*

*matematiche e fisiche*

*fondata nel 1895*



**Mathesis**

## Indice

Editoriale – Francesco de Giovanni	1
Guido Trombetti <b>Esagoni nella natura</b>	3
Lorenzo Di Biagio <b>Derivabilità e continuità della funzione derivata</b>	9
Massimo Esposito <b>Il concorso a cattedra 2020 e la professionalità del docente di matematica</b>	25
Paolo Hägler – Giorgio Mainini <b>Poligoni regolari espansi e ristretti</b>	33
Giovannina Albano – Umberto Dello Iacono – Giuseppe Fiorentino <b>Narrazione e gioco in ambienti online per favorire l'emergere di un'identità matematica negli studenti</b>	47
Carlo Sabbarese – Fabrizio Ambrosino – Antonio D'Onofrio <b>Modello matematico per lo studio della migrazione del Radon in edifici con diverse tipologie</b>	57
Letizia Pellegrini – Alberto Peretti <b>Un modello lineare per la classifica del campionato di calcio</b>	77
Anna Pierri <b>Pratiche di valutazione formativa tra pari in ambiente online per promuovere il pensiero matematico negli studenti universitari</b>	91
Bruno Carbonaro <b>Cultura matematica e competenza statistica ai tempi del COVID-19</b>	103

## Editoriale

Non è facile scrivere di didattica e di divulgazione della matematica in un momento come questo. Come farlo e non, invece, ricordare i momenti drammatici che abbiamo vissuto e stiamo vivendo – e che mai avremmo pensato di vivere –, le decine di migliaia di persone che hanno perso la vita, la gravissima crisi economica e le pesanti conseguenze per l'occupazione?

La pandemia di COVID-19 ha ovviamente avuto effetti devastanti anche sull'insegnamento, a tutti i livelli, costringendoci a modificare le metodologie e ad inventarci, ciascuno di noi e giorno dopo giorno, un approccio che limitasse i danni, in uno sforzo didattico senza precedenti.

E quando tutto questo verrà superato, sarà nostro compito lavorare per restituire alle giovani generazioni prospettive e speranze, e la capacità di affrontare la fragilità della condizione umana evidenziata da questa esperienza.

Perché il ruolo – o la missione – del docente non può e non deve essere meramente disciplinare: è da sempre nostra responsabilità guidare i giovani allievi nella loro realizzazione, come persone e come cittadini, fondata su principi di solidarietà e di uguaglianza, e sul rifiuto di qualsiasi discriminazione, che sia etnica, religiosa o sociale.

Vi lascio alla lettura degli articoli di questo numero del *Periodico di Matematiche*, una tra le più antiche riviste di divulgazione scientifica (fondata nel 1886 da *Davide Besso*), che ho avuto l'onore di essere chiamato a dirigere a partire da questo fascicolo.

*Francesco de Giovanni*



## Esagoni nella Natura Hexagons in Nature

Guido Trombetti<sup>1</sup>

### Abstract

Recent pictures of the seabed near Punta Campanella provide the cue to discuss the occurrence of hexagonal patterns in nature. In particular, we highlight two mechanisms. Efficiency in perimeter minimization (the one leading bee's honeycomb construction) and optimal packing (the one leading blotched picarel's nets displacement). In both cases, the beauty of math meets Nature's need for minimality. We take this chance to present some classical results ranging from optimal tessellation to isoperimetric inequality.

Tempo fa su *La Repubblica online* sono apparse alcune splendide foto del fondale marino nei pressi di Punta Campanella, commentate in un bel pezzo da Paolo De Luca.



---

<sup>1</sup> [guido.trombetti@unina.it](mailto:guido.trombetti@unina.it) Università degli Studi di Napoli "Federico II".  
Comunicato da F. de Giovanni

Tra rocce e antichi resti romani, il fondale sabbioso sostanzialmente appariva suddiviso in tanti esagoni. Quasi a pavimentare strade sommerse. Non si trattava, però, di artefatti umani. Bensì del lavoro certosino di una specie di pesce, nota come *menola*. La femmina depone le uova all'interno di un nido costruito dal maschio. Ogni coppia dunque ha il suo esagono. Immediatamente viene in mente l'analogia con l'alveare delle api, le cui celle come noto sono esagonali. E da qui, d'istinto, il collegamento con un'importantissima proprietà matematica nota come "isoperimetria": *tra tutti i modi di piastrellare un piano con figure geometriche di uguale area e forma arbitraria, senza lasciare buchi, (si pensi ai disegni di Escher), quella con esagoni regolari richiede il minore perimetro complessivo possibile.*

I problemi isoperimetrici rappresentano un capitolo importantissimo dell'Analisi Matematica. Essi hanno addirittura un ascendente mitologico

“...Devenere locos ubi nunc ingentia cernes  
moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,  
mercatique solum, facti de nomine Byrsam,  
taurino quantum possent circumdare tergo...”

(Virgilio, Eneide, libro I, 365-368)

La celebre leggenda di di Didone e della pelle di toro n cui racchiudere quanta più terra possibile.

Didone, bellissima regina africana, fuggita dalla sua terra dopo la morte del marito, approdò in Tunisia, su una bellissima spiaggia. E subito pensò di fondare lì una nuova città. Per poter raggiungere il suo obiettivo si rivolse al re del luogo, Iarba, affinché le desse una quantità di terreno sufficiente ad edificare la città che aveva in mente. Colpito dalla bellezza di Didone, Iarba cercò di convincerla a sposarlo. Ed irritato per il suo diniego si limitò a dirle “*Ti darò tanta terra quanta ne può racchiudere una pelle di toro*” (... *Taurino quantum possent circumdare tergo*). Didone capì che era una provocazione, ma era determinata ad avere la sua città sul mare. E non si perse d'animo. Si procurò un paio di forbici, tagliò la pelle di toro in un gran numero di striscette, quanto più sottili possibili. Poi annodò le striscette così da ottenere una sorta di lunghissimo filo. Prese le due estremità del filo e le poggiò su due punti della battigia. Dispose poi il filo in modo da ottenere un rettangolo. La terra contenuta nel rettangolo era più che sufficiente a costruire una città. E Iarba, giocato dalla sua astuzia, avrebbe dovuto per forza concedergliela. Mica poteva rimangiarsi la parola data. *Però!* - pensò Didone



- se invece di un rettangolo disegno un quadrato, ad occhio e croce, quest'ultimo conterrà più terra. Pensa e ripensa si convinse che la forma più vantaggiosa (cioè quella che conteneva più terreno) era il semicerchio. Così nacquero Cartagine ed il problema isoperimetrico!

In termini matematici rigorosi il problema isoperimetrico si enuncia esattamente così:

*Tra le curve chiuse del piano di lunghezza fissata quale racchiude la regione di area massima?* La risposta è “la circonferenza”.

In formule, se diciamo L la lunghezza della curva ed A l'area racchiusa da essa, il problema isoperimetrico si riscrive con la diseuguaglianza

$$L^2 \geq 4\pi A$$

che diventa un'eguaglianza se e solo se la curva è una circonferenza.

Non è esattamente il problema che si trovò ad affrontare Didone. Perché Didone non aveva a che fare con curve chiuse (da un lato si appoggiava al mare!). Ma è ad esso equivalente. Cioè se risolvi l'uno risolvi l'altro. E viceversa. Il problema isoperimetrico era già noto nell'antica Grecia. Ed era chiaro che la soluzione era la circonferenza. Cioè che la curva chiusa che, a parità di lunghezza, racchiude l'area massima è la circonferenza. E qualunque altra curva chiusa racchiude un'area minore. Da allora fino alla metà del secolo scorso moltissimi matematici di grande profilo tentarono di trovare una dimostrazione. E nel più generale dei casi. Ottenendo via via risultati sempre più precisi. Possiamo dire che il problema fu risolto definitivamente nel 1958 da Ennio De Giorgi, grande matematico leccese. Considerando insieme una classe molto ampia. Il suo approccio consente, tra l'altro, di stabilire, *mutatis mutandis*, un analogo risultato in uno spazio a qual si voglia numero di dimensioni. Per intenderci, nello spazio a tre dimensioni basta sostituire circonferenza con superficie sferica, cerchio con sfera, area con volume ...

Il risultato si estende allo spazio ad 3 dimensioni :

*Tra tutti i solidi delimitati da superfici di area assegnata soltanto la sfera ha il massimo volume.*

E più in generale il risultato si estende allo spazio ad n dimensioni. Infatti ponendo

Per(E) = perimetro di E

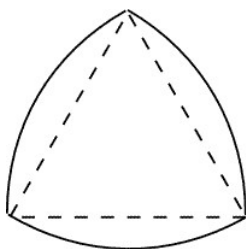
mis(E) = volume di E

$w_n$  = volume della sfera n-dimensionale

vale la disequaglianza

$$(Per(E))^n \geq n^n \omega_n (mis(E))^{n-1}$$

È interessante sottolineare che la parte delicata della proprietà isoperimetrica risiede nella dimostrazione dell'unicità della forma (il cerchio) con area massima a perimetro fissato. Sia chiaro, non si tratta di una secondaria pignoleria da matematici. Non è affatto detto a priori che non possa esserci oltre al cerchio un'altra forma che realizza il massimo. Per dirla con i matematici in generale non è detto che un problema ammetta un'unica soluzione. Un semplice esempio dovrebbe convincere tutti. Ritorniamo a Didone. Immaginiamo, per semplicità, di non avere a disposizione il mare. E quindi di dover delimitare la città con una curva chiusa di lunghezza fissata. E immaginiamo che Didone volesse rendere minimi i tempi degli spostamenti in città. Ponendosi quindi il seguente problema: disporre il filo in modo tale che, una volta costruite le mura, si possa congiungere ogni coppia di punti nella città con una strada rettilinea che non esca dalla città e la cui lunghezza massima sia la più piccola possibile. In linguaggio matematico si vuole costruire una figura convessa con diametro minimo. E' chiaro che per riuscire ad avere strade diritte non troppo lunghe bisogna pensare ad una figura i cui punti non siano troppo dispersi. Insomma disporre il filo in modo che non abbia "bozze". Il cerchio ha evidentemente la forma giusta. Ma, sorprendentemente, non è l'unica! Esiste una famiglia di figure, note come figure di Reuleaux, che soddisfano esattamente le stesse proprietà del cerchio. Si tratta di una specie di poligono regolare arrotondato.



Talvolta tali figure hanno proprietà che le fanno preferire al cerchio, per determinati usi. Un esempio di oggetto con la forma di Reuleaux, è la moneta da 9 dollari delle Isole Bermuda. Grazie alle proprietà descritte la moneta è riconoscibile da un distributore solo in base al suo spessore. Inoltre ha area

minore del cerchio di eguale perimetro. Quindi può essere prodotta utilizzando meno materia prima.

La proprietà isoperimetrica del cerchio o della sfera interviene nelle più disparate questioni. Ad esempio, essa consente di spiegare perché la terra è (approssimativamente) una sfera, perché il tamburo di forma circolare emette la nota più bassa possibile, perché una sbarra ha la massima rigidità alla torsione se la sua sezione è un cerchio, e anche nel determinare perché le bolle di sapone sono di forma sferica.

Ma torniamo agli alveari che sono costruzioni certamente eleganti. La ragione per cui le api usano gli esagoni è dovuta, come già intuito fin dall'antichità, alla necessità di risparmiare cera. Minor consumo di cera, maggiore efficienza. Strano ma vero, questa congettura attribuita a Pappo (intorno al 300 d.c.) diventa un teorema soltanto poco più di venti anni fa (ad opera di Thomas C. Hales). Ma tornando alle menole dalle quali siamo partiti, perché un pesce dovrebbe essere parco nell'utilizzo della sabbia che certamente abbonda intorno a lui? E perché una tale strategia, che in realtà può aver senso per una comunità come quella delle api, dovrebbe interessare il singolo individuo?

È chiaro quindi che nel caso della menola il motivo deve essere un altro. A riprova di ciò per esempio gli esagoni costruiti dalla menola sono con buona approssimazione quasi tutti regolari ma spesso di taglia diversa e quindi, come potrebbe dimostrare un matematico, tale pavimentazione è lungi dal possedere la proprietà isoperimetrica.

Esempi di tassellatura esagonale come quelli della menola si presentano in biologia quando un alto numero di individui si trova ad occupare uno spazio limitato e deve suddividerlo "equamente". Per esempio, la sterna reale è un uccello che nidifica sulle coste atlantiche dell'emisfero australe raggiungendo un'altissima densità di popolazione, con i nidi posizionati esattamente nei centri di un ipotetico reticolo esagonale. Questo tipo di rompicapi matematici ricade sotto il nome di "*problemi di impacchettamento*". E costituisce un campo di ricerca florido e di notevole interesse per le evidenti applicazioni, in un'era in cui ottimizzare risorse e spazi è divenuto vitale. Per comprendere come la menola potrebbe essere arrivata a formare tali esagoni, immaginate di dover disporre su di un tavolo monete tutte uguali, senza sovrapporle, in modo che "lo spazio tra le monete sia il minore possibile". Fu Gauss nell'Ottocento a dimostrare i primi risultati che evidenziavano l'efficienza del reticolo esagonale. Nel caso delle monete, per reticolo esagonale intendiamo una disposizione simile a quella dell'alveare, dove però gli esagoni sono sostituiti

---

da cerchi (monete) in essi inscritti. Ogni moneta è dunque tangente a sei monete adiacenti. E' solo nel 1940 che un altro grande matematico, l'ungherese László Fejes Tóth, dimostrò che il reticolo esagonale è il più denso, ovvero rende minima la superficie di piano non ricoperta dalle monete. È abbastanza ragionevole a questo punto immaginare che una singola coppia di menole isolata dalle altre costruirebbe tranquillamente un nido di forma circolare. Al crescere della densità di nidi le menole saranno naturalmente portate a formare un impacchettamento esagonale, per ottimizzare lo spazio. Tanto che i cerchi stessi finiscono per deformarsi in esagoni. Il fatto che tali esagoni abbiano taglie differenti sarà verosimilmente dovuto alle attitudini dei singoli individui e all'interazione/competizione tra un individuo e i suoi vicini. Ovviamente questa è solo una possibile spiegazione. Salvo poi ad essere smentiti dai biologi marini. Ma mi piace sempre pensare che "il libro della natura è scritto in lingua **matematica**, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche..." (Galileo Galilei).

## **Derivabilità e continuità della funzione derivata**

### **Differentiability and continuity of the derivative**

**Lorenzo Di Biagio<sup>1</sup>**

#### **Abstract**

At the beginning of a more in-depth study of the concept of differentiability, students often confuse the notion of differentiability of a real function with that of continuity of the derivative. They consider themselves always entitled to verify the differentiability at a point not through the more appropriate (but least loved) definition as limit of the difference quotient but through the study of the limits of the derivative at that point. Even without a theoretical understanding, they generally reach the correct result. Why? Essentially because the derivative of a function cannot be discontinuous at will. In this paper we want to study this issue in depth and provide a solid basis for the students' reasoning, including also examples and counterexamples.

–“per vedere se una funzione è derivabile in un punto come faccio? calcolo i limiti della derivata? Spesso funziona, giusto? [...] penso di continuare col mio metodo e sperare che vada bene”

–“per studiare la derivabilità di una funzione in un punto devo per forza calcolare il rapporto incrementale oppure posso più semplicemente eseguire i limiti sinistro e destro della funzione già derivata?”

–“ma questo è chiaro se pensi che la derivata di una funzione è a sua volta una funzione e quindi calcolare la derivabilità di una funzione significa calcolare la continuità della sua derivata”

(da alcuni forum di matematica)

---

<sup>1</sup> [lorenzo.dibiagio@gmail.com](mailto:lorenzo.dibiagio@gmail.com) Luiss “Guido Carli”, Viale Romania 32, Roma.  
Comunicato da A. Russo

## Introduzione

Nella mia esperienza di insegnante di un primo corso di matematica generale per economisti mi sono accorto che gli allievi che si avvicinano per la prima volta e con un certo rigore allo studio della derivabilità delle funzioni incappano spesso in un abbaglio, più concettuale che pratico, di cui non sono neanche ben coscienti. Il fatto che anzi il risultato “torni”, e che i libri di testo non li mettano in guardia, non li aiuta certo a rendersi conto della sottigliezza della questione.

A cosa mi riferisco? Quando gli studenti sono chiamati a risolvere il classico esercizio di stabilire se certe funzioni continue definite a tratti, e derivabili in ogni tratto, sono anche derivabili nei punti di raccordo, di solito si preoccupano esclusivamente di controllare che le derivate (calcolate indipendentemente in ogni tratto con le solite regole meccaniche) abbiano o no lo stesso limite in un punto di raccordo. In questo modo pensano di cavarsela, evitandosi di dover ricorrere alla meno amata definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (e beffando quindi l'esercitatore, che aveva proposto l'esercizio con quel preciso scopo). In concreto generalmente non commettono un errore, ma difficilmente sapranno giustificare concettualmente la loro tecnica, perché in effetti confondono i concetti di ‘derivabilità’ (come limite del rapporto incrementale) e ‘limite della derivata’. Ovvero ritengono che una funzione continua, definita a tratti e derivabile in ogni tratto, è derivabile anche nei punti di raccordo se e solo se la funzione derivata lì è continua. Si stupiscono nell'apprendere che invece è possibile fornire esempi di funzioni derivabili in un punto ma con funzione derivata non continua in quel punto, e spesso si rassegnano (ma con un certo abbattimento) a ricorrere alla definizione di derivata.

Fortunatamente per i nostri studenti, però, non è necessario gettare il bambino con l'acqua sporca: i punti di discontinuità delle funzioni derivabili devono sottostare a vincoli piuttosto rigidi, e –benché lo utilizzino in modo inconsapevole– il loro trucco all'atto pratico si rivela corretto e risolutivo. Anche se non è generalizzabile a casi più complessi.

Questa breve nota vuole chiarire per bene la questione, presentando in modo organico teoremi, esempi e controesempi (alcuni originali) per accrescere la nostra consapevolezza sulla nozione di derivabilità.

## Derivabilità e limiti della derivata

Sia  $f$ , una funzione reale di variabile reale, continua in  $x_0 \in \mathbf{R}$  e derivabile un intorno di  $x_0$ , tranne al più in  $x_0$ .

**Il nostro obiettivo è studiare la derivabilità di  $f$  nel punto  $x_0$ .**

Premettiamo una chiarificazione lessicale e di notazione: non bisogna confondere i due concetti di

- 1)  $f'_+(x_0)$ , il limite destro del rapporto incrementale di  $f$  in  $x_0$ .
- 2)  $f'(x_0^+)$ , il limite destro in  $x_0$  della funzione derivata  $f'$ .

Il limite destro del rapporto incrementale di  $f$  in  $x_0$  è definito come

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Invece il limite destro in  $x_0$  della funzione derivata  $f'$  è definito come

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x).$$

Analogamente per i concetti di limite sinistro del rapporto incrementale e limite sinistro della funzione derivata. Se il limite  $f'_+(x_0)$  esiste finito allora si dice che esiste la derivata destra di  $f$  in  $x_0$  (o che  $f$  ammette derivata destra in  $x_0$ ) e  $f'_+(x_0)$  è detto derivata destra di  $f$  in  $x_0$  (cfr. [1, par. 14.3]). Ricordiamo che una funzione è derivabile in  $x_0$  se e solo se la derivata destra e sinistra di  $f$  in  $x_0$  (esistono e) coincidono. Per le nozioni di base sulla derivazione si veda [3] o [5].

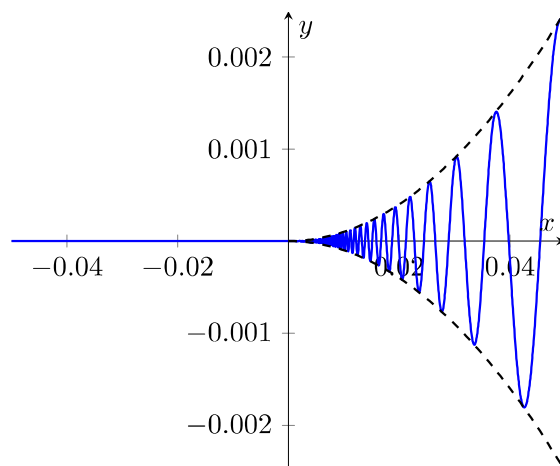
**Il nostro scopo è stabilire quale relazione c'è tra l'esistenza del limite destro (sinistro) in  $x_0$  della funzione derivata  $f'$  e l'esistenza della derivata destra (sinistra) di  $f$  in  $x_0$ .**

Si consideri il seguente esempio

*Esempio 1.* Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione  $f(x)$  è continua per ogni  $x$ , visto che i due tratti sono continui, 0 è l'unico punto di raccordo e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ . Si veda la Fig. 1. Cfr. [2, ex. 3.2].

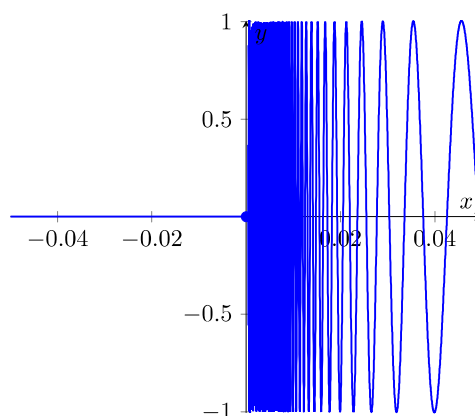
Fig. 1 - Grafico della funzione  $f(x)$  dell'Esempio 1

Inoltre  $f(x)$  è derivabile su  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  e, con le usuali regole di derivazione, si verifica facilmente che

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Notiamo che il  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  non esiste, mentre  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ . Gli studenti alle prime armi sarebbero portati a dire che  $f(x)$  non è derivabile in 0. Invece non è così: calcolando la derivata destra in 0 si ha  $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 0$ , e quindi la funzione è derivabile, perché le derivate destra e sinistra esistono e coincidono. Si veda la Fig. 2.



Fig. 2 - Grafico della funzione  $f'(x)$  dell'Esempio 1

Perciò: data una funzione continua in  $x_0$  e derivabile in un intorno di  $x_0$ , tranne al più in  $x_0$ , non è possibile escludere la derivabilità in  $x_0$  sulla base della non esistenza del limite destro (o sinistro) della derivata, per  $x$  che tende a  $x_0^+$  (o  $x_0^-$ ).

Fortunatamente però un teorema può aiutarci a stabilire se una tale funzione è derivabile in  $x_0$  (oppure no). Il teorema ci consente di ottenere informazioni sulla derivabilità in  $x_0$  attraverso lo studio dei limiti in  $x_0$  della funzione derivata, evitandoci di dover ricorrere alla definizione di derivata in  $x_0$  come limite del rapporto incrementale.

**Teorema 1.** Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  funzione continua su  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ . Supponiamo che il limite  $f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  esista e sia pari a  $L$  (finito o infinito). Allora  $f'_+(a)$ , il limite destro del rapporto incrementale di  $f$  in  $a$ , è pari a  $L$ . (Analogamente: se  $f'(b^-) = L$  allora  $f'_-(b) = L$ ).

*Dimostrazione.* La dimostrazione si basa su una semplice applicazione del teorema del valor medio, o di Lagrange (cfr. [3, Teor. 8.1]), attraverso il quale riusciamo ad approssimare il rapporto incrementale in  $x_0$  con la derivata in un punto vicino, e quindi a mettere in relazione il limite destro del rapporto incrementale con il limite destro della funzione derivata.

Più in dettaglio: per ogni  $h \in (0, b - a)$ , per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste  $\xi(h) \in (a, a + h)$  tale che

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = f'(\xi(h)).$$

Perciò calcolando il limite destro del rapporto incrementale in  $a$  abbiamo

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(\xi(h)) = L \text{ per l'ipotesi su } f' \text{ e perché}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \xi(h) = a, \text{ con } \xi(h) > a \text{ per ogni } h. \quad \blacksquare$$

*Osservazione 1.* Notiamo in particolare che se  $L$  è finito allora per definizione  $f$  è derivabile a destra in  $a$ . Se  $L$  è infinito la derivata destra in  $a$  non esiste. Analogamente per il limite sinistro e la derivata sinistra.

*Osservazione 2.* L'ipotesi di continuità in  $a$  è essenziale, altrimenti non possiamo applicare il teorema di Lagrange. In effetti, come ben si sa, se  $f$  non è continua in  $a$  da destra allora la derivata destra in  $a$  non esiste.

Ricapitolando: per una funzione continua su  $[a, b]$  e derivabile su  $(a, b)$ , l'esistenza del limite di  $f'(x)$  finito per  $x$  che tende a  $a$  da destra implica l'esistenza della derivata destra di  $f$  in  $a$ . Se il limite è infinito invece la derivata destra in  $a$  non esiste. Analogamente per il limite sinistro e la derivata sinistra. Attenzione però! il viceversa non è vero: come abbiamo visto, nell'Esempio 1 il limite destro di  $f'(x)$  per  $f'(x)$  che tende a 0 non esiste ma invece esiste la derivata destra in 0.

A questo punto, utilizzando contemporaneamente due intervalli aperti con  $x_0$  come punto di accumulazione, uno alla sinistra di  $x_0$  e uno alla sua destra, possiamo così concludere:

**Consideriamo una funzione continua in  $x_0$  e derivabile in un intorno di  $x_0$ , tranne al più in  $x_0$ . Se in  $x_0$  esistono finiti il limite destro e il limite sinistro della funzione derivata e coincidono allora la funzione è derivabile in  $x_0$  e la sua derivata è continua in  $x_0$ . Se invece uno dei limiti è infinito oppure se esistono entrambi ma non coincidono allora la funzione non è derivabile in  $x_0$ .**

Seguono tre semplici esempi di applicazione del principio appena esposto, in positivo e in negativo. Nella Sezione 5 si discute se è possibile estendere il principio anche ai casi in cui il limite della funzione derivata non esiste ma la derivata è limitata.

*Esempio 2.* Sia

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si veda la Figura 3.

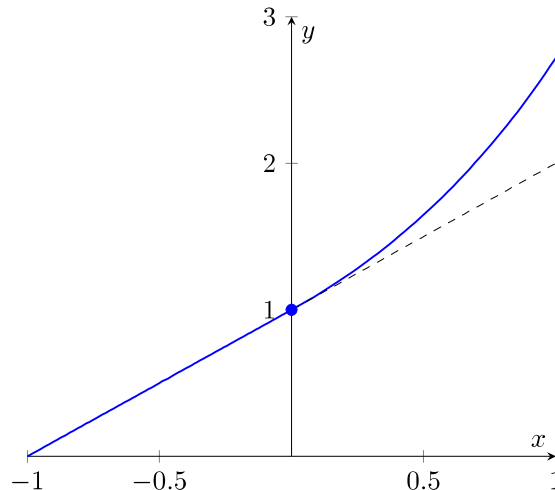


Fig. 3 - Grafico della funzione  $f(x)$  dell'Esempio 2

$f$  è continua su  $\mathbf{R}$  e derivabile su  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  con

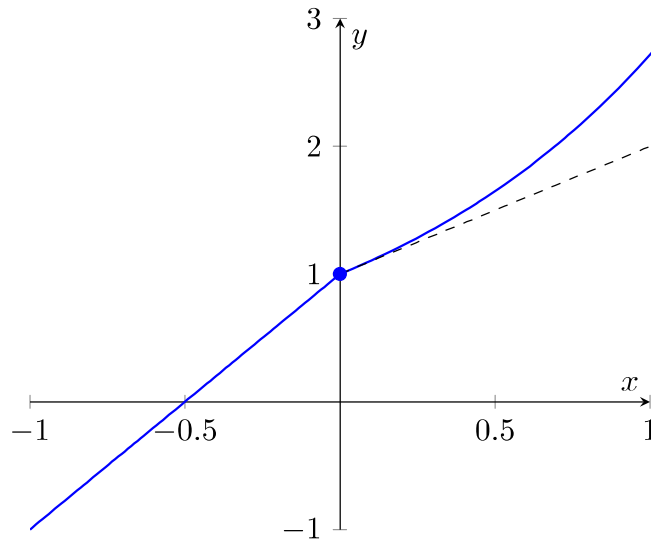
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Inoltre  $f$  è derivabile anche in 0, unico punto di raccordo, e  $f'(0) = 1$ . Lo si può dimostrare o utilizzando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale ( $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h+1-1}{h}$ , i due limiti coincidono, quindi il limite del rapporto incrementale in 0 esiste e vale 1) oppure applicando direttamente quanto abbiamo visto. Consideriamo la funzione derivata calcolata nei due tratti, e notiamo che i suoi limiti sinistro e destro coincidono:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x$ .

*Esempio 3.* Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si veda la Figura 4.

Fig. 4. Grafico della funzione  $f(x)$  dell'Esempio 3

$f$  è continua su  $\mathbf{R}$  e derivabile su  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  con

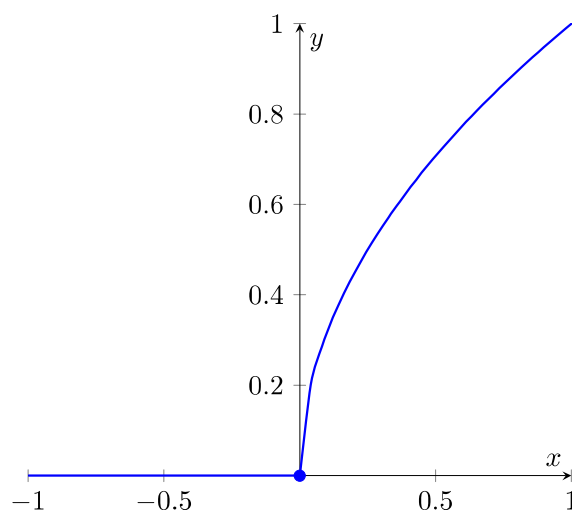
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$f$  però non è derivabile in 0. Lo si può dimostrare o utilizzando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale ( $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \neq 2 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h + 1 - 1}{h}$ , quindi il limite del rapporto incrementale non esiste e la funzione non è derivabile in 0) oppure applicando direttamente quanto abbiamo visto. Consideriamo la funzione derivata calcolata nei due tratti, e notiamo che i limiti sinistro e destro della derivata esistono ma non coincidono:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x$ .

*Esempio 4.* Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si veda la Figura 5.

Fig. 5. Grafico della funzione  $f(x)$  dell'Esempio 4

$f$  è continua su  $\mathbf{R}$  e derivabile su  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  e

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$f$  però non è derivabile in 0. Lo si può dimostrare o utilizzando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale ( $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$  e quindi la funzione non è derivabile in 0) oppure applicando direttamente quanto abbiamo visto. Consideriamo la funzione derivata nel tratto destro, e notiamo che il suo limite destro è infinito:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$ .

## Le discontinuità delle funzioni derivabili

Nell'Esempio 1 abbiamo visto come una funzione  $f$  derivabile possa non avere una funzione derivata  $f'$  continua. Nella discussione che ne è seguita abbiamo però anche intuito che se una funzione è derivabile, le discontinuità della funzione derivata non possono essere totalmente arbitrarie.

Infatti se  $f$  è derivabile, allora per ogni  $x$  devono esistere finiti  $f'_-(x)$  e  $f'_+(x)$ , con  $f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$ . Siccome, per il Teorema 1, se  $f'(x^+)$  esiste allora  $f'_+(x) = f'(x^+)$  e se  $f'(x^-)$  esiste allora  $f'_-(x) = f'(x^-)$ ,

concludiamo che o uno dei due limiti della funzione derivata non esiste, e quindi  $f'(x)$  ha per definizione una discontinuità essenziale in  $x$  (o del terzo tipo) oppure  $f'(x)$  deve essere continua in  $x$ . In particolare  $f'(x)$  non può avere discontinuità eliminabili (cioè in cui i limiti destro e sinistro esistono finiti e coincidono ma non con il valore della funzione nel punto), di tipo salto (cioè in cui i limiti destro e sinistro esistono finiti ma non coincidono) o discontinuità di secondo tipo (cioè in cui i limiti destro e sinistro esistono ma almeno uno è infinito).

## Il teorema di Darboux

Come abbiamo appena visto, la funzione derivata di una funzione derivabile può essere discontinua solo in un modo. Quindi non tutte le funzioni possono essere una funzione derivata. In effetti la funzione derivata di una funzione derivabile, anche se non per forza continua, gode di una tipica proprietà delle funzioni continue: la proprietà del valore intermedio.

**Teorema 2** (di Darboux). *Sia  $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  funzione derivabile. Se  $u, v$  sono punti in  $(a, b)$  con  $u < v$  allora per ogni  $\xi$  compreso tra  $f'(u)$  e  $f'(v)$  esiste  $z \in [u, v]$  tale che  $f'(z) = \xi$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si basa ancora una volta su un'applicazione del teorema di Lagrange. Si veda [5, par. 5.3] o, per una dimostrazione alternativa, [4] o [6, par. 30.7]. ■

In poche parole il teorema afferma che la funzione derivata  $f'$ , **anche se non continua**, assume tra  $u$  e  $v$  almeno una volta tutti i valori tra  $f'(u)$  e  $f'(v)$ .

## È possibile estendere il Teorema 1?

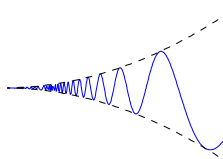
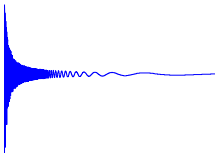
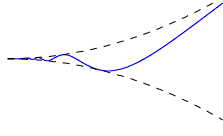
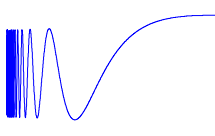
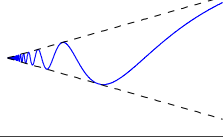
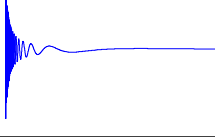

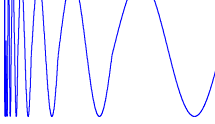
Consideriamo funzioni continue in  $x_0 \in \mathbf{R}$ , derivabili in un intorno di  $x_0$ , tranne al più in  $x_0$ , e per le quali non esiste il limite destro in  $x_0$  della derivata.

Visto l'Esempio 1 si è tentati di ipotizzare che l'esistenza della derivata destra dipenda dalla limitatezza della derivata in un intorno di  $x_0$ . In uno slancio di ottimismo – ricordando l'Osservazione 1 – si potrebbe poi supporre che, al contrario, la derivata destra non possa esistere se in un intorno di  $x_0$  la derivata è illimitata.

Non è così: nella Tabella 1 sono riportati quattro esempi di funzioni continue ovunque (basta porle uguali a 0 in 0), che verificano anche le altre assunzioni iniziali, con derivata limitata/illimitata in un intervallo  $(0, \epsilon)$  e con derivata destra in 0 che esiste/non esiste. La tabella esaurisce tutte le possibilità. I primi tre esempi sono ben noti in letteratura (cfr. ad esempio [2, ex. 3.2, 3.6]). Per l'ultimo esempio non si può ricorrere a funzioni simili alle prime tre (vedi [5, ex. 13, cap. 5]), quindi bisogna inventarsi una funzione  $G$  in modo un po' artificioso, che viene descritto sotto.

In conclusione il Teorema 1 non si può generalizzare ulteriormente: **se in  $x_0$  il limite destro della funzione derivata non esiste allora non possiamo dedurre nulla sull'esistenza della derivata destra**. Può esistere, può non esistere, e c'è poco da fare: bisogna verificarlo con la definizione di limite del rapporto incrementale.

Tabella 1. Esempi

Funzione $f$	$f'$ in $(0, \epsilon)$	$f'_+$ in 0	$f$ in $(0, \frac{1}{2})$	$f'$ in $(0, \frac{1}{2})$
$x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$	illimitata	esiste finito		
$x^2 \sin(\frac{1}{x})$	limitata	esiste finito		
$x \sin(\frac{1}{x})$	illimitata	non esiste		
$G(x)$	limitata	non esiste		

Per trovare  $G(x)$  con le proprietà richieste partiamo dalla funzione  $g(x)$  di Figura 6 costruita a tratti suddividendo l'intervallo  $[0,1]$  nei sotto-intervalli  $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$  al variare di  $n \in \mathbf{N}$  e considerando, in ogni sotto-intervallo, la funzione seno tra 0 e  $2\pi$ , dopo averla compressa adeguatamente. Ovvero:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \sin\left(2^{n+2}\pi\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) & \text{se } \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

La funzione  $g$  è continua ovunque tranne in 0 ed è limitata, quindi  $g$  è Riemann-integrabile. Chiamiamo  $G$  la funzione integrale di  $g$ , i.e.,  $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ .

Si veda la Figura 7.

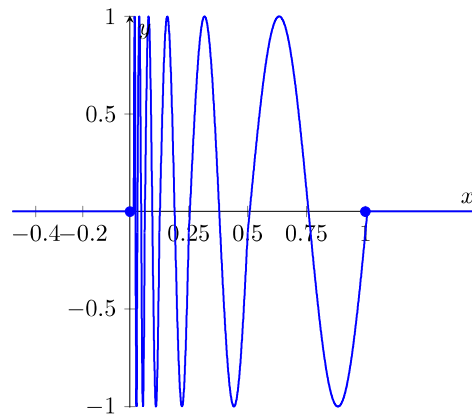


Fig. 6- Grafico della funzione  $g(x)$



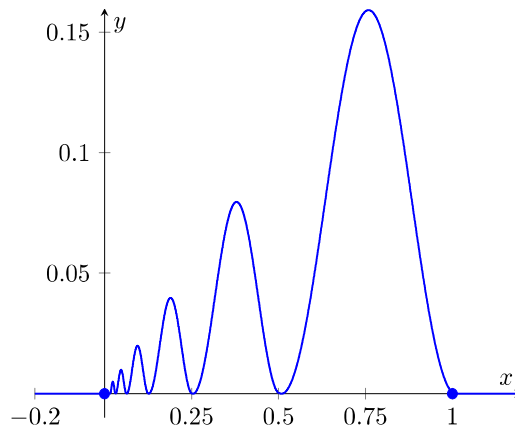


Fig. 7 - Grafico della funzione  $G(x)$

Potremmo ricavarci l'espressione analitica di  $G(x)$ , ma non è necessario. Il teorema fondamentale del calcolo integrale (cfr. [3, teor. 9.2]) ci assicura che  $G'(x) = g(x)$  ovunque tranne al più in 0, quindi  $G$  ha derivata limitata in  $(0, \varepsilon)$ .

Dimostriamo che  $G$  non ha la derivata destra in 0.

Si veda la Figura 8.

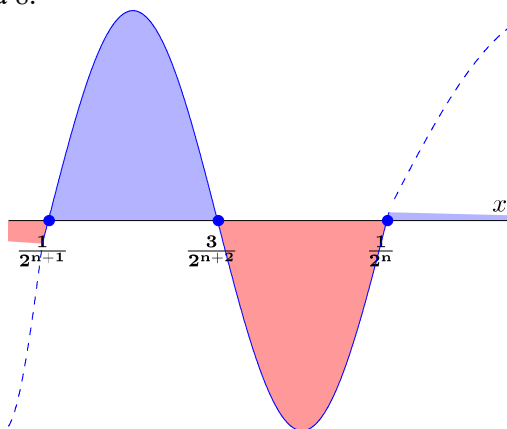


Fig. 8 - Grafico della funzione  $g(x)$  tra  $\frac{1}{2^{n+1}}$  e  $\frac{1}{2^n}$

Dato che la parte positiva (in azzurro) e la parte negativa (in rosso) del seno si compensano in ogni intervallo  $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ , allora, per ogni  $n \in \mathbf{N}$ ,  $G\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ .

D'altra parte, visto che l'area azzurra sotto la curva tra  $\frac{1}{2^{n+1}}$  e  $\frac{3}{2^{n+2}}$  è pari a  $\frac{1}{2^{n+1}\pi}$ , si ha  $G\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}\pi}$ .

Considerando i limiti del rapporto incrementale in 0 (da destra) relativo alle due successioni, abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G\left(\frac{1}{2^n}\right) - G(0)}{\frac{1}{2^n}} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right) - G(0)}{\frac{3}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2^{n+1}\pi} \frac{2^{n+2}}{3} = \frac{2}{3\pi}.$$

Il rapporto incrementale in 0 (cioè  $\frac{G(h) - G(0)}{h}$ ) è una funzione di  $h$ . Allora per il cosiddetto “teorema ponte” tra successioni e funzioni (cfr. [3, Teor. 4.1]) il suo limite per  $h$  che tende a 0 da destra se esiste deve coincidere con il limite calcolato sostituendo a  $h$  una qualsiasi successione che tenda a 0 da destra. Ma i limiti calcolati attraverso le due successioni differiscono e quindi il limite destro del rapporto incrementale in 0 non può esistere. Quindi  $G$  non ha la derivata destra in 0.

## Conclusioni

Gli studenti spesso preferiscono controllare la derivabilità di una funzione in un punto evitando la definizione di limite del rapporto incrementale, e studiando invece la continuità della funzione derivata nel punto, senza realmente essere consapevoli del perché ciò sia lecito. Come abbiamo visto in questo articolo, il sistema è effettivamente corretto per le funzioni usualmente oggetto di verifica nell'ultimo anno delle scuole superiori o nei corsi di matematica generale del primo anno dell'università, ovvero in tutti i casi in cui i limiti della funzione derivata, da destra e da sinistra, tendono all'infinito, oppure esistono finiti. Abbiamo anche visto però che continuità della derivata e derivabilità non sono condizioni equivalenti, e che il metodo non è generalizzabile ai casi in cui il limite della funzione derivata non esiste, neanche se la derivata è limitata.

## Ringraziamenti

Ringrazio Alfonso Sorrentino, Antonio Cigliola, Cristiana Di Russo, Roberto Natalini per i loro preziosi suggerimenti.

## Riferimenti Bibliografici

- [1] DE MARCO G., *Analisi uno*, Zanichelli, Bologna, 1996.
- [2] GELBAUM B.R., OLMSTED J.M.H., *Counterexamples in analysis*, Dover, New York, 2003.
- [3] GIUSTI E., *Analisi matematica I*, Bollati Boringhieri, Torino, 1988.
- [4] OLSNES L., A new proof of Darboux's theorem, *The American Mathematical Monthly*, 111(8), 713-715, 2004.
- [5] RUDIN W., *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.
- [6] SPRECHER D.A., *Elements of real analysis*, Dover, New York, 1987.



## **Il concorso a cattedra 2020 e la professionalità del docente di matematica**

### **The 2020 teacher qualification exam and the math teacher skills**

**Massimo Esposito<sup>1</sup>**

#### **Abstract**

In light of the 2020 recruitment call for candidate teachers, and, more specifically, of the enclosed examination programs and the structure and characteristics of the examination (established by Decree 59/2014 and Law 145/2018), a comprehensive profile of the skills and competences required in order to be an effective math teacher is outlined. The overall profile refers – of course – to the essential mastery of disciplinary subject matters, but also to the skills relevant to teaching design, methods, learning environments, in order to encourage a serious reflection that may help candidates to face the examination with due awareness, and the teachers already in service to re-evaluate and re-think their teaching practices.

Il concorso ordinario finalizzato al reclutamento del personale docente nella scuola secondaria di primo e secondo grado, bandito con Decreto dipartimentale 499/2020 e pubblicato nella Gazzetta Ufficiale n. 34 del 28 aprile 2020, porterà, come noto, alla assunzione di 25.000 docenti, tra posti comuni e di sostegno.

Dalla lettura attenta del bando di concorso e dei programmi concorsuali emergono numerose indicazioni significative e importanti sia – come è ovvio – per chi si prepara ad affrontare le prove, sia per chi è già all'interno del mondo della scuola. Per questi ultimi infatti, impegnati nella sfida della quotidianità della relazione didattica, con tutti gli affanni che essa comporta (e quest'anno che va a concludersi, da questo punto di vista, va decisamente

---

<sup>1</sup> [massimo.esposito24@istruzione.it](mailto:massimo.esposito24@istruzione.it) MI-D.G. per gli Ordinamenti Scolastici e la Valutazione del Sistema Nazionale di Istruzione Viale Trastevere, 76/A – 00153, Roma.

annoverato tra quelli memorabili!), essa può costituire un momento di riflessione sul proprio profilo professionale, in rapporto a quello richiesto a coloro che tra pochi mesi saranno colleghi, e sulle proprie prassi didattiche.

Il concorso si articola su due prove scritte e un colloquio orale; per quanto riguarda le prove scritte, la prima di esse *“ha l’obiettivo di valutare il grado delle conoscenze e competenze del candidato sulle discipline afferenti alla classe di concorso stessa”*, mentre la seconda *“si articola in due quesiti a risposta aperta volti, il primo, all’accertamento delle conoscenze e competenze antropo-psico-pedagogiche, il secondo, all’accertamento delle conoscenze e competenze didattico-metodologiche in relazione alle discipline oggetto di insegnamento di ciascuna classe di concorso”*.

Alla luce di questa descrizione delle prove scritte, con riferimento alle quattro classi di concorso che rientrano nell’area matematica (A-26, A-27, A-28 e A-47), appare senz’altro degno di nota il fatto che nonostante sia esplicitamente previsto che il secondo quesito della seconda prova sia specificamente volto agli aspetti didattico-metodologici, per tali classi di concorso anche nelle indicazioni per la prima prova scritta (Allegato A al bando), la *“Didattica della matematica”* venga evidenziata come tematica specifica (anzi, come la *prima tematica specifica*). Si richiede al candidato, in particolare, di dimostrare adeguate conoscenze e competenze relativamente alla *“didattica laboratoriale”* e, distintamente, ai *“Nodi concettuali, epistemologici, linguistici e didattici dell’insegnamento e dell’apprendimento della matematica”* e alle *“pratiche didattiche per l’apprendimento della matematica mediante l’uso delle tecnologie dell’informazione e della comunicazione”*. In altri termini, gli aspetti didattici e metodologici possono essere oggetto di discussione in entrambe le prove scritte: possiamo dedurre che la capacità di progettare e costruire un efficace *ambiente di apprendimento della matematica* è ritenuta – a giusta ragione! – essere un elemento centrale della professionalità docente.

Se si va poi ad analizzare la descrizione che il bando di concorso fornisce relativamente alla prova orale, che recita: *“La prova orale ... valuta la padronanza delle discipline, nonché la capacità di progettazione didattica efficace, anche con riferimento alle TIC, finalizzata al raggiungimento degli obiettivi previsti dagli ordinamenti didattici vigenti ... consiste nella progettazione di una attività didattica, comprensiva dell’illustrazione delle scelte contenutistiche, didattiche e metodologiche compiute e di esempi di utilizzo pratico delle TIC”*, verrebbe da dire che *“il cerchio si chiude”*: il candidato deve dimostrare, nell’arco delle prove concorsuali, non solo di padroneggiare i contenuti disciplinari, le *“metodiche”* didattiche laboratoriali

e gli strumenti tecnologici, ma anche di saper progettare, a partire dagli obiettivi ordinamentali (traguardi di competenza e obiettivi di apprendimento) un'attività didattica che faccia buon uso di tali contenuti, metodi e strumenti, mettendoli al servizio del conseguimento di questi obiettivi.

Il programma allegato al bando di concorso dunque, lungi dal rappresentare un mero elenco di contenuti, mette pienamente in luce l'intenzione del Ministero di porre al centro delle prove concorsuali l'accertamento delle capacità di adottare un approccio laboratoriale all'insegnamento della matematica, concentrando l'attenzione sui nodi e sui nuclei fondamentali, avvalendosi in modo ragionato e intenzionale delle tecnologie, all'interno di una visione progettuale "di percorso" che mantenga ferma la rotta verso i traguardi fissati dall'ordinamento vigente. In definitiva, i tre elementi costitutivi del lavoro in classe – contenuti disciplinari, scelte metodologiche, strumenti – sono oggetto delle due prove scritte, mentre la prova orale mira a costituire un momento di sintesi, in cui si chiede al candidato di dimostrare la capacità di collocare questi tasselli in un quadro organico attraverso la progettazione didattica per competenze.

Approccio laboratoriale da un lato, e tecnologie dell'informazione e della comunicazione dall'altro, dunque; essi vanno visti, è bene sottolinearlo, come aspetti distinti e complementari. È utile, a questo proposito, ribadire che "didattica laboratoriale" non significa "lezione in laboratorio", non significa (o almeno non significa *solo*) Geogebra, Cabri, Desmos, Maple, calcolatrice grafica ... significa viceversa un approccio che cerchi di creare le condizioni perché gli studenti possano *fare* matematica anziché sentirla raccontare, significa *didattica dell'errore*, significa porre la correttezza formale e l'uso corretto del linguaggio specifico come traguardi anziché pretendere che siano punti di partenza o premesse dell'apprendimento, significa usare i problemi (magari *di realtà*, ma certo non solo!) per arrivare ai concetti e ai metodi, anziché partire dai concetti e dai metodi perché sono quelli trattati dal successivo capitolo del libro di testo, e poi, *dopo*, assegnare qualche problema su *quei* concetti e su *quei* metodi, finendo così per rendere tutto il processo artificioso agli occhi degli studenti.

In altri termini, lavorare in modo laboratoriale significa uscire dalla trappola del "culturismo" matematico, del lavoro teso a costruire "muscolatura" matematica a colpi di lunghe serie di esercizi, senza che gli studenti sappiano o capiscano cosa potranno farne poi di quei muscoli.

Si tratta in effetti di un vero e proprio capovolgimento della prassi didattica ancora largamente prevalente nelle nostre aule, in particolare per quanto

riguarda la matematica, dalla quale facciamo fatica a staccarci, per tanti motivi – alcuni anche buoni!

Tutto ciò non ha a che fare con le tecnologie, se non marginalmente. Possiamo tranquillamente introdurre dosi massicce di tecnologia all'interno di un canone didattico assolutamente tradizionale: porteremo a casa alcuni benefici, come quelli connessi alla velocità, alla facilità di riproduzione, condivisione e trasmissione, ma non faremo un passo verso lo scioglimento di qualcuno di quei “nodi” cui il programma concorsuale fa riferimento, verso un incontro degli studenti con la matematica che non produca nella grande maggioranza di essi frustrazione, rifiuto, ostilità. Anzi, le tecnologie molto spesso hanno l'effetto di evidenziare le difficoltà e i problemi, lungi dal risolverli ... ciò è tanto più vero, quanto più l'approccio degli studenti all'uso di questi strumenti è di tipo “fideistico”, non supportato da un adeguato spirito critico (imparare a imparare) e da una motivazione a cercare, indagare, ricercare informazioni, esplorare ipotesi e possibili soluzioni senza aver paura di sbagliare, anzi utilizzando gli errori per crescere. E – qui è il punto nodale – il ruolo del docente nello stabilire questo “clima” è insostituibile: tra pochi anni gli strumenti tecnologici saranno sicuramente altri e diversi, ma la mediazione e lo stimolo del docente, la sua accorta regia del processo, la costruzione dell'ambiente di apprendimento nel senso più pieno del termine, tutto questo servirà sempre e servirà sempre di più. È di fondamentale importanza pertanto, guardando al futuro dell'insegnamento della matematica, ma più in generale al futuro della professione docente, che coloro che si avviano oggi a svolgere questo lavoro meraviglioso e difficile abbiano piena consapevolezza di come *queste competenze che dovranno dimostrare, sviluppare, coltivare e mettere in campo sono altrettanto importanti di quelle disciplinari*, e non ne costituiscono affatto un mero “corredo”.

D'altra parte, è indubbio che i potenti strumenti citati sopra (e i tanti altri che esistono, come tutti i frequentatori della Rete sanno bene) siano ormai parte irrinunciabile del bagaglio professionale del docente di matematica, e pertanto meritino senz'altro di essere oggetto di accertamento specifico nell'ambito di un concorso: ma sono – per l'appunto – strumenti, per di più caratterizzati dalla volatilità tipica della tecnologia, che corre veloce e consuma rapidamente le novità.

Un'altra indicazione molto significativa, dal punto di vista culturale e didattico, è contenuta nel programma concorsuale, laddove si parla di *“concetto di algoritmo; risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione”*. Questa indicazione si connette direttamente alle Indicazioni nazionali per la matematica nei licei, che richiedono la



*“costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo”* e descrivono il profilo di uno studente che *“conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo”*.

C'è qui un ponte gettato verso un territorio di dimensioni pressoché sconfinite, e dalle enormi potenzialità didattiche. Citando Wigner:

*“...mathematical concepts turn up in entirely unexpected connections. Moreover, they often permit an unexpectedly close and accurate description of the phenomena in these connections ... we do not understand the reasons of their usefulness”* [1]

Quello che si chiede al futuro docente è la capacità di valorizzare il potere di rappresentazione e di predizione della matematica, il mistero della fecondità del rapporto tra la matematica e il mondo dei fenomeni, su cui si interrogava Wigner nel celebre articolo citato sopra; con un aggancio in più, che è quello che riporta al calcolo numerico e all'utilizzo degli strumenti informatici, che allarga di molto lo spettro delle esperienze di apprendimento possibili. All'incrocio tra la matematica, le scienze fisiche e naturali e l'informatica, c'è l'idea di utilizzare strumenti di calcolo automatico per simulare l'andamento di un fenomeno (fisico, economico, sociologico ... o un'epidemia?) del quale si è preventivamente costruito il (semplice) modello matematico. Questa idea produce ricadute in termini di apprendimento molteplici e preziose:

- centralità degli aspetti quantitativi: gli strumenti informatici producono numeri, non simboli né formule. Sta allo studente riportare i numeri alle unità di misura, valutarne criticamente la plausibilità, porli in relazione con quelli che rappresentano le altre grandezze coinvolte nel fenomeno e rappresentate nel modello; sono a tutti noi ben note ed evidenti le difficoltà che incontrano gli studenti, dopo anni di addestramento (uso questo termine non a caso) alla manipolazione “cieca” di simboli, a porre quei simboli in relazione con quantità fisiche;
- il passaggio dal fenomeno al modello e poi alla rappresentazione informatica richiede allo studente un reale protagonismo e costituisce una sfida, che gli offre l'opportunità (!) di compiere errori fecondi e istruttivi;
- possibilità di sperimentare “cosa cambia se”, di verificare come cambiano le predizioni del modello al variare dei diversi parametri, di

scoprire i limiti (matematici) del modello, quelli (fisici) del fenomeno, quelli (numerici) della rappresentazione;

- impostare la simulazione di un fenomeno, anche semplice, adoperando un linguaggio di programmazione, o anche un foglio elettronico, è un classico esempio di problema non strutturato (“ill structured problem”) o poco strutturato (“moderately structured problem”). Nella letteratura scientifica [2] i problemi di questo tipo sono pressoché unanimemente ritenuti un potente strumento per la costruzione di competenze di problem solving, in quanto stimolano la creatività, il pensiero laterale, la flessibilità cognitiva, il trasferimento della conoscenza dichiarativa o procedurale in un differente contesto [3,4,5].

Un’ultima osservazione, infine, riguardo alla “*progettazione didattica efficace ... finalizzata al raggiungimento degli obiettivi previsti dagli ordinamenti didattici vigenti*”, il cui accertamento è un obiettivo (ambizioso!) della prova orale: credo che un riferimento essenziale per gli aspiranti insegnanti di discipline dell’area matematica possa ritrovarsi nei quadri di riferimento e nelle griglie di valutazione per l’esame di Stato, emanati con il DM 769/2018 relativamente alle discipline oggetto di seconda prova scritta, tra cui ovviamente la matematica e la fisica nei licei scientifici. In particolare, le griglie (che, a mio parere, sarebbe più corretto chiamare “rubriche”) forniscono un insieme contenuto e coeso di *indicatori di competenza*, che può e deve costituire un riferimento costante per la progettazione didattica complessiva lungo tutto il percorso. Tali indicatori discendono ovviamente dalle Indicazioni nazionali, e non potrebbe essere diversamente; ma essi offrono, come valore aggiunto, degli “assi” di competenza rispetto ai quali proiettare i contenuti disciplinari, indipendentemente da come il docente intende distribuire i contenuti stessi nel corso degli anni del corso di studi.

Gli indicatori possono pertanto certamente costituire un efficace punto di partenza per il candidato che voglia dimostrare, nell’ambito del colloquio orale, una volta scelto un nucleo disciplinare e i connessi obiettivi di apprendimento in termini di conoscenze e abilità, la sua capacità di progettare un “segmento” di percorso di cui andrà a individuare: 1) il contributo che tale contenuto disciplinare può apportare relativamente a ciascuno degli indicatori di competenza; 2) l’approccio metodologico che intende adottare, e i relativi materiali di lavoro; 3) gli strumenti che intende utilizzare (siano essi tecnologici o tradizionali). Seguendo questo “fil rouge” il candidato potrà dare una coerenza complessiva alla sua esposizione e raccordare la sua proposta

didattica con un importante supporto normativo, dimostrando così, oltre alle necessarie competenze tecnico-didattiche, consapevolezza e padronanza delle più recenti e significative innovazioni introdotte nell'ordinamento.

### **Riferimenti Bibliografici**

- [1] WIGNER E., The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **13** (1) (February 1960), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [2] JONASSEN D. H., Instructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes, *Educational Technology: Research and Development*, **45** (1), 65-94, 1997.
- [3] VOSS J. F., POST T. A., On the solving of ill-structured problems In M. T. H. CHI, R. GLASER, & M. J. FARR, *The nature of expertise*, Hillsdale, NJ, 1988.
- [4] GALLAGHER S.A., STEPIEN W.J., ROSENTHAL H., The effects of problem-based learning on Problem solving, *Gifted Child Quarterly*, **36** (4), 1992.
- [5] CHOI I., LEE K., Designing and implementing a case-based learning environment for enhancing ill-structured problem solving: classroom management problems for prospective teachers, *Educational Technology Research and Development*, **57**, 2009.



## Poligoni regolari espansi e ristretti

### Expanded and narrow regular polygons

Paolo Hägler<sup>1</sup> e Giorgio Mainini<sup>2</sup>

#### Abstract

Given a regular polygon of  $n$  sides, with  $n \geq 5$ ,  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  larger homothetic regular polygons are built and as many smaller ones and for each of them the homothetic ratio is calculated.

Se si considera un poligono regolare di  $n \geq 5$  lati e si tracciano le rette che si ottengono prolungando i lati, si osserva che queste si intersecano tra di loro in svariati punti.

Per capire cosa succede, abbiamo deciso di utilizzare un approccio didattico e deduttivo che può essere facilmente spiegato anche a ragazzi di scuola media (mentre il calcolo dei rapporti di omotetia può essere alla portata di allievi delle scuole medie superiori), mentre una possibile costruzione più diretta con procedimenti definiti in maniera più rigorosa è riportata in seguito.

Partiamo quindi con i valori più piccoli di  $n$ .

Con  $n$  uguale a 5 e a 6 (vedi figure 1 e 2) la situazione è molto chiara poiché ogni retta ne interseca unicamente altre due e si formano il pentagono e l'esagono stellato (figure note soprattutto come pentagramma e stella di Davide).

---

<sup>1</sup> [paolo.haegler@gmail.com](mailto:paolo.haegler@gmail.com); docente di matematica e vicedirettore del liceo di Mendrisio, Svizzera.

<sup>2</sup> [gmainini@ticino.com](mailto:gmainini@ticino.com); già docente di matematica e direttore, scuola media di Lugano-Besso, Svizzera.

Comunicato da F. de Giovanni

Dimostreremo che se uniamo i vertici di questi poligoni stellati otteniamo di nuovo dei poligoni regolari, e questi, essendo a loro volta regolari, sono omotetici ai poligoni di partenza.

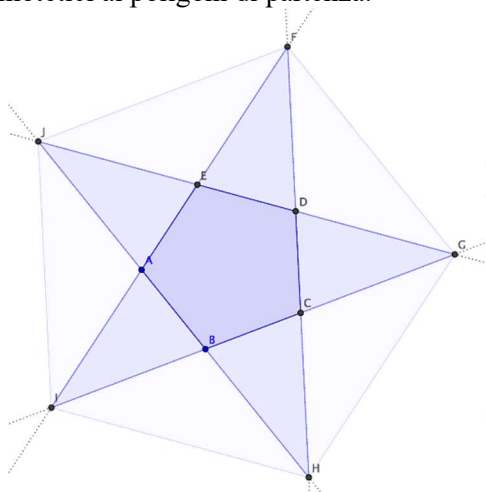


Fig. 1

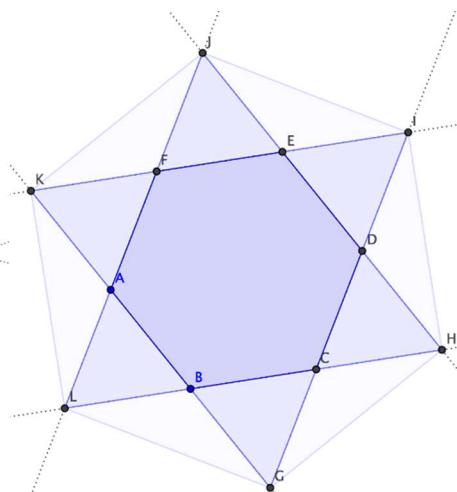


Fig. 2

A partire da  $n = 7$  la situazione diventa già più complessa e il disegno più difficile da decifrare (vedi figura 3). In effetti non esiste un unico poligono stellato di 7 lati, ma ce ne sono due. In effetti, a differenza dei casi con  $n = 5$  e  $n = 6$ , una retta ottenuta prolungando un lato non ne interseca più soltanto un'altra per ogni parte del lato, ma ne interseca due. Anche con  $n = 8$  ogni retta ne interseca due per parte, poi per  $n = 9$  e  $n = 10$  ogni retta ne interseca 3 e così via.

In effetti, nel piano una retta interseca tutte le altre, a meno che queste le siano parallele.

Con  $n=5$  quindi ci sono 5 rette, e ogni retta ne interseca 4, ma due di queste le interseca nei vertici del poligono, siccome si tratta delle rette tracciate prolungando i lati adiacenti a quello su cui è stata tracciata la retta presa in considerazione. Di conseguenza ogni retta ne interseca altre due all'esterno del poligono, ossia una per parte del lato.

In generale con  $n$  dispari ( $n = 2m+1$ ) abbiamo la stessa situazione. Ogni retta ne interseca  $2m$ , di cui 2 nei vertici del poligono, e quindi  $2m-2$  all'esterno di

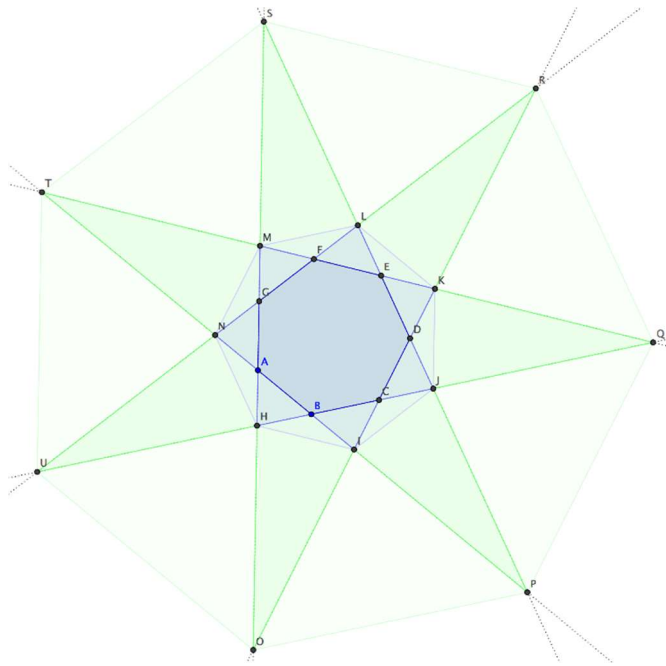


Fig. 3

esso, e di conseguenza  $m-1$  per parte del lato.

Vediamo ora gli  $n$  pari. Con  $n=6$  ci sono 6 rette, e ogni retta ne interseca 4, poiché una è parallela alla retta considerata, ma due di queste le interseca nei vertici del poligono, siccome si tratta delle rette tracciate sovrapposte ai lati adiacenti a quello su cui è stata tracciata la retta presa in considerazione. Di conseguenza ogni retta ne interseca altre due all'esterno del poligono, ossia una per parte del lato.

In generale con  $n = 2m$  abbiamo la stessa situazione. Ogni retta ne interseca  $2m-2$ , di cui 2 nei vertici del poligono, e quindi  $2m-4$  all'esterno di esso, e di conseguenza  $m-2$  per parte del lato.

Quindi a partire da  $n = 7$ , per ottenere i poligoni stellati, occorre considerare unicamente le intersezioni opportune. In particolare notiamo che i poligoni regolari si ottengono considerando le intersezioni di rette ottenute prolungando lati adiacenti, che possiamo definire tra loro a distanza 0. In

generale possiamo definire la distanza tra i lati del poligono, e quindi tra le rette ottenute prolungandoli, intuitivamente come il numero minimo di lati intermedi che occorre percorrere per congiungere i due lati considerati. Una definizione rigorosa la otteniamo se costruiamo il grafo ciclico di ordine  $n$  che ha per vertici i lati del poligono e per spigoli i vertici del poligono stesso. La distanza tra i vertici del grafo così ottenuto è quella che usiamo per definire la distanza dei lati del poligono. Notiamo quindi che in un triangolo (non solo quello equilatero) la distanza tra i lati è sempre 0, mentre nei quadrilateri esistono due coppie di lati a distanza 1; tuttavia il quadrilatero regolare è tale per cui queste coppie sono formate da lati paralleli, e quindi le rette sovrapposte non si intersecano. Non ci sono quindi pentagoni stellati con 3 e 4 lati. Nel pentagono ogni lato si trova a distanza 0 da due lati e a distanza 1 dagli altri due, e possiamo notare, guardando i disegni precedenti, che il pentagono stellato ha per vertici le intersezioni delle coppie di rette a distanza 1. Per  $n = 6$  abbiamo 3 coppie di rette a distanza 2, ma queste sono parallele e quindi non si intersecano, mentre ogni retta ne possiede 2 a distanza 1, e possiamo notare che nell'esagono stellato i vertici si trovano alle intersezioni di rette a distanza 1.

Per analogia, per  $n \geq 7$ , i vertici opportuni da considerare sono quelli ottenuti dall'intersezione di due rette ad una distanza  $k$  definita (con  $k \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ ). In effetti con  $n$  dispari la distanza massima è  $\frac{n-3}{2}$ , poiché ogni retta interseca  $n-1$  rette, di cui 2 a distanza 0, e di conseguenza  $n-3$  con una distanza strettamente positiva. Per simmetria due sono a distanza 1, due a distanza 2 e così via fino alla distanza massima che è  $\frac{n-3}{2}$ . In effetti, essendoci due rette per ogni distanza tra 0 e quella massima (che chiamiamo  $m$ ), otteniamo in totale  $2(m+1)$  rette, a cui dobbiamo aggiungere la retta usata come riferimento per avere la totalità della  $n$  rette. Da  $n = 1 + 2(m+1)$  segue  $m = \frac{n-3}{2}$ .

Con  $n$  pari ogni retta interseca  $n-2$  rette (tutte tranne se stessa e quella opposta, parallela, che è a distanza  $\frac{n-2}{2}$ ). Due di queste sono a distanza 0, due a distanza 1, due a distanza 2 e così via fino alla distanza  $\frac{n-4}{2}$ , che è quella massima per avere un'intersezione. In effetti, essendoci due rette per ogni distanza tra 0 e quella massima (che chiamiamo  $m$ ), otteniamo in totale  $2(m+1)$  rette, a cui dobbiamo aggiungere la retta usata come riferimento e quella opposta per avere la totalità della  $n$  rette. Da  $n = 2 + 2(m+1)$  segue  $m = \frac{n-4}{2}$ . Abbiamo



quindi dimostrato che la distanza massima tra due rette che si intersecano è  $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ .

Di conseguenza esistono  $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$  poligoni stellati costruiti esternamente ad un assegnato  $n$ -gono regolare, tutti ottenibili con il procedimento descritto a partire da un poligono regolare di  $n$  lati. Si tratta dei diversi  $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$  poligoni stellati di  $n$  lati.

Come scritto inizialmente, uniamo ora i vertici dei poligoni stellati. Questi vertici sono  $n$ , in quanto abbiamo una corrispondenza biunivoca con il numero di vertici del poligono di partenza. In effetti, quando uniamo due rette a distanza dispari, ogni vertice del poligono stellato possiamo metterlo in corrispondenza al lato a metà strada tra i due lati che abbiamo prolungato per ottenere le rette, e in un poligono i lati sono tanti quanti i vertici. Quando invece uniamo due rette a distanza pari, ogni vertice del poligono stellato possiamo metterlo in corrispondenza al vertice a metà strada tra i due lati che abbiamo prolungato per ottenere le rette.

Di conseguenza, unendo i vertici dei poligoni stellati, otteniamo altri poligoni con lo stesso numero di lati del poligono originale. Questo procedimento si può applicare a ogni poligono convesso, con risultati anche piuttosto deludenti qualora ci siano più coppie di lati paralleli (chi lo desidera può provare con un pentagono ottenuto da un rettangolo, scegliendo due punti di due suoi lati adiacenti e unendoli per ottenere il quinto lato del poligono ed eliminare le due parti di lati del rettangolo rimaste all'esterno del poligono).

Applicando questo procedimento a dei poligoni regolari, invece, otteniamo figure sulle quali possiamo esprimerci facilmente. Esistono inoltre altre figure sulle quali ci esprimeremo in un prossimo articolo che stiamo elaborando.

In effetti, come già detto, dimostriamo che i poligoni ottenuti sono regolari a loro volta. Consideriamo la circonferenza che passa per tutti i vertici del poligono regolare di partenza e chiamiamo  $C$  il suo centro. Tutti gli  $n$  vertici del poligono di partenza sono alla stessa distanza da  $C$  e i raggi che congiungono  $C$  ai vertici dividono l'angolo giro in  $C$  in  $n$  parti uguali.

I vertici dei poligoni stellati ottenuti congiungendo rette a distanza pari, per ragioni di simmetria assiale del poligono regolare, si trovano sulla retta che passa per  $C$  e per il vertice a metà strada tra le due rette (quello usato per dimostrare che il nuovo poligono ha lo stesso numero di lati di quello originale). Quindi anche le linee che uniscono i vertici del poligono stellato a  $C$  dividono l'angolo giro in  $C$  in  $n$  parti uguali. D'altro canto, i vertici del nuovo poligono, sempre per ragioni di simmetria assiale del poligono

regolare, sono tutti alla stessa distanza da  $C$ , e quindi i vertici del poligono stellato si trovano tutti su una circonferenza di centro  $C$ . Poiché l'angolo in  $C$  è diviso in parti uguali i vertici del poligono stellato formano un poligono regolare.

I vertici dei poligoni stellati ottenuti congiungendo rette a distanza dispari, per ragioni di simmetria assiale del poligono regolare, si trovano sulla retta che passa per  $C$  e per il punto medio del lato a metà strada tra le due rette (quello usato per dimostrare che il nuovo poligono ha lo stesso numero di lati di quello originale). Quindi anche le linee che uniscono i vertici del poligono stellato a  $C$  dividono l'angolo giro in  $C$  in  $n$  parti uguali. D'altro canto, i vertici del nuovo poligono, sempre per ragioni di simmetria assiale del poligono regolare, sono tutti alla stessa distanza da  $C$ , e quindi i vertici del poligono stellato si trovano tutti su una circonferenza di centro  $C$ . Poiché l'angolo in  $C$  è diviso in parti uguali i vertici del poligono stellato formano un poligono regolare.

Questi poligoni sono pertanto regolari e li chiamiamo **poligoni espansi di ordine  $k$** , dove  $k$  è la distanza tra le rette di cui consideriamo l'intersezione (vedi figura 4 dove sono rappresentati un endecagono regolare, e i suoi espansi di ordine 1, 2, 3 e 4).

Siccome questi poligoni sono a loro volta regolari e con lo stesso numero di lati dei poligoni di partenza, essi sono loro omotetici e vediamo di calcolarne il rapporto di omotetia. Prima di tutto ricordiamo che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono di  $n$  lati vale  $180^\circ(n - 2)$ , che in radianti equivale a  $\pi(n - 2)$ ; formula che si può dimostrare facilmente per induzione.

In un poligono regolare, quindi, ogni angolo interno ha un'ampiezza di  $\pi \frac{n-2}{n}$  radianti, che chiameremo  $\alpha$ . Chiameremo invece  $\beta_k$  l'ampiezza dell'angolo interno del poligono stellato di ordine  $k$ .

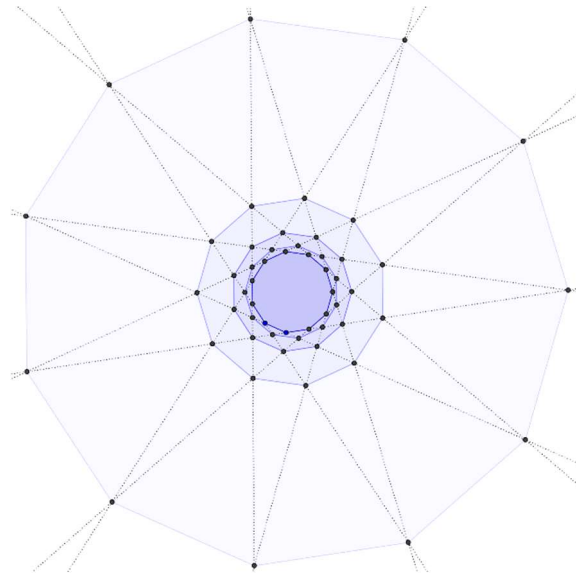


Fig. 4

Chiamiamo invece  $L$  la lunghezza del lato del poligono regolare e  $L_k$  la lunghezza del lato del poligono espanso di ordine  $k$  (come caso limite potremmo anche considerare il poligono espanso di ordine 0 come il poligono regolare stesso). Infine, denotiamo con  $S_k$  la lunghezza del segmento (o parte di esso) del poligono stellato di ordine  $k$  che unisce un vertice del poligono espanso di ordine  $k$  con quello del poligono espanso di ordine  $k-1$  (che coincide con quello regolare di partenza se  $k=1$ ), come da disegno.

Iniziamo ad indagare il rapporto di omotetia tra i poligoni regolari e quelli espansi di ordine 1.

Notiamo nella figura 5 che esistono due diversi triangoli isosceli: uno (come BCH) con un lato coincidente con il lato del poligono regolare (interno al poligono stellato) e uno (come BHI) con un lato coincidente con il lato del poligono espanso di ordine 1 (esterno al poligono stellato). Per il primo, grazie al teorema del coseno, possiamo scrivere  $L^2 = S_1^2 + S_1^2 - 2S_1S_1 \cos \beta_1$ , che possiamo semplificare in  $L^2 = 2S_1^2(1 - \cos \beta_1)$ .

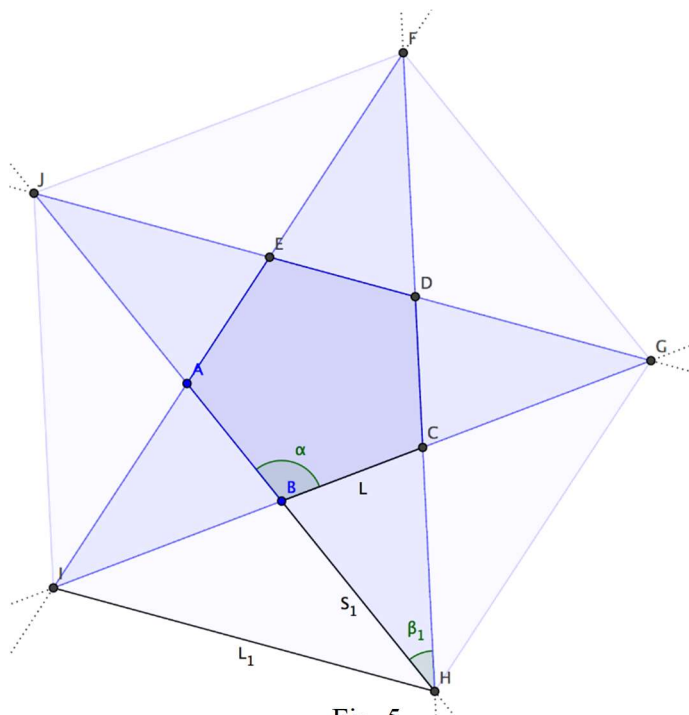


Fig. 5

Per il secondo triangolo, sempre usando il teorema del coseno, possiamo scrivere  $L_1^2 = S_1^2 + S_1^2 - 2S_1S_1 \cos \alpha$ , che possiamo semplificare in  $L_1^2 = 2S_1^2(1 - \cos \alpha)$ .

Di conseguenza otteniamo il rapporto di omotetia  $K_1 = \frac{L_1}{L} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$ .

Da notare che, grazie al primo dei due triangoli, otteniamo  $\beta_1 = 2\alpha - \pi$ . (1)

Di conseguenza, il primo rapporto di omotetia si può semplificare in  $K_1 =$

$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2(\cos \alpha)^2}}$  (i pochi passaggi sono lasciati al lettore più curioso) e poiché  $\alpha$  è

un angolo interno di un poligono regolare, si ottiene addirittura  $K_1 =$

$-\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos \alpha}$  (anche qui i pochi passaggi sono lasciati al lettore più curioso).

Notiamo i valori particolari per  $n=5$  e  $n=6$ .

Nel primo caso  $\alpha = \frac{3\pi}{5}$ , e quindi  $K_1 = -\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}$  che si semplifica in  $1 + \phi$  (anche qui i pochi passaggi sono lasciati al lettore più curioso), dove  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  è il rapporto aureo.

Nel secondo caso  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ , e quindi  $K_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ .

Passiamo ora ai poligoni espansi di ordine 2.

Notiamo nella figura 6 che, oltre ai due diversi triangoli isosceli citati prima, ne esistono altri due diversi: uno con un lato coincidente al lato del poligono espanso di ordine 1 (interno al poligono stellato di ordine 2) e uno con un lato coincidente al lato del poligono espanso di ordine 2 (esterno al poligono stellato di ordine 2). Per il primo, grazie al teorema del coseno, possiamo scrivere  $L_1^2 = S_2^2 + S_2^2 - 2S_2S_2 \cos \beta_2$ , che possiamo semplificare in  $L_1^2 = 2S_2^2(1 - \cos \beta_2)$ .

Per il secondo triangolo, sempre usando il teorema del coseno, possiamo scrivere  $L_2^2 = S_2^2 + S_2^2 - 2S_2S_2 \cos \beta_1$ , che possiamo semplificare in  $L_2^2 = 2S_2^2(1 - \cos \beta_1)$ .

Di conseguenza otteniamo il rapporto di omotetia  $K_2 = \frac{L_2}{L_1} = \frac{L_2 L_1}{L_1 L_1} =$

$$\sqrt{\frac{1-\cos \beta_1}{1-\cos \beta_2}} \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1-\cos \beta_1}} = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1-\cos \beta_2}}.$$

Da notare che, grazie al secondo dei due triangoli e con la relazione (1), otteniamo  $\beta_2 = \alpha - 2\frac{\pi-\beta_1}{2} = \alpha + \beta_1 - \pi = \alpha + (2\alpha - \pi) - \pi = 3\alpha - 2\pi$ .

(2)

Di conseguenza, il secondo rapporto di omotetia è  $K_2 = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1-\cos(3\alpha-2\pi)}}$ .

Notiamo il valore particolare per  $n=8$ .

Abbiamo  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$  e quindi  $K_2 = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

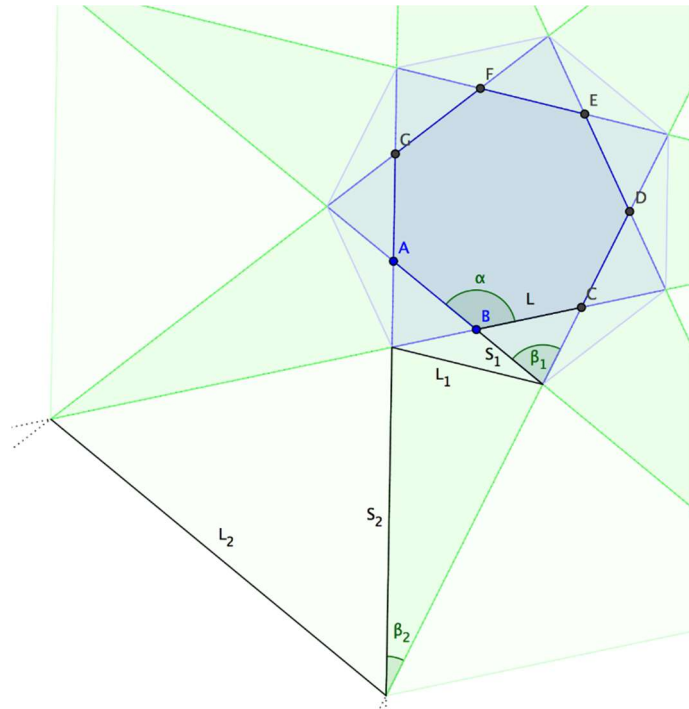


Fig. 6

Prima di generalizzare ai poligoni espansi di ordine  $k$ , vediamo la costruzione più diretta.

Si può dapprima introdurre la definizione di distanza tra due lati di un poligono regolare di  $n$  lati e dimostrare che questa è al massimo  $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ . Poi si può costruire il poligono stellato esterno  $S_k$  ottenuto come intersezione dei prolungamenti dei lati del poligono aventi distanza  $k$ , per i diversi valori strettamente positivi di  $k$  e infine definire il poligono espanso di ordine  $k$ .

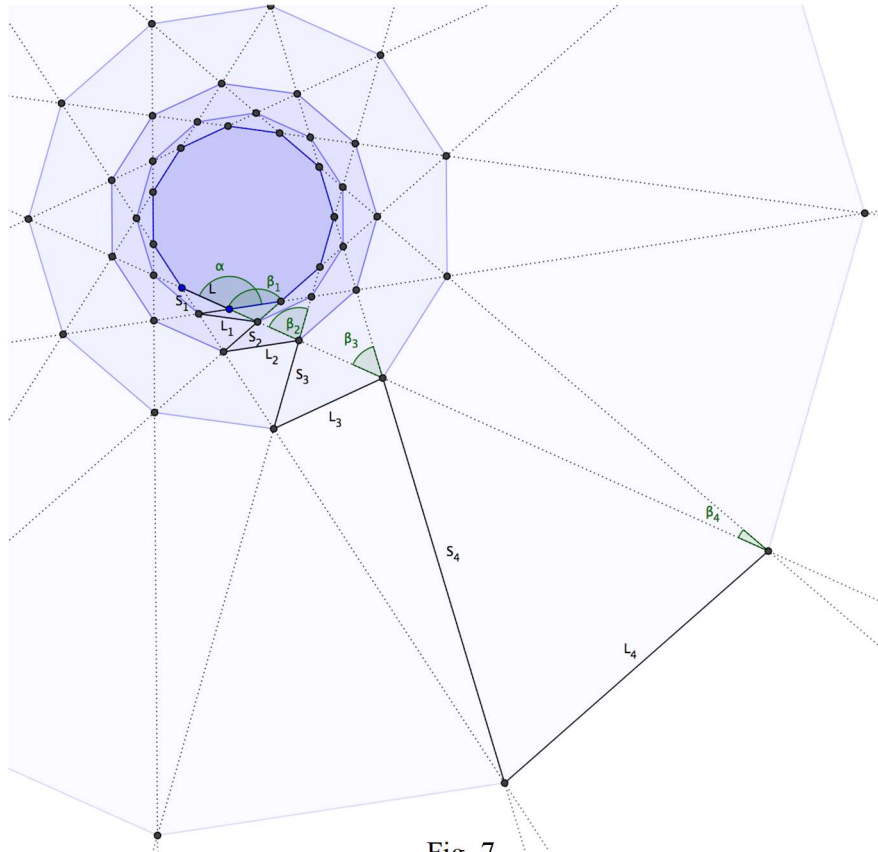


Fig. 7

Notiamo nella figura 7 che esistono sempre due altri diversi triangoli isosceli: uno con un lato coincidente con il lato del poligono espanso di ordine  $k-1$  (interno al poligono stellato di ordine  $k$ ) e uno con un lato coincidente con il lato del poligono espanso di ordine  $k$  (esterno al poligono stellato di ordine  $k$ ). Per il primo, grazie al teorema del coseno, possiamo scrivere  $L_{k-1}^2 = S_k^2 + S_k^2 - 2S_k S_k \cos \beta_k$ , che possiamo semplificare in  $L_{k-1}^2 = 2S_k^2(1 - \cos \beta_k)$ . Per il secondo triangolo, sempre usando il teorema del coseno, possiamo scrivere  $L_k^2 = S_k^2 + S_k^2 - 2S_k S_k \cos \beta_{k-1}$ , che possiamo semplificare in  $L_k^2 = 2S_k^2(1 - \cos \beta_{k-1})$ .

Di conseguenza, per induzione, otteniamo il rapporto di omotetia  $K_k = \frac{L_k}{L} = \frac{L_k}{L_{k-1}} \frac{L_{k-1}}{L} = \sqrt{\frac{1-\cos_{k-1}}{1-\cos_k}} \sqrt{\frac{1-\cos_{k-2}}{1-\cos_{k-1}}} = \sqrt{\frac{1-\cos_{k-1}}{1-\cos_k}}$ .

Da notare che, grazie al secondo dei due triangoli e sempre per induzione, riusciamo ad esprimere l'ampiezza di  $\beta_k$  seguendo il procedimento adottato in (2). In effetti in quel passaggio abbiamo dimostrato che  $\beta_2 = 3\alpha - 2\pi$  e ora per induzione verificiamo che  $\beta_k = \alpha(k+1)\alpha - k\pi$ .

In effetti  $\beta_k = \alpha - 2\frac{\pi - \beta_{k-1}}{2} = \alpha + \beta_{k-1} - \pi = \alpha + (k\alpha - (k-1)\pi) - \pi = (k+1)\alpha - k\pi$ .

Di conseguenza, il k-esimo rapporto di omotetia è  $K_k = \sqrt{\frac{1-\cos}{1-\cos((k+1)\alpha - k\pi)}}$ .

Partendo da un poligono espanso di ordine  $k$  possiamo invece tornare al poligono originale passando attraverso il poligono stellato inscritto nel poligono espanso. In questo caso per tracciare i poligoni stellati inscritti dobbiamo considerare la distanza tra i vertici del poligono, definita come la distanza tra i vertici di un grafo ciclico in cui i vertici sono i vertici dei poligoni e in cui gli spigoli sono i lati del poligono. Anche in questo caso riusciamo a dimostrare che un poligono regolare possiede  $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$  poligoni stellati inscritti, e ognuno di questi, al suo interno, contiene un poligono regolare omotetico, che chiamiamo **poligono ristretto di ordine  $k$** , che è ha per vertici le intersezioni delle diagonali del poligono principale che, per i tratti iniziale e finale, definiscono i lati del poligono stellato.



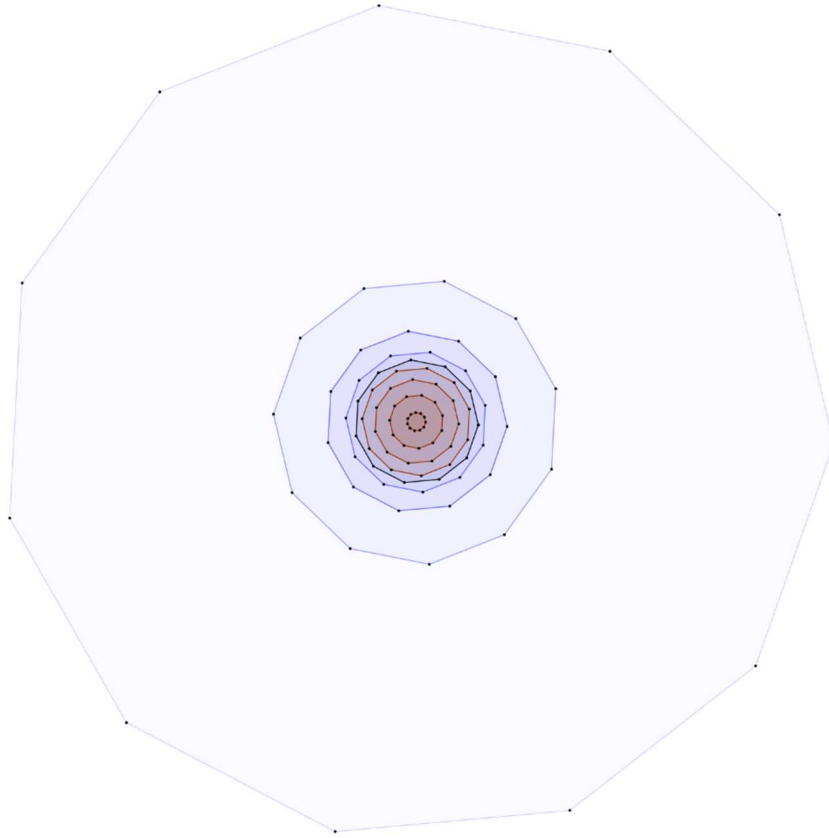


Fig. 8

Nella figura 8 è rappresentato, in nero, un endecagono regolare, in blu i suoi 4 espansi e in rosso i suoi 4 ristretti.

Evidentemente, il poligono espanso di ordine  $k$  del poligono ristretto di ordine  $k$  è il poligono originale, così come lo è il poligono ristretto di ordine  $k$  del poligono espanso di ordine  $k$ , e di conseguenza il rapporto di omotetia del

poligono ristretto di ordine  $k$  è  $\bar{K}_k = \frac{1}{K_k} = \sqrt{\frac{1 - \cos((k+1)\alpha - k\pi)}{1 - \cos \alpha}}$ .



## **Narrazione e gioco in ambienti online per favorire l'emergere di un'identità matematica negli studenti**

### **Narrative and game in online environments to foster the rise of a mathematical identity in students**

**Giovannina Albano<sup>1</sup>, Umberto Dello Iacono<sup>2</sup>,  
Giuseppe Fiorentino<sup>3</sup>**

#### **Abstract**

In this paper we investigate how to promote and nurture the main attitudes of a mathematician when solving a mathematical problem. To this aim, we identified and translated some of them as different characters within a narrative framework. In order to promote effective problem-solving strategies we also identified the main phases, ranging from the initial inquiry and discovery to the final proof and disclosure, translating them into different phases of a Digital Interactive Storytelling in Mathematics (DIST-M) where students play and experience a different role/attitude in each episode/phase. The whole DIST-M relies on collaborative scripts and the story evolves according to the interactions between the characters and the stimuli coming from the expert.

---

<sup>1</sup> galbano@unisa.it, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione ed Elettrica e Matematica Applicata, Università degli Studi di Salerno.

<sup>2</sup> umberto.delloiacono@unicampania.it, Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania "L. Vanvitelli".

<sup>3</sup> giuseppe.fiorentino@unipi.it, Accademia Navale di Livorno.  
Comunicato da A. Russo

## Introduzione

Uno degli obiettivi di questa ricerca riguarda come promuovere negli studenti l'atteggiamento del matematico di fronte a un problema matematico. A questo scopo, abbiamo individuato alcune delle sue tipiche attività mentali, inquadrandole come dei personaggi distinti all'interno di un quadro narrativo. Abbiamo anche individuato una successione di fasi distinte che ricalcano il tipico processo che va dall'esplorazione iniziale alla produzione di congetture, fino alla dimostrazione e alla successiva riflessione finale. Queste fasi sono state incorporate all'interno della narrazione in altrettante attività di apprendimento [1].

Più in dettaglio, abbiamo considerato le seguenti fasi fondamentali per la comprensione e la formalizzazione di un problema matematico e della sua soluzione:

- *esplorazione*: il matematico inizia ad esplorare il problema, indaga sulle ipotesi e fa delle prove fino a quando non arriva a un'ipotesi;
- *congettura*: il matematico inizia ad affinare l'ipotesi per ottenere una congettura chiara e completa (anche se spesso verbale);
- *formalizzazione*: nella maggior parte dei casi una congettura verbale non è sufficiente a attivare gli strumenti matematici necessari per dimostrarla o confutarla; a questo scopo si ottiene produce un enunciato formalizzato, utilizzando il linguaggio matematico e le rappresentazioni simboliche;
- *dimostrazione*: il linguaggio formale permette di applicare tutte le conoscenze matematiche per dimostrare (o confutare) la congettura;
- *riflessione*: una volta provata la congettura, i matematici spesso ripercorrono l'intera sequenza e perfezionano la dimostrazione al fine di poterla condividere con la comunità matematica.

Lungo queste fasi, abbiamo anche individuato gli atteggiamenti chiave del matematico coinvolto in un processo di problem solving:

- *pensiero critico*: è la capacità di ripensare a ciò che viene detto per individuarne i punti deboli e le criticità;
- *memoria*: è la capacità di verbalizzare e affinare le formulazioni parziali e finali dei risultati raggiunti;

- *coordinamento*: è la capacità di pianificare le azioni e di tenerne traccia;
- *intuizione*: è la capacità di generare nuove idee per andare avanti verso il raggiungimento dell'obiettivo;
- *conoscenza*: è la capacità di cercare informazioni o di chiedere consigli quando le risorse proprie non sono sufficienti per superare le difficoltà.

Questi atteggiamenti sono incarnati nella nostra narrazione come personaggi/ruoli diversi che tutti gli studenti interpretano a turno, fase dopo fase.

Tenendo conto di tali ruoli e fasi, abbiamo progettato un Digital Interactive Storytelling in Matematica (DIST-M) basato su un approccio vygotkiano nel quale l'apprendimento è prima socializzato e poi interiorizzato [2]. Il design didattico del DIST-M si basa su script collaborativi all'interno di un quadro di narrazione digitale. La struttura narrativa permette un apprendimento contestualizzato attraverso l'integrazione del pensiero logico-scientifico con quello narrativo [3].

Per aumentare l'impegno cognitivo, il nostro approccio narrativo non prevede la costruzione della storia da parte degli studenti (che è difficile da guidare verso i risultati di apprendimento desiderati). Al contrario, partiamo da un problema matematico didatticamente interessante e ben integrato in una storia consolidata, dove gli studenti (divisi in gruppi) e l'esperto (insegnante o ricercatore) giocano come personaggi lungo diversi possibili percorsi di apprendimento. La narrazione si evolve secondo le interazioni tra i personaggi e gli stimoli provenienti dall'esperto.

## Quadro teorico

La progettazione delle attività di apprendimento è frutto di un networking di teorie [4] dove approcci diversi sono combinati e coordinati per indagare lo stesso fenomeno da più punti di vista. Di seguito riassumiamo brevemente i principali riferimenti teorici presi in considerazione per il disegno didattico.

La Teoria delle Attività [1], inizialmente sviluppata nel campo della psicologia e delle scienze sociali, studia gli individui a partire dall'analisi delle loro attività. Il concetto chiave è l'attività, caratterizzata da interazioni (un'azione nel mondo) e intenzionalità (l'azione risponde ad uno scopo). L'attività è quindi un costrutto di alto livello, di solito collaborativo, al vertice di una

gerarchia che prevede altre due componenti: azioni e operazioni, caratterizzate rispettivamente dalla consapevolezza (avere un obiettivo) e dall'automatismo (compito).

L'intrinseca natura collaborativa di queste attività ci ha portato ad esplorare alcuni aspetti dell'apprendimento collaborativo, in particolare l'apprendimento basato sul computer. È noto, infatti, che l'efficacia dell'apprendimento collaborativo non è da dare per scontato, soprattutto in ambienti supportati dal computer [5], dove la necessità di pre-strutturare e regolare i processi sociali e cognitivi è ancora più evidente. Per questo motivo i ricercatori del settore hanno utilizzato il concetto di script, così come introdotto nella psicologia cognitiva. Questo si riferisce ad uno schema di memoria interna corrispondente ad una sequenza di azioni che definiscono una situazione ben nota [6]. Qui ogni attore ha un ruolo e azioni specifiche da compiere e lo script viene attivato ogni volta che si verifica una situazione analoga. Nell'ambito dell'educazione, gli script sono imposti esternamente per supportare gli studenti in contesti di apprendimento collaborativo attraverso la regolamentazione dei ruoli e delle azioni che gli studenti devono intraprendere ed eseguire per ottenere un apprendimento di successo [7]. Nel corso del tempo, attraverso la pratica sociale, l'aspettativa è che lo studente interiorizzi tali script [2] passando, quindi, spontaneamente dalla eteroregolazione all'auto-regolazione.

Nell'educazione matematica è stata anche riconosciuta l'importanza di assegnare dei ruoli ai membri dei gruppi cooperativi per ottenere un apprendimento efficace. Pesci [8] descrive cinque ruoli:

- *orientato al compito*: che si occupa di far risolvere al meglio il compito matematico affidato al gruppo;
- *orientato al gruppo*: è il responsabile della partecipazione attiva dei vari membri del gruppo;
- *memoria*: si occupa di verbalizzare i risultati ottenuti dal gruppo;
- *relatore*: ha il compito di riportare i risultati al di fuori dell'ambito ristretto del gruppo;
- *osservatore*: prende nota di tutti i processi e dell'impegno di ciascun membro del gruppo.

Un'osservazione chiave sottolineata da Pesci riguarda l'importanza della rotazione di tali ruoli tra gli studenti, in modo che ognuno abbia la possibilità

di sperimentarli tutti e, quindi, di sviluppare la corrispondente competenza. Un ulteriore ruolo è infine previsto per l'insegnante che agisce come supervisore astenendosi, di norma, dal dare indicazioni matematiche.

## **Disegno del DIST-M**

Il background teorico ha ispirato il nostro progetto e ha suggerito come disegnare l'esperienza DIST-M al fine di coinvolgere gli studenti nello sviluppo delle attitudini matematiche descritte nell'introduzione. Il quadro generale del DIST-M consiste in una narrazione digitale [9,10] dove la storia si sviluppa in vari episodi dove studenti e docente sono coinvolti impersonificando personaggi corrispondenti ai ruoli introdotti nella Sezione 1. In accordo con Pesci, lo studente interpreta ruoli diversi in ciascun episodio e questo meccanismo gli consente di vivere la storia da diverse prospettive e di sviluppare diverse abilità. Il docente o il ricercatore svolgono il ruolo di esperto che, a differenza di Pesci, nel nostro disegno può anche intervenire matematicamente.

Per classi con più di 20 alunni è possibile adottare due soluzioni opposte. La prima prevede che più studenti svolgano ciascun ruolo/personaggio; tuttavia, la "responsabilità condivisa" che ne deriva può facilmente portare a situazioni in cui solo pochi membri di ogni gruppo sono realmente impegnati. L'approccio opposto permette a piccoli gruppi di agire lungo la storia come "protagonisti (quasi) isolati". Tuttavia, è difficile monitorare tutte le squadre e le loro conversazioni online simultanee in tempo reale. Abbiamo quindi adottato un approccio diverso che amplia i ruoli e la loro rotazione introducendo il ruolo degli Osservatori [8], impegnati nella storia, sia a livello cognitivo ("Cosa avrei fatto nei suoi panni?") che metacognitivo ("Il personaggio osservato sta giocando bene il suo ruolo? È efficace?"). Quando il DIST-M viene sperimentato in classe, si creano vari gruppi di quattro studenti (uno per ogni ruolo) che portano a cinque o sei gruppi. Per ogni episodio, solo un gruppo è direttamente coinvolto come "Attore" della storia, mentre gli altri giocano come Osservatori (ogni membro del gruppo osserva un personaggio con un ruolo diverso). Nell'episodio successivo, il gruppo "Attore" viene ruotato insieme a tutti i ruoli. In tal modo, ogni studente sarà "Attore" una volta sola in un ruolo e sperimenterà tutti gli altri come Osservatore.

## Macro design

Secondo la Teoria delle Attività [1], ogni fase corrisponde ad un'attività caratterizzata da interazioni (all'interno dell'ambiente digitale, lungo la storia, utilizzando gli strumenti disponibili, con gli altri personaggi) e intenzionalità (ogni attività ha uno scopo). Il macro script del DIST-M è costituito da 5 attività corrispondenti alle fasi di lavoro di un matematico, introdotte nella Sezione 1: *Esplorazione*, *Congettura*, *Formalizzazione*, *Dimostrazione*, *Riflessione*. Ogni fase corrisponde ad un episodio della storia. Nella fase di *Esplorazione* (Episodio 1) gli studenti esplorano una data situazione matematica. Lo scopo di questa fase è quello di produrre una breve descrizione di ciò che è stato trovato. Successivamente, nella fase di *Congettura* (Episodio 2), la descrizione viene ulteriormente affinata e vagliata. Gli studenti, a partire da quanto trovato, sono tenuti a formulare una congettura matematica concordata. Quest'ultima è solitamente espressa in forma verbale e, in quanto tale, può non essere adatta alla manipolazione formale necessaria per ottenere una dimostrazione. Così, nell'Episodio 3 (*Formalizzazione*) agli studenti viene chiesto di formalizzare la congettura nel linguaggio matematico. Questa formalizzazione viene sfruttata nel successivo Episodio 4 (*Dimostrazione*) dove gli studenti organizzano gli argomenti in una catena deduttiva per arrivare a una dimostrazione (matematica). Infine, nell'Episodio 5 (*Riflessione*) gli studenti sono tenuti a scrivere una breve relazione sul processo svolto e sui risultati ottenuti, soffermandosi sullo scopo (individuale e collettivo) di ciascun episodio.

Per raggiungere l'obiettivo di ogni attività, ogni studente ha delle azioni da svolgere, talvolta individualmente, talvolta in collaborazione. Le azioni dipendono dal problema matematico e sono progettate con l'obiettivo di raggiungere lo scopo dell'episodio.

## Micro design

Come già detto, i ruoli all'interno del DIST-M nascono sia dalla necessità di regolare il lavoro di gruppo in ambienti informatici, sia come rappresentazioni degli atteggiamenti di un matematico di fronte a un problema. Tenendo conto delle funzioni ideate (Sezione 1) e delle informazioni provenienti dal background teorico (Sezione 2), abbiamo previsto i seguenti personaggi interpretati dagli studenti:

- *Boss* (coordinamento): è *orientato* sia *al compito* sia *al gruppo* [8], si occupa del clima di partecipazione, focalizza l'attenzione del gruppo



sulle azioni da svolgere in funzione dello scopo dell'episodio e del compito matematico; la responsabilità del successo matematico, invece, è a carico dell'intero gruppo;

- *Blogger* (memoria): è sia *memoria* che *relatore* [8], riassume e comunica al *Guru* i risultati ottenuti da tutto il gruppo;
- *Peste* (pensiero critico): agisce da “avvocato del diavolo” [11], ponendo domande per verificare la solidità delle premesse e dei risultati ottenuti dal gruppo;
- *Promoter* (intuito): è il creativo del gruppo che fornisce nuovi spunti per avanzare verso l'obiettivo dell'episodio.

Per evitare situazioni di stallo, abbiamo previsto anche un personaggio interpretato dall'insegnante o dal ricercatore

- *Guru* (conoscenza): è colui a cui chiedere informazioni e consigli in caso di mancanza di risorse proprie, è l'esperto in una prospettiva vygotskiana.

e un canale di comunicazione privato tra il Guru e il Promoter. Così, se il gruppo è in difficoltà ed è incapace di chiedere consigli oppure se qualcuno non sta svolgendo correttamente il proprio ruolo senza che qualcun altro glielo faccia notare, il Guru può dare consigli al Promoter per superare le difficoltà. In ogni episodio ogni membro del gruppo assume la prospettiva di uno dei ruoli di cui sopra e il suo ruolo cambia nell'episodio successivo. Come già detto, in ogni episodio è attivo un solo gruppo che interpreta gli Attori della storia, mentre i membri di tutti gli altri gruppi sono Osservatori (di un personaggio diverso). La rotazione dei ruoli coinvolge anche gli episodi in cui i membri del gruppo sono Osservatori. In questo modo, tutti gli studenti interpreteranno tutti i ruoli possibili.

Durante le fasi di osservazione, allo studente viene chiesto di assumere la prospettiva del ruolo assegnato, di osservare il personaggio attore corrispondente e di commentare in un diario personale (il Diario di bordo) come il giocatore si comporta rispetto a quanto sarebbe necessario sul piano matematico per il raggiungimento dell'obiettivo dell'episodio. In queste fasi di osservazione lo studente è sollecitato a passare dal livello cognitivo a quello metacognitivo.

Questo continuo cambiamento di prospettiva, da attore a osservatore, da un ruolo ad un altro e dal livello cognitivo a quello metacognitivo e viceversa ha

lo scopo di favorire l'interiorizzazione di tutti i ruoli e di tutte le fasi introdotte nella Sezione 1.

### **(Auto)valutazione**

Poiché ogni esperienza del DIST-M è da considerarsi all'interno del curriculum, la sua valutazione dovrebbe essere parte del contratto didattico. Abbiamo quindi previsto due diversi tipi di valutazione:

- una *valutazione collettiva*: si realizza nell'Episodio 5 (sezione 3.1) chiedendo ad ogni gruppo di ripercorrere tutti gli episodi precedenti e di compilare un resoconto che descriva ciò che è accaduto in ogni episodio, sia a livello di storia che a livello matematico; in particolare, ci si aspetta che gli studenti riconoscano e descrivano lo scopo di ogni episodio;
- una *valutazione individuale*: nella quale tutti gli studenti sono tenuti a rivedere l'intera attività, commentando come hanno svolto i ruoli a loro assegnati, sia come attore che come osservatore, e a dire cosa avrebbero cambiato col senno di poi.

La valutazione collettiva è essenzialmente cognitiva e attiene principalmente al contenuto matematico. Tuttavia, essa rende gli studenti consapevoli degli atteggiamenti di un matematico e dei passi che compie nei vari episodi. Alla fine, l'intero script alla base della storia diventerà chiaro agli studenti, i quali potranno rendersi conto che lo schema potrà essere seguito ogni volta che si troveranno coinvolti in situazioni simili.

La valutazione individuale, invece, è essenzialmente metacognitiva e affettiva. Riguarda le funzioni coinvolte nel lavoro di un matematico e come si sono manifestate nei ruoli corrispondenti.

### **Conclusioni**

In questo articolo abbiamo presentato un progetto di ricerca volto a indagare su come promuovere negli studenti alcune delle attitudini di un matematico. A questo scopo, abbiamo utilizzato un approccio narrativo immersivo in cui gli studenti possono sperimentare l'intero processo e le competenze coinvolte in una scoperta matematica. Gli atteggiamenti che caratterizzano tale processo diventano personaggi della storia con ruoli specifici e la storia stessa è stata attentamente progettata per affrontare tutte le fasi di problem solving. Sono

stati presi in considerazione sia gli aspetti cognitivi che quelli metacognitivi, coinvolgendo gli studenti con fasi di gioco e di osservazione attiva da un episodio all'altro della storia. Pensiamo che, a lungo termine, questo li aiuterà a interiorizzare tali ruoli. Vale la pena di notare che l'attività di apprendimento progettata fa parte del curriculum, quindi comprende anche fasi di valutazione individuale e collettiva. La prima permette di rendere evidente agli studenti il processo e le attività mentali che costituiscono l'atteggiamento del matematico e di istituzionalizzare le conoscenze matematiche. La seconda si muove lungo il livello affettivo dell'apprendimento, concentrandosi sull'impegno dello studente come attore o osservatore.

Le sperimentazioni condotte mostrano l'impegno degli studenti e alcuni segnali verso l'appropriazione dei ruoli individuati.

## **Ringraziamenti**

Questa ricerca è stata finanziata dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca nell'ambito del progetto nazionale "Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a competence-based social approach", PRIN 2015, Prot. 20155NPRA5.

## **Riferimenti Bibliografici**

[1] LEONTIEV A.N., *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1978.

[2] VYGOTSKY L.S., *Mind in society: The development of higher psychological processes*, Harvard university press, 1980.

[3] BRUNER J.S., *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge, MA – London: Harvard University Press, 1986.

[4] BIKNER-AHSBAHS A., PREDIGER S., *Introduction to Networking: Networking Strategies and Their Background*, In *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*, Springer, 117-125, 2014.

[5] WEINBERGER A., KOLLAR I., DIMITRIADIS Y., MAKITALO-SIEGI K., FISCHER F., *Computer-supported collaboration scripts. Technology enhanced learning*, Springer Netherlands, 155–173, 2009.

[6] SCHANK R. C, ABELSON R. P., *Scripts, plans, goals and understandings*, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1977.

[7] KING A., *Scripting collaborative learning processes: A cognitive perspective*, In F. Fischer, I. Kollar, H. Mandl, & J. Haake (eds.), *Scripting computer-supported collaborative learning: Cognitive, computational and educational perspectives*, New York: Springer, 13-37, 2007.

[8] PESCI A., *Cooperative learning and peer tutoring to promote students' mathematics education*, In L. Paditz, A. Rogerson (eds.), *Proc. of the 10th International Conference "Models in Developing Mathematics Education". The Mathematics Education into the 21st Century Project (Dresda, 11-17 Settembre 2009)*. Dresda: University of Applied Sciences, 486-490, 2009.

[9] ALBANO G., DELLO IACONO U., *Scripting collaboration for competence based mathematics learning*. In Silverman J. Hoyos V. (eds). *Distance Learning, E-Learning and Blended Learning of Mathematics*, Cham:Springer, 115-131, 2018.

[10] ALBANO G., DELLO IACONO U., FIORENTINO G., POLO M., *Designing mathematics learning activities in e-environments*. In Weigand, H. G., Clark-Wilson, A., Donevska-Todorova, A., Faggiano, E., Trgalova, J. (Eds.), *Proc. of 5th ERME Topic Conference "Mathematics Education in the Digital Age" (MEDA)*, Copenhagen, Denmark, 2-10, 2018.

[11] SOLDANO C., ARZARELLO F., *Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking*. *Mathematics Education Research Journal*, **28** (1), 9-30, 2016.

## **Modello matematico per lo studio della migrazione del Radon in edifici con diverse tipologie**

### **A mathematical model for the study of Radon transport in different types of buildings**

**Carlo Sabbarese<sup>1</sup>, Fabrizio Ambrosino<sup>2</sup>, Antonio D'Onofrio<sup>3</sup>**

#### **Abstract**

The concentration of activity of Radon at different floors of a building was assessed by solving the transport equations with the finite difference method. Five different construction typologies, different in the position of the lower floor with respect to the ground, have been studied with the same characteristics of soil and building materials. The appropriate boundary conditions have been introduced to simulate the transfer from one material to another. The results provide a quantification of the concentration of activity of Radon in the air of the different floors and highlight that, in addition to the nature of the soil and building materials, the position of the lower floor of the building has a significant role in the entry of radon on the various floors.

#### **Introduzione**

Il maggiore contributo della radioattività ambientale è fornito dal Radon ( $^{222}\text{Rn}$ ), gas nobile radioattivo prodotto dal Radio ( $^{226}\text{Ra}$ ) che è presente in

---

<sup>1</sup> [carlo.sabbarese@unicampania.it](mailto:carlo.sabbarese@unicampania.it), Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania "L. Vanvitelli".

<sup>2</sup> [fabrizio.ambrosino@unicampania.it](mailto:fabrizio.ambrosino@unicampania.it), Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania "L. Vanvitelli".

<sup>3</sup> [antonio.donofrio@unicampania.it](mailto:antonio.donofrio@unicampania.it), Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania "L. Vanvitelli".

concentrazioni variabili in tutta la crosta terrestre e nei materiali da costruzione<sup>1</sup>. Il Radon ha un tempo di dimezzamento sufficientemente lungo (3,82 giorni) da permettergli anche l’allontanamento dal suolo e dalle rocce in cui si genera. Attraverso i processi di diffusione e di trasporto esso può lasciare il materiale solido e mescolarsi all’aria interstiziale e giungere in atmosfera o in ambienti chiusi<sup>2-4</sup>. Esso è continuamente generato nella crosta terrestre grazie alla inesauribile sorgente costituita dall’Uranio (<sup>238</sup>U) che ha un tempo di dimezzamento di 4,5 miliardi di anni.

Una volta che l’atomo di Radon viene prodotto in un materiale e si trova in pori e/o interstizi può migrare per diffusione e per convezione<sup>5,6</sup>.

La concentrazione di Radon negli ambienti chiusi dipende da svariati fattori<sup>7</sup>. I più significativi riguardano il tipo di suolo sottostante l’edificio, i materiali da costruzione, le caratteristiche costruttive, il tipo di sistema di ventilazione presente nell’edificio<sup>8</sup>. Particolarmente importante è la posizione del piano più basso dell’edificio (rialzato su pilastri, poggiato a terra, seminterrato, interrato). Le diverse tipologie costruttive e condizioni d’uso generano livelli di Radon indoor diversi a parità di suolo e materiali da costruzione<sup>9-11</sup>.

La realizzazione di un modello di migrazione del Radon all’interno delle abitazioni nasce dall’esigenza di ottenere delle stime senza eseguire misure per individuare possibili aree ad elevate concentrazioni. Il modello qui trattato è sviluppato con la risoluzione delle equazioni differenziali con la tecnica delle differenze finite, basate sulla discretizzazione sia dello spazio che del tempo<sup>12,13</sup>. Le incognite del problema vengono definite su una griglia di punti e sono espresse mediante serie di equazioni alle differenze.

## Equazioni e condizioni al contorno del modello

Il modello matematico elaborato descrive l’andamento della concentrazione di Radon indoor in funzione del tempo e dell’altezza (piano) a seconda della posizione dell’edificio rispetto al suolo. Nella Figura 1 sono rappresentate le cinque tipologie di edifici analizzate che sono rappresentative della maggior parte delle situazioni reali (denominate tipologie 0, A, B, C, D). Ai fini della realizzazione del modello, gli edifici (Tipologia 0, A, B, C, D) sono stati differenziati solo per la diversa quota del piano più basso, ma non per le caratteristiche costruttive, i materiali da costruzione e il tipo di suolo sottostante.

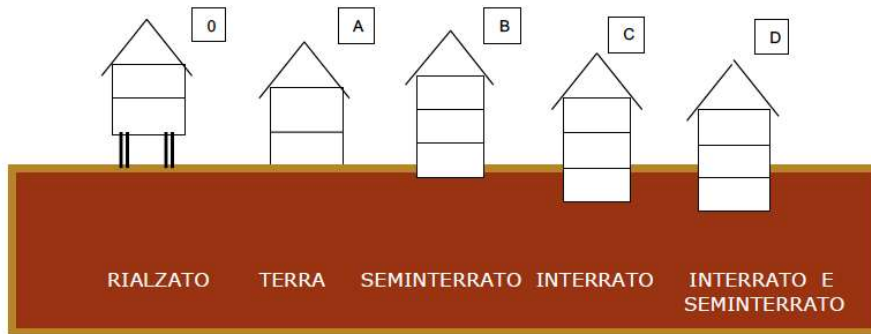


Fig. 1 Le cinque tipologie costruttive analizzate col modello.

Il modello è basato su una geometria unidimensionale dove non vengono specificate la profondità e l'altezza delle singole fratture presenti nelle fondamenta e nei muri, questo perché si definiscono delle nuove grandezze riferite ad un materiale equivalente. In sostanza, detti  $D_z$  ed  $\varepsilon_z$ , rispettivamente il coefficiente di diffusione e la porosità del materiale di costruzione delle fondamenta, ed analogamente  $D_a$  e  $\varepsilon_a$  quelli riferiti all'aria, a partire da uno zoccolo di cemento caratterizzato da un certo numero  $N_{Frat}$  di fratture al metro, si ottiene uno zoccolo di materiale equivalente ( $x$ ), in cui il coefficiente di diffusione e porosità sono così definiti:

$$D_{eq} = D_a \cdot x + D_z \cdot (1 - x)$$

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_a \cdot x + \varepsilon_z \cdot (1 - x)$$

Se  $\bar{S}_{Frat}$  è lo spessore medio delle fratture, lo spessore equivalente  $x$  è definito come:

$$x = \frac{S_{Tot\_Frattura}}{S_{Tot\_Solaio}} = \frac{\eta_{Frat} \cdot \bar{S}_{Frat}}{S_{Tot\_Solaio}} = N_{Frat} \cdot \bar{S}_{Frat}$$

e risulta variabile tra zero ed uno.

Analogo discorso viene fatto per i solai che separano un piano dall'altro e per i materiali da costruzione. La concentrazione iniziale di Radon viene simulata da una sorgente costante, ad una profondità variabile tra i tre e i sei metri, dove la concentrazione di Radon non è praticamente influenzata da fattori esterni, quali variazioni climatiche, di pressione, umidità, e può pertanto, ritenersi costante. Dal suolo, per convezione e diffusione, raggiunge lo zoccolo per poi passare, attraverso fessure e crepe, all'interno dell'edificio<sup>14</sup>. Qui il

trasporto di Radon avviene solo per diffusione, procedendo verso l’alto attraverso le solette di separazione tra un piano e l’altro.

La concentrazione ( $C$ ) descritta dal processo di migrazione del Radon in un suolo, con produzione  $S$ , per diffusione ed advezione è descritta dalla seguente equazione<sup>2,3</sup>:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{D}{\varepsilon} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (v_D C)}{\partial z} - \lambda C + \frac{S}{\varepsilon} \quad (1)$$

dove  $D$  è il coefficiente di diffusione,  $v_D$  è la velocità di Darcy,  $\varepsilon$  è la porosità.

All’interno dell’edificio, il gradiente di pressione è praticamente nullo si ha quindi un processo di sola diffusione descritto dall’equazione:

$$\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} = (D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}) - \varepsilon \lambda C + S \quad (2)$$

$\varepsilon$  è la porosità totale del suolo in assenza d’acqua;

Per risolvere la (1) bisogna determinare la velocità di Darcy,  $v_D$ . Il valore della pressione è ottenuto risolvendo l’equazione di Laplace, in una dimensione, su ogni punto della griglia:

$$P(x) = ax + b \quad \text{da cui} \quad \frac{dP}{dx} = a$$

dove  $b = P(0)$  pressione al punto zero, cioè la pressione al punto iniziale della griglia,

$$a = \frac{P(L) - P(0)}{L} \quad \text{dove } L \text{ è pari all’ altezza del suolo al di sotto dello}$$

zoccolo.

Indicando con gli apici gli istanti di tempo e con i pedici i punti sulla griglia (Figura 2) ed utilizzando le approssimazioni in serie di Taylor<sup>15</sup>, a meno di  $o(\Delta x^2)$ , l’equazione (1) si trasforma nella seguente equazione alle differenze finite:



$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{C_{i-1}^n - 2C_i^n + C_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) - \lambda C_i^n + \frac{S_i}{\varepsilon} + \frac{ka}{\mu\varepsilon} \cdot \left( \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \Rightarrow$$

$$C_i^{n+1} = C_i^n \cdot \left( 1 - \frac{2D\eta}{\varepsilon} - \lambda\Delta t \right) + C_{i-1}^n \cdot \left( \frac{D\cdot\eta}{\varepsilon} - \frac{ka\Delta t}{2\mu\varepsilon\Delta x} \right) + C_{i+1}^n \cdot \left( \frac{D\cdot\eta}{\varepsilon} + \frac{ka\Delta t}{2\mu\varepsilon\Delta x} \right) + \frac{S_i}{\varepsilon} \cdot \Delta t. \quad (3)$$

con il parametro

$$\eta = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

che deve essere compreso tra 0 e 0.5 per rendere stabili le soluzioni. In modo analogo, l'equazione (2) si trasforma nella seguente equazione alle differenze finite:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{C_{i-1}^n - 2C_i^n + C_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) - \lambda C_i^n + \frac{S_i}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_i^{n+1} = C_i^n \cdot \left( 1 - \frac{2D\eta}{\varepsilon} - \lambda\Delta t \right) + \frac{D\eta}{\varepsilon} \cdot C_{i-1}^n + \frac{D\eta}{\varepsilon} \cdot C_{i+1}^n + \frac{S_i}{\varepsilon} \cdot \Delta t. \quad (4)$$

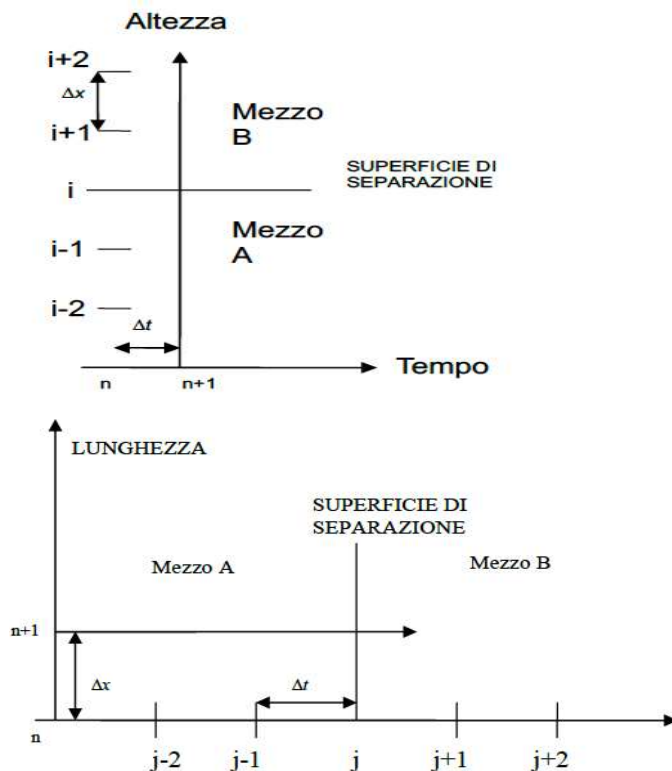


Fig. 2 Schematizzazione superficie di separazione tra due mezzi in altezza (sinistra) ed in larghezza (destra).

### Applicazione del modello alla tipologia A

Per brevità, viene riportata solo la procedura per la Tipologia A. Nella Figura 3 è riportato lo schema diffusivo utilizzato nel modello. Alle equazioni 1 e 2 vanno aggiunte, nei punti di griglia che rappresentano il contatto tra un mezzo e l'altro, le condizioni al contorno. Nei punti appartenenti alla superficie di separazione tra un mezzo e l'altro il flusso deve essere continuo, ovvero nei punti appartenenti alla superficie di separazione tra i mezzi.

**suolo-zoccolo**

$$D_s \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_s + \frac{k_s}{\varepsilon_s \mu_s} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot C_s = D_{eq,z} \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_z + \frac{k_z}{\varepsilon_{eq,z} \mu_z} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot C_z \quad (5)$$

**zoccolo-aria**

$$D_{eq,z} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_z + \frac{k_z}{\varepsilon_{eq,z} \mu_z} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot C_z = D_a \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_a \quad (6)$$

**materiale da costruzione-aria piano terra**

$$D_{bm} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{bm} = D_a \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_a \quad (7)$$

**aria piano terra-solaio**

$$D_a \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_a = D_{eq,solaio} \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{solaio} \quad (8)$$

**solaio-aria primo piano**

$$D_{eq,solaio} \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{solaio} = D_a \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_a \quad (9)$$

**materiale da costruzione-aria primo piano**

$$D_{bm} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{bm} = D_a \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_a \quad (10)$$

**aria primo piano-solaio**

$$D_a \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_a = D_{eq,solaio} \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{solaio} \quad (11)$$

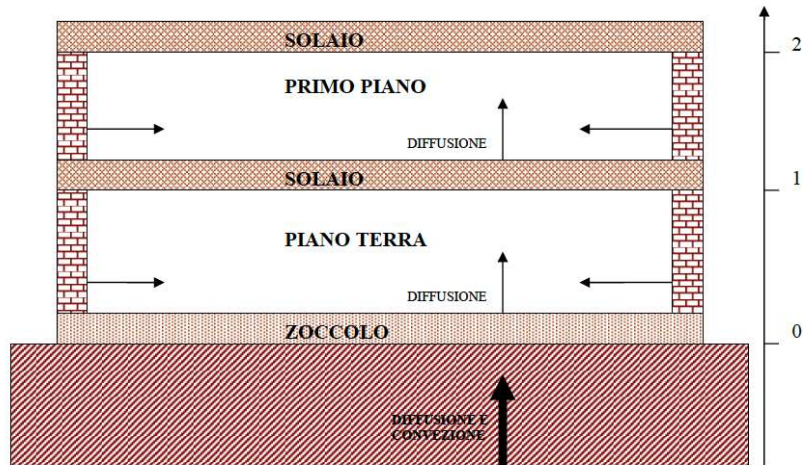


Fig. 3 Schematizzazione della geometria di un edificio di tipologia A.

#### Processo di trasporto del Radon tra suolo (A) e zoccolo (B)

Dall’espansione di Taylor al primo ordine, trascurando ordini superiori, si ha:

$$C_{i-1} = C_i - \Delta x \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{iA}$$

dove  $i_A$  indica la derivata relativa al mezzo A sulla superficie di separazione.

Utilizzando poi l’espansione di Taylor al secondo ordine, trascurando ordini superiori, si ha :

$$C_{i-1} = C_i - \Delta x \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{iA} + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_{iA}$$

Pertanto, per il suolo si ottiene:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_s = \frac{C_{i-1} - C_i}{-\Delta x} = \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_s = \frac{2}{\Delta x^2} \left[ C_{i-1} - C_i + \Delta x \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_s \right]$$

La derivata rispetto al tempo è data invece, approssimata da:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_s = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t}$$

sostituendo i risultati nella (1) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} &= \frac{2}{\varepsilon_s} \cdot \frac{D_s}{\Delta x^2} \left[ C_{i-1}^n - C_i^n + \Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_s \right] + \frac{k_s a}{\varepsilon_s \mu_s} \frac{(C_i^n - C_{i-1}^n)}{\Delta x} - \lambda C_i^n + \frac{S_{s,i}}{\varepsilon_s} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_s &= \frac{\varepsilon_s}{2D_s} \frac{(C_i^{n+1} - C_i^n)}{\eta} - C_{i-1}^n + C_i^n - \frac{\varepsilon_s \Delta x k_s a}{2D_s \varepsilon_s \mu_s} (C_i^n - C_{i-1}^n) + \frac{\varepsilon_s \Delta x^2}{2D_s} \lambda C_i^n - \frac{\Delta x^2 S_{s,i}}{2D_s} \end{aligned}$$

dove  $S_s = \gamma \lambda_{Rn} C_{Ra}$  è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nel suolo ( $\text{Bq m}^{-3}\text{s}^{-1}$ ) mentre  $C_{Ra}$  indica la concentrazione di Radio ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) presente nel suolo. Per lo zoccolo dallo sviluppo in serie di Taylor al secondo

ordine si ha :

$$C_{i+1} = C_i + \Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{iB} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_{iB} \text{ da cui}$$

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_z = \frac{2}{\Delta x^2} \left[ C_{i+1} - C_i - \Delta x \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_z \right]$$

sostituendo tale risultato nella (1) si ottiene:

$$\Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_z = -\frac{\varepsilon_{eq,z}}{2D_{eq,z}} \frac{(C_i^{n+1} - C_i^n)}{\eta} + C_{i+1}^n - C_i^n + \frac{\varepsilon_{eq,z} \Delta x k_z a}{2D_{eq,z} \varepsilon_{eq,z} \mu_z} (C_{i+1}^n - C_i^n) - \frac{\varepsilon_{eq,z} \Delta x^2}{2D_{eq,z}} \lambda C_i^n + \frac{\Delta x^2 S_{z,i}}{2D_{eq,z}}$$

dove  $S_z = \gamma \lambda_{Rn} C_{Ra}$  è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nello zoccolo ( $\text{Bq m}^{-3}\text{s}^{-1}$ ) mentre  $C_{Ra}$  indica la concentrazione di Radio ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) presente nello zoccolo.

Sostituendo i valori ottenuti,  $\Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_s$  e  $\Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_z$ , nella (5), ovvero

moltiplicando  $\Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_s$  e  $\Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_z$  rispettivamente per  $D_s$  e  $D_{eq,z}$  e poi eguagliandoli si ottiene:

$$\Rightarrow C_i^{n+1} = \left[ 1 - \lambda \Delta t - \frac{2(D_s + D_{eqz})\eta}{(\varepsilon_{eqz} + \varepsilon_s)} + \frac{a\Delta x}{2} \left( \frac{k_s}{\mu_s} - \frac{k_z}{\mu_z} \right) \right] C_i^n + \left[ \frac{2\mathcal{D}_s}{(\varepsilon_{eqz} + \varepsilon_s)} - \frac{ak_s\Delta t}{\mu_s\Delta x(\varepsilon_{eqz} + \varepsilon_s)} \right] C_{i-1}^n + \left[ \frac{2\mathcal{D}_{eqz}}{(\varepsilon_{eqz} + \varepsilon_s)} + \frac{ak_z\Delta t}{\mu\Delta x(\varepsilon_{eqz} + \varepsilon_s)} \right] C_{i+1}^n + \Delta t \left( \frac{S_{s,i} + S_{z,i}}{\varepsilon_{eqz} + \varepsilon_s} \right)$$

Il risultato ottenuto lo indichiamo col termine  $C_{suolo}$ .

Con procedimenti analoghi al precedente sono stati riprodotti tutti gli altri processi tra un materiale e l'altro nel rispetto delle condizioni (6-11). I risultati sono riportati di seguito.

Processo di trasporto del Radon tra zoccolo (A) e aria primo terra (B)

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_z = \frac{2}{\Delta x^2} \left[ C_{i-1} - C_i + \Delta x \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_z \right] \text{ sostituendo tale termine nella (1)}$$

si ha:

$$\Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_z = \frac{\varepsilon_{eqz}}{2D_{eqz}} \frac{(C_i^{n+1} - C_i^n)}{\eta} - C_{i-1}^n + C_i^n - \frac{\varepsilon_{eqz} \Delta x k_a}{2D_{eqz} \varepsilon_{eqz} \mu_z} (C_i^n - C_{i-1}^n) + \frac{\varepsilon_{eqz} \Delta x^2}{2D_{eqz}} \lambda C_i^n - \frac{\Delta x^2 S'_{z,i}}{2D_{eqz}}$$

$$\text{con } S'_z = S_z + \gamma \lambda_{Rn} C_{suolo} = \gamma \lambda_{Rn} C_{Ra} + \gamma \lambda_{Rn} C_{suolo}$$

$S'_z$  indica il tasso di generazione per unità di volume di Radon nello zoccolo ( $\text{Bq m}^{-3}\text{s}^{-1}$ ) in seguito alla migrazione del Radon dal suolo allo zoccolo.

Per l'aria il risultato ottenuto dall'espansione di Taylor al secondo ordine,

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_a = \frac{2}{\Delta x^2} \left[ C_{i+1} - C_i - \Delta x \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_a \right], \text{ sostituito nella (2) fornisce:}$$

$$\Rightarrow \Delta x \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_a = -\frac{\varepsilon_a}{2D_a} \frac{(C_i^{n+1} - C_i^n)}{\eta} + C_{i+1}^n - C_i^n - \frac{\varepsilon_a \Delta x^2}{2D_a} \lambda C_i^n$$

Sostituendo i valori ottenuti,  $\Delta x \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_z$  e  $\Delta x \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_a$ , nella (6), ovvero

moltiplicando  $\Delta x \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_z$  e  $\Delta x \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_a$  rispettivamente per  $D_{eq,z}$  e  $D_a$  e poi eguagliandoli si ottiene:

$$C_i^{n+1} = \left[ 1 - \lambda \Delta t - \frac{2(D_a + D_{eq,z})\eta}{(\varepsilon_{eq,z} + \varepsilon_a)} \right] C_i^n + \left[ \frac{2\eta D_{eq,z}}{(\varepsilon_{eq,z} + \varepsilon_a)} - \frac{ak_z \Delta t}{\mu_z \Delta x (\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,z})} \right] C_{i-1}^n + \left[ \frac{2\eta D_a}{(\varepsilon_{eq,z} + \varepsilon_a)} \right] C_{i+1}^n + \frac{\Delta t S'_{z,i}}{(\varepsilon_{eq,z} + \varepsilon_a)}$$

Il risultato ottenuto,  $C_i^{n+1}$ , lo indichiamo con  $C_{down}$ .

Processo di trasporto del Radon tra materiale da costruzione (A) e aria piano terra (B).

$$C_j^{n+1} = \frac{2D_{eqbm}\eta}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eqbm})} C_{j-1}^n + \left[ 1 - \lambda \Delta t - 2\eta \left( \frac{D_a + D_{eqbm}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{eqbm}} \right) \right] C_j^n + \frac{2\eta P_a}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eqbm})} C_{j+1}^n + \lambda \frac{S_{bmj}}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eqbm})}$$

dove  $S_{bm} = \gamma \lambda_{Rn} C_{Ra}$  è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nel materiale da costruzione ( $Bq \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$ ) mentre  $C_{Ra}$  indica la concentrazione di Radio ( $Bq \text{ m}^{-3}$ ) presente nel materiale da costruzione. In questo caso, il termine  $S_a$  è nullo in quanto nell'aria dell'edificio non vi è presenza di Radio.

Il risultato ottenuto,  $C_j^{n+1}$ , lo indichiamo con  $C_{p.tbm}$ . Dalla somma delle concentrazioni ottenute,  $C_{P.Tbm}$  e  $C_{down}$ , si ha la concentrazione indoor relativa al primo piano dell'edificio:  $C_{P.Tbm} + C_{down} = C_{P.T}$



Processo di trasporto del Radon tra aria piano terra (A) e solaio (B).

$$C_i^{n+1} = \frac{2D_a \cdot \eta}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,solaio})} C_{i-1}^n + \left[ 1 - \lambda \Delta t - 2\eta \left( \frac{D_a + D_{eq,solaio}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,solaio}} \right) \right] C_i^n + \frac{2\eta D_{eq,solaio}}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,solaio})} C_{i+1}^n + \Delta t \left( \frac{S'_{a,i} + S_{solaio,i}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,solaio}} \right)$$

dove  $S'_a = \gamma \lambda_{Rn} C_{P.T}$  è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nell'aria ( $Bq\ m^{-3}s^{-1}$ ) relativa al primo piano dell'edificio,  $S_{solaio} = \gamma \lambda_{Rn} C_{Ra}$  è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nel solaio ( $Bq\ m^{-3}s^{-1}$ ) e  $C_{Ra}$  indica la concentrazione di Radio ( $Bq\ m^{-3}$ ) presente nel solaio. Il risultato ottenuto,  $C_i^{n+1}$ , lo indichiamo con  $C_{sol(P.Tpiano)}$ .

Processo di trasporto del Radon tra solaio (A) e aria primo piano (B)

$$C_i^{n+1} = \frac{2D_{eq,solaio} \eta}{(\varepsilon_{eq,solaio} + \varepsilon_a)} C_{i-1}^n + \left[ 1 - \lambda \Delta t - 2\eta \left( \frac{D_{eq,solaio} + D_a}{\varepsilon_{eq,solaio} + \varepsilon_a} \right) \right] C_i^n + \frac{2\eta D_a}{(\varepsilon_{eq,solaio} + \varepsilon_a)} C_{i+1}^n + \Delta t \left( \frac{S'_{solaio,i}}{(\varepsilon_{eq,solaio} + \varepsilon_a)} \right)$$

$S'_{solaio,i} = S_{solaio} + \gamma \lambda_{Rn} S_{sol(P.Tpiano)} = \gamma \lambda_{Rn} C_{Ra} + \gamma \lambda_{Rn} S_{sol(P.Tpiano)}$ , è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nel solaio ( $Bq\ m^{-3}s^{-1}$ ) successivamente alla migrazione del Radon dall'aria al solaio. Il risultato ottenuto,  $C_i^{n+1}$ , lo indichiamo con  $C_{up}$ .

Processo di trasporto del Radon tra materiale da costruzione (A) e aria primo piano (B)

$$C_j^{n+1} = \frac{2D_{eqbm}\eta}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eqbm})} C_{j-1}^n + \left[ 1 - \lambda\Delta t - 2\eta \left( \frac{D_a + D_{eqbm}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{eqbm}} \right) \right] C_j^n + \frac{2\eta D_a}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eqbm})} C_{j+1}^n + \Delta t \frac{S_{bmj}}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eqbm})}$$

dove  $S_{bm} = \gamma\lambda_{Rn} C_{Ra}$  è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nel materiale da costruzione ( $\text{Bq m}^{-3}\text{s}^{-1}$ ) mentre  $C_{Ra}$  la concentrazione di Radio ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) presente nel materiale da costruzione. Il risultato ottenuto,  $C_j^{n+1}$ , lo indichiamo con  $C_{I^\circ bm}$ .

Dalla somma delle concentrazioni ottenute,  $C_{I^\circ bm}$  e  $C_{up}$ , si ha la concentrazione indoor relativa al secondo piano dell'edificio:  $C_{I^\circ bm} + C_{up} = C_{I^\circ piano}$ .

#### Processo di trasporto del Radon tra aria primo piano (A) e solaio (B)

$$C_i^{n+1} = \frac{2D_a \cdot \eta}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,solaio})} C_{i-1}^n + \left[ 1 - \lambda\Delta t - 2\eta \left( \frac{D_a + D_{eq,solaio}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,solaio}} \right) \right] C_i^n + \frac{2\eta D_{eq,solaio}}{(\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,solaio})} C_{i+1}^n + \Delta t \left( \frac{S'_{a,i} + S_{solaio,i}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{eq,solaio}} \right)$$

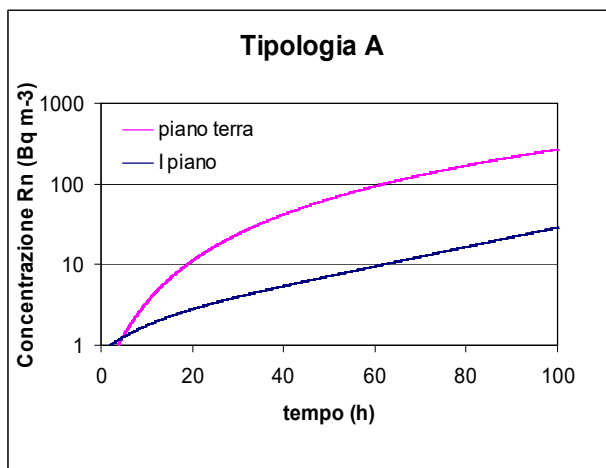
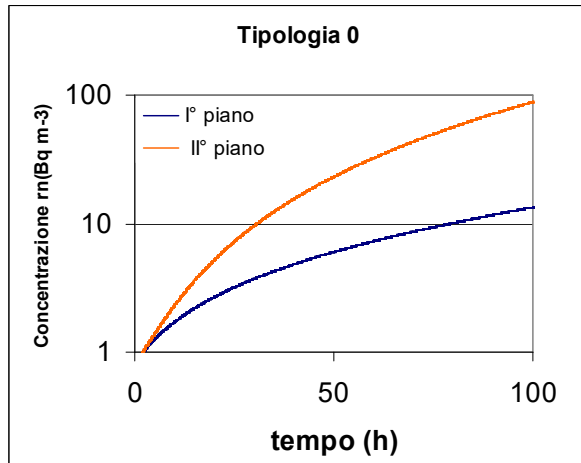
dove  $S'_a = \gamma\lambda_{Rn} C_{I^\circ piano}$  è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nell'aria ( $\text{Bq m}^{-3}\text{s}^{-1}$ ) relativa al secondo piano dell'edificio,  $S_{solaio} = \gamma\lambda_{Rn} C_{Ra}$  è il tasso di generazione per unità di volume di Radon nel solaio ( $\text{Bq m}^{-3}\text{s}^{-1}$ ) mentre  $C_{Ra}$  indica la concentrazione di Radio ( $\text{Bq m}^{-3}$ ) presente nel solaio. Il risultato ottenuto,  $C_i^{n+1}$ , lo indichiamo con  $C_{sol(I^\circ piano)}$ .

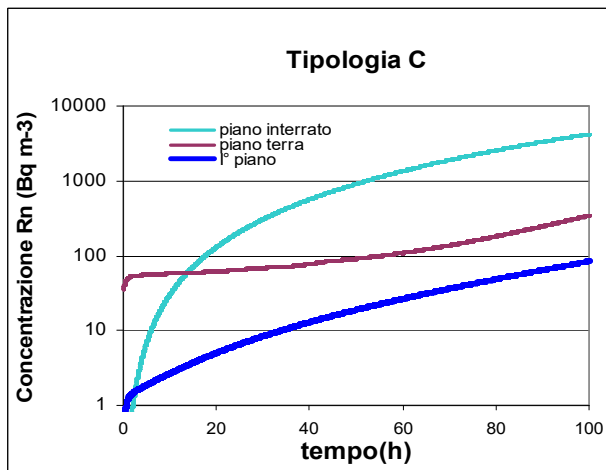
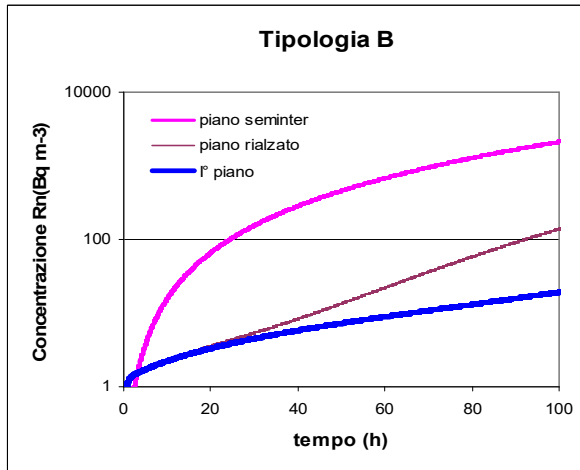
## Risultati e discussione

I calcoli sono stati eseguiti per le cinque tipologie utilizzando come passo per la distanza,  $\Delta x = 0.14$  m, e per il tempo  $\Delta t = 0.005$  h; pertanto il valore di  $\eta$  vale 0.2. I valori degli altri parametri coinvolti sono tratti dalla letteratura, considerando sia come suolo che materiale da costruzione il tufo giallo (materiale tra i più ricchi di Radon).

Nella Figura 4 è mostrato l'andamento temporale delle concentrazioni di Radon nei due piani considerati di edifici delle cinque tipologie studiate fino al tempo  $t = 100$  h.

La tipologia 0 mostra una situazione diversa dalle altre, in quanto, come è evidente, il suolo non fornisce alcun contributo al Radon indoor e la concentrazione aumenta con l'altezza. Ciò è dovuto al fatto che il primo piano ha come sorgenti solo i materiali da costruzione mentre il secondo risente anche del contributo del piano inferiore. I risultati qui ottenuti evidenziano una differenza non piccola tra i due piani; dopo 100 h ed in condizioni di chiusura completa, la concentrazione al secondo piano è circa 6 volte superiore a quella del primo piano. La tipologia D, edificio che possiede il piano più basso completamente al di sotto del livello del suolo e quello sovrastante parzialmente immerso nel suolo, risulta avere la più elevata concentrazione di Radon indoor. Nella tipologia C, edificio il cui piano più basso è completamente al di sotto del suolo, si raggiungono concentrazioni maggiori rispetto che negli ambienti delle tipologie A e B ovvero rispetto ad un edificio privo di piano interrato, oppure il cui piano più basso non è completamente immerso nel suolo ma solo parzialmente. Le minori concentrazioni di Radon dunque si sono riscontrate in edifici di tipologia 0, edifici questi poco diffusi, ma che possono essere quasi equivalenti a quelli aventi piani terra molto ventilati. La presenza di piani parzialmente e/o completamente sottoterra, hanno una sorgente aggiuntiva con effetti anche ai piani superiori se non ci sono ambienti frequentemente areati.





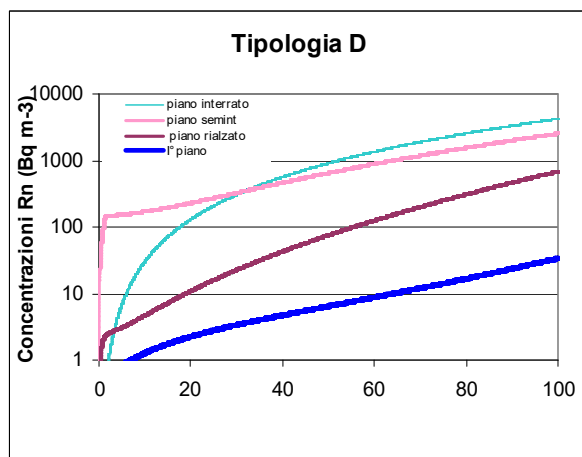


Figura 4. Andamento temporale fino a 100h delle concentrazioni di Radon ottenuto, col modello realizzato, ad ogni piano delle 5 tipologie studiate a parità di caratteristiche di suolo e materiali da costruzione.

## Conclusioni

Il modello realizzato è risultato efficace per confrontare nelle stesse condizioni di sorgenti di radon e di caratteristiche dei materiali l'andamento spaziale e temporale delle concentrazioni di Radon nelle cinque tipologie costruttive considerate. Esso è stato realizzato risolvendo col metodo delle differenze finite le tante equazioni differenziali descrittive i processi di diffusione e di advezione del Radon che dal suolo e dai materiali da costruzione passa nell'aria dei piani. Il lavoro risulta originale in quanto, pur essendoci nella letteratura scientifica, degli articoli che studiano l'andamento della concentrazione in particolari tipologie costruttive, non si trova uno studio come il presente che confronta nelle stesse condizioni tante tipologie diverse. I modelli utilizzati sono stati implementati anche al variare del tipo di suolo e di materiali da costruzione. In una seconda parte dello studio sono stati considerati diversi suoli e materiali caratteristici della regione Campania per valutare le differenze<sup>16</sup>.

### Riferimenti Bibliografici

- [1] RIGHI S., BRUZZI L., Natural radioactivity and radon exhalation in building materials used in Italian dwellings. *J. Environ. Radioact.* 88 (2), 158-170, 2006.
- [2] DE MARTINO S., MONETTI G., SABBARESE C., Darcy velocity at work in radon migration within non homogeneous soils. *Book on Recent Development in Geophysical Research*, Published by Research Signpost, ISBN: 81-86481-62-1, (1996).
- [3] DE MARTINO S., SABBARESE C., GASPARINI P., Radon migration in the Irno Valley soils (Southern Italy) inferred from radioactive disequilibrium. *Annali di Geofisica*, 38, 3-4, 439-450, (1995).
- [4] AMBROSINO F., THINOVÁ L., BRIESTENSKÝ M., GIUDICEPIETRO F., ROCA V., SABBARESE C., 2020a. Analysis of geophysical and meteorological parameters influencing  $^{222}\text{Rn}$  activity concentration in Mladeč caves (Czech Republic) and in soils of Phlegrean Fields caldera (Italy). *Appl. Radiat. Isot.* 160, 109140.
- [5] DE MARTINO S., SABBARESE C., A method for emanation coefficient measurements of Rn-222 and Rn-220 from soils. *Phys. Chem. Earth*, 22 (1-2), 19-22, 1997.
- [6] DE MARTINO S., SABBARESE C., MONETTI G., Radon emanation and exhalation rate from soils measured with an electrostatic collector. *Appl. Radiat. Isot.* 49 (4), 407-413, 1998.
- [7] SABBARESE C., DE MARTINO S., SIGNORINI C., GIALANELLA G., ROCA V., BALDASSINI P.G., COTELLESA G., SCIOCCHETTI G., A Survey of  $^{222}\text{Rn}$  Indoor in Campania Region. *Radiation Protection Dosimetry*, 48, 3, 257-263, 1993.
- [8] BECKER R., HAQUIN G., KOVLER K., Air change rates and radon accumulation in rooms with various levels of window and door closure. *J. Build. Phys.* 38 (3), 234-261, 2003.

- [9] LA VERDE G., ROCA V., SABBARESE C., AMBROSINO F., PUGLIESE M., 2018a. Correlation of the activity concentration of gas radon in environments located on ground floor and underground level. *Nuovo Cimento C.* 41 (6), 219.
- [10] BARROS N., STECK D.J., FIELD W.R., Utility of short-term basement screening Radon measurements to predict year-long residential Radon concentration on upper floors. *Radiat. Prot. Dosim.* 171 (3), 405-413, 2016.
- [11] MALANCA A., PESSINA V., DALLARA G., Influence of tuff on the radon concentration in dwellings. *J. Environ. Radioact.* 14 (4), 295-303, 1991.
- [12] AJAYI K.M., SHAHBAZI K., TUKKARAJA P., KATZENSTEIN K., A discrete model for prediction of radon flux from fractured rocks. *J. Rock Mech. Geotech. Eng.* 10, 879-892, 2018
- [13] ANDERSON J.D., *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [14] RYZHAKOVA N.K., Parameters of modeling radon transfer through soil and methods of their determination. *J. Appl. Geophys.* 80, 151-157, 2012.
- [15] NAZIR R., Taylor series expansion based repetitive controllers for power converters, subject to fractional delays. *Control Eng. Pract.* 64, 140-147, 2017.
- [16] SABBARESE C., AMBROSINO F., D’ONOFRIO A., Development of Radon transport model in different types of dwellings to assess indoor activity concentration. Submitted to *Atmospheric Environment*, 2020.



## Un modello lineare per la classifica del campionato di calcio

### A linear model for ranking the soccer championship

Letizia Pellegrini<sup>1</sup> - Alberto Peretti<sup>2</sup>

#### Abstract

In the literature (see [5]) some interesting analysis on possible ranking methods, mainly concentrated on American football teams ranking, may be found. Under certain assumptions the ranking problem may be easily formulated as a linear eigenvalue problem. In this paper we present the application of the linear model to the last edition of the Italian national soccer championship, showing that the results from the model give some significant differences with respect to the final official ordering. After recalling the concepts of eigenvalues and eigenvectors of a square matrix and the Perron–Frobenius theorem, we use the model to get the final ordering for the teams and we compare it with the official final ordering. At the end we try to interpret the results and propose some explanations of the differences, in terms of what actually the model considers and the official scores do not.

#### Introduzione

Il problema di ordinare un insieme finito di elementi, in base all'esito di una certa interazione tra questi, nasce in svariati contesti e può essere risolto in molti modi. È importante distinguere un semplice ordinamento da una graduatoria (*ranking*) in cui viene assegnata una valutazione numerica agli elementi (*rank*): in questa si ha non solo l'ordinamento, in conseguenza dell'assegnazione dei valori, ma si può anche stabilire di quanto un elemento è migliore di un altro. In questo lavoro tratteremo questa seconda situazione.

---

<sup>1</sup> letizia.pellegrini@univr.it Dipartimento di Scienze Economiche Università di Verona.

<sup>2</sup> alberto.peretti@univr.it Dipartimento di Scienze Economiche Università di Verona.

Comunicato da E. Lorenzetti

Il caso che ci interessa è quello in cui i valori rilevanti ai fini dell'ordinamento provengono da momenti in cui gli elementi vengono messi a confronto gli uni con gli altri: per essere più concreti, ad esempio quando in un dato ambito sportivo vogliamo definire una classifica di un certo insieme di squadre a seguito di una competizione come, sempre ad esempio, il campionato italiano di calcio di Serie A. Da un punto di vista dei modelli è importante la distinzione tra i casi in cui le squadre si incontrano tutte tra loro, cioè ogni squadra incontra tutte le altre, dai casi in cui questo non succede: si pensi appunto, nel primo caso, al campionato italiano di calcio e, nel secondo, alla Champions League, dove gli accoppiamenti vengono stabiliti in un dato modo, ad esempio per sorteggio nelle varie fasi. Come noto, nel campionato italiano la classifica viene ottenuta, settimana per settimana, assegnando i classici punteggi 3/1/0 rispettivamente agli esiti vittoria/pareggio/sconfitta nelle varie partite giocate.

Nel seguito vogliamo descrivere una “modalità matematica”, sostanzialmente un modello di algebra lineare, per dare una classifica generale finale alle squadre. I concetti essenziali nel modello sono gli autovalori e gli autovettori di una matrice quadrata e in particolare il teorema di Perron-Frobenius. Dopo alcuni richiami teorici presentiamo una simulazione del modello sui dati del campionato italiano di calcio di Serie A, edizione 2018/19. Da questa emergono interessanti differenze tra la classifica finale ufficiale della manifestazione e quella prodotta dal modello; concludiamo cercando di dare una possibile spiegazione di tali disallineamenti.

L'assegnazione dei punti a seguito dell'esito delle partite è certamente un modo oggettivo di costruire la classifica. Ci si può chiedere il motivo dell'utilizzo di un modello matematico. Si può dire che anche in questo c'è una ricerca di oggettività, anzi, forse di una maggiore oggettività, nel senso che il modello, come vedremo alla fine, può tenere in considerazione aspetti che la rigida regola del 3/1/0 non può certamente cogliere. Sarebbe però sbagliato pensare che il modello matematico sia completamente oggettivo, dato che certi suoi parametri risentono comunque di scelte soggettive.

È interessante segnalare che le stesse basi teoriche che qui applichiamo al campionato di calcio sono quelle con cui Sergey Brin e Larry Page hanno costruito nel 1996 presso l'Università di Stanford la versione originaria del motore di ricerca di Google (*Google's PageRank algorithm*). L'algoritmo, ora arricchito da nuove funzionalità, produce un ordinamento delle pagine web per rilevanza rispetto ai criteri di ricerca introdotti dall'utente [1,2,10].

## Il modello lineare

Presentiamo brevemente il modello. Supponiamo di avere una competizione tra  $N$  squadre (o giocatori), che ogni settimana si incontrano tra loro in una partita, in modo che alla fine della competizione ogni squadra abbia affrontato tutte le altre. Possiamo pensare di arrivare alla classifica finale mediante un procedimento iterativo che, partendo da una certa valutazione iniziale delle squadre, aggiorna di volta in volta tale valutazione a seguito dei risultati delle partite giocate. Quello che vogliamo non è solo un ordinamento delle squadre, ma una valutazione di ciascuna squadra con un “voto”, che chiameremo *rank*, tanto più alto quanto più la squadra risulta “forte” in base ai risultati delle partite giocate.

Qui emerge chiaramente quello che è un possibile elemento soggettivo del modello: il *ranking* iniziale delle squadre. Certamente si potrebbe sorridere pensando che sia possibile trovare un accordo generale su questo aspetto. Curiosamente però, come vedremo nel seguito, non è questo l’aspetto soggettivo più importante, anzi vedremo che per quanto riguarda gli esiti prodotti dal modello, questo è un aspetto del tutto ininfluenza. L’altra parte caratteristica del modello è come vogliamo utilizzare, di volta in volta, gli esiti delle partite per aggiornare la valutazione iniziale. È chiaro che dobbiamo in qualche modo decidere quanto vale una vittoria, quanto un pareggio e quanto una sconfitta. Il regolamento nazionale che regola il campionato italiano lo fa, come noto, sommando 3/1/0 punti, rispettivamente per vittoria/pareggio/sconfitta, al numero di punti che le squadre hanno già in classifica. Si potrebbe pensare di dare nel modello una valutazione in qualche modo negativa ad una sconfitta, oppure ritenere la proporzione 1 a 3 troppo, o troppo poco, elevata tra un pareggio e una vittoria: i non giovanissimi ricorderanno che molti anni fa il regolamento del campionato prevedeva punti “del tipo 2/1/0”. Si potrebbe anche pensare di valutare una vittoria in trasferta più di una vittoria casalinga, e lo stesso fare per un pareggio, oppure di adottare un criterio che premi una vittoria a seconda di quale sia la squadra che abbiamo battuto: per intenderci, una cosa è se abbiamo battuto la Juventus, un’altra se si trattava di una squadra meno blasonata. Per non parlare del considerare nella valutazione anche il punteggio della partita (reti segnate/subite): ancora con l’esemplificazione, si potrebbe dire che una sconfitta con la Juventus per 1-0 per alcune squadre potrebbe far meritare qualcosa di più di 0 punti. Ci si potrebbe sbizzarrire nel trovare criteri di valutazione che il regolamento vigente non prevede. Possiamo anticipare che il modello che ora vediamo tiene in realtà conto intrinsecamente di alcuni di questi aspetti, anche se non di tutti.

Entriamo nei dettagli tecnici. Abbiamo  $N$  squadre e definiamo un vettore  $r$  di  $N$  componenti non negative  $r_i$ , date dai *rank* delle varie squadre. Seguendo l'impostazione di [5,8,9], poniamo

$$p_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} r_j \quad (1)$$

dove  $a_{ij}$  è un numero (reale) non negativo che fornisce il “peso” degli esiti degli scontri diretti. Resta da commentare  $p_i$ : per il momento pensiamo che siano i punti che la squadra  $i$  ha alla fine del campionato; quindi l'equazione (1) dice sostanzialmente che i punti della squadra  $i$  dipendono linearmente dai *rank* di tutte le squadre e che le costanti di proporzionalità sono date dai coefficienti  $a_{ij}$ , che caratterizzano l'interazione della squadra  $i$  con la squadra  $j$ . Questi coefficienti possono tenere in considerazione i diversi aspetti legati al contesto in cui il modello viene applicato. Nel caso del calcio la scelta più naturale è di porre  $a_{ij} = 1$  se la squadra  $i$  vince contro la squadra  $j$ ,  $a_{ij} = 1/3$  se pareggiano e  $a_{ij} = 0$  se la squadra  $i$  perde contro la squadra  $j$ .<sup>1</sup> In questo modo non si introducono distorsioni rispetto al meccanismo adottato nella realtà per assegnare i punti ogni settimana.

All'equazione (1) si può dare una forma matriciale: se  $p$  è il vettore dei punteggi e  $r$  il vettore dei *rank*, (1) equivale a scrivere

$$p = Ar, \quad (2)$$

dove  $A$  è la matrice quadrata i cui elementi sono gli  $a_{ij}$ .  $A$  è detta a volte *matrice di preferenza* o *di transizione*. Ora, seguendo [5,8,9], è ragionevole assumere che i punteggi delle squadre siano proporzionali ai *rank*. Indichiamo con  $\lambda$  questa costante di proporzionalità. Scrivendo  $p = \lambda r$  nell'equazione matriciale (2) otteniamo

$$Ar = \lambda r.$$

Questa equazione è quella che porta alla definizione di autovalore e autovettore della matrice  $A$ . È opportuno a questo punto qualche richiamo generale sul concetto di autovalori e autovettori di una matrice quadrata. Come riferimenti bibliografici si possono vedere [3,4,6].

---

<sup>1</sup> Per ragioni di tipo matematico, come vedremo nel seguito, è importante che gli elementi  $a_{ij}$  siano positivi o almeno non negativi.

## Nozioni fondamentali per il modello

Sia  $A$  una matrice (reale)  $n \times n$ .<sup>1</sup>

**Definizione 1.** Uno scalare  $\lambda$  e un vettore  $x \neq 0$  per i quali valga  $Ax = \lambda x$  si dicono, rispettivamente, un *autovalore* e un *autovettore* ad esso associato della matrice  $A$ . L'insieme  $\sigma(A)$  degli autovalori di  $A$  è detto lo *spettro* di  $A$ .

Per dare la massima generalità al concetto di autovalori occorre pensarli nel campo  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi. In esso è garantita la loro esistenza e un fondamentale risultato ne stabilisce anche la “numerosità”. Ricordiamo ora alcuni risultati. Ci limitiamo a quelli che servono maggiormente nel seguito del lavoro.

Per gli autovalori della matrice  $A$  vale la seguente caratterizzazione:

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \text{la matrice } A - \lambda I \text{ è singolare} \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

Nelle espressioni qui sopra intendiamo con  $I$  la matrice identità e ricordiamo che *singolare* è sinonimo di *non invertibile*. Ricordiamo anche che  $\det(A - \lambda I)$  è un polinomio in  $\lambda$  di grado uguale all'ordine della matrice  $A$ , che viene detto *polinomio caratteristico* di  $A$ . L'equazione  $\det(A - \lambda I) = 0$  è detta *equazione caratteristica* di  $A$ . Gli autovalori sono quindi le soluzioni di un'equazione algebrica di grado  $n$ . In base al teorema fondamentale dell'algebra si può affermare che nel campo complesso le soluzioni sono  $n$ , se contate con le rispettive molteplicità.

Si noti che se  $x$  è un autovettore di  $A$  associato all'autovalore  $\lambda$  anche un qualunque suo multiplo  $cx$ , con  $c \neq 0$ , è ancora un autovettore di  $A$  associato a  $\lambda$ . L'insieme di tutti gli autovettori associati all'autovalore  $\lambda$  si chiama l'*autospatio* di  $A$  associato all'autovalore  $\lambda$ .

**Definizione 2.** Il numero

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

viene detto il *raggio spettrale* della matrice  $A$ .

**Osservazione.** Dato che un autovalore può essere complesso, il modulo  $|\lambda|$  va inteso in  $\mathbb{C}$ , ma in ogni caso  $\rho(A)$  è reale. Il massimo esiste in quanto

---

<sup>1</sup> Nelle applicazioni  $A$  è di solito una matrice ad elementi reali. Però le definizioni generali sono invece usualmente fornite nel campo  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi. Questo perché in generale, anche se la matrice è reale, i suoi autovalori non sono necessariamente reali: la loro esistenza e i principali risultati teorici che li riguardano trovano la loro naturale collocazione appunto nei numeri complessi.

l'insieme  $\sigma(A)$  è finito. La Definizione 2 è molto importante, anche nelle applicazioni, in quanto la conoscenza completa di tutti gli autovalori non è quasi mai necessaria: molte proprietà dipendono da “quanto grandi” sono, e quindi il raggio spettrale fornisce un confine superiore alla loro grandezza.

Si faccia attenzione che il raggio spettrale non è necessariamente un autovalore della matrice. Banalmente, se consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

essa ha l'autovalore doppio  $\lambda = -1$ . Il raggio spettrale è 1 e questo non è autovalore di  $A$ .

È importante il concetto di molteplicità di un autovalore.

**Definizione 3.** Se  $\lambda \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ , cioè se  $\lambda$  è un autovalore della matrice  $A$ ,

- si definisce *molteplicità algebrica* di  $\lambda$  ( $\text{molt alg}(\lambda)$ ) la sua molteplicità quale radice del polinomio caratteristico di  $A$ ; questo significa che  $\text{molt alg}(\lambda_i) = m_i, i = 1, \dots, k$  se e solo se  $(x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_k)^{m_k} = 0$  è l'equazione caratteristica di  $A$ . Se  $\text{molt alg}(\lambda) = 1$   $\lambda$  si dice un autovalore semplice;
- la *molteplicità geometrica* di  $\lambda$  ( $\text{molt geo}(\lambda)$ ) è la dimensione del nucleo di  $A - \lambda I$ , in altre parole la dimensione del sottospazio in cui la trasformazione associata a  $A - \lambda I$  si annulla: coincide con il massimo numero di autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore  $\lambda$ .

Si può dimostrare che in generale si ha

$$\text{molt geo}(\lambda) \leq \text{molt alg}(\lambda).$$

Fondamentali proprietà della matrice e della trasformazione lineare ad essa associata dipendono dal fatto che, per tutti gli autovalori della matrice, le due molteplicità ora definite siano oppure no uguali.

Per la nostra simulazione sono importanti il concetto di matrici positive e le particolarità dei loro autovalori. Una matrice è detta positiva se tutti i suoi elementi sono strettamente positivi. Lo stesso vale per un vettore.

Ci sono importanti risultati sul raggio spettrale e gli autovalori di una matrice positiva, alcuni quasi immediati, altri molto più profondi. Il *teorema di Perron* (dimostrato da Oskar Perron nel 1907) è di solito presentato come una raccolta di questi risultati. Il primo è che se per una matrice qualunque il raggio spettrale non è necessariamente un autovalore, questo invece succede

in una matrice positiva e tutti gli altri autovalori hanno modulo minore del raggio spettrale. Si può anche dimostrare che il raggio spettrale di una matrice positiva ha molteplicità algebrica uno: viene detto *autovalore di Perron* (detto anche *autovalore principale* o *autovalore dominante*). L'autospazio associato a  $\rho(A)$  è generato da un autovettore positivo. Questo autovettore viene detto *autovettore di Perron* della matrice  $A$ .

I risultati appena richiamati sono il nucleo del Teorema di Perron (vedi Sezione 8.2 pagina 667 di [6]). Si possono dimostrare altri risultati strettamente collegati a questo, che a volte entrano a far parte dell'enunciato del teorema. Ricordiamo solo uno di questi, una sorta di risultato di unicità: in una matrice positiva, oltre all'autovettore di Perron (e i suoi multipli), non ci sono altri autovettori positivi.

Da un punto di vista teorico l'autovalore di Perron è importante per ragioni di esistenza e unicità. Risulta però importante anche nelle applicazioni ed esiste un metodo iterativo molto efficace per calcolarlo, basato sulle potenze della matrice  $A$ . Va detto che nelle applicazioni non è così frequente avere a che fare con matrici positive, cioè con tutti gli elementi strettamente positivi. A parte i casi in cui necessariamente devono esserci elementi negativi, è più frequente avere elementi non negativi. Parliamo quindi brevemente anche di questo secondo caso e del tentativo che è stato fatto di generalizzare ad esso il Teorema di Perron.

La domanda naturale è se il Teorema di Perron continui a valere con matrici non negative. La risposta è no, e il controesempio può essere fornito dalla semplice matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 - 1 = 0$ , gli autovalori sono  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ , quindi il raggio spettrale è

$$\rho(A) = \max\{|-1|, |1|\} = 1.$$

E' ancora vero che  $\rho(A)$  è un autovalore della matrice, che la sua molteplicità è 1, che ha un autovettore positivo associato, ma non è più vero che è l'unico autovalore con modulo uguale al raggio spettrale, dato che anche  $-1$  ha modulo 1.

Georg Frobenius (1912) cercò di estendere in qualche modo il Teorema di Perron alle matrici non negative e ottenne risultati molto interessanti. Sostanzialmente riuscì a dimostrare che per queste matrici esiste ancora un autovalore positivo e un autovettore non negativo ad esso associato. Inoltre, se la matrice è *irriducibile* (vedi [3,4,6]) allora esiste un unico autovalore positivo, semplice e massimo in modulo, ed esiste un autovettore positivo ad

esso associato.

**Osservazione.** Quindi per matrici non negative in generale è stato dimostrato un risultato di esistenza, indebolito però rispetto alla forma di Perron, dato che l'autovettore non è necessariamente positivo. Invece, per le matrici non negative e irriducibili, il risultato è sostanzialmente analogo a quello delle matrici positive. Ricordiamo soltanto che c'è un interessante collegamento con la teoria dei grafi. Se associamo alla matrice  $A_{n \times n}$  un grafo orientato  $G(A)$  di  $n$  nodi  $\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$  in cui esiste un collegamento diretto (un arco) dal nodo  $N_i$  al nodo  $N_j$  se e solo se  $a_{ij} \neq 0$ , il grafo  $G(A)$  è detto *fortemente connesso* se per ogni scelta di suoi nodi  $N_h$  e  $N_k$  esiste un cammino, cioè una sequenza di archi, che porta da  $N_h$  a  $N_k$ . Ora, si può dimostrare che  $A$  è irriducibile se e solo se il grafo associato  $G(A)$  è fortemente connesso.

## Un'applicazione ad un problema reale

Presentiamo in questa sezione un'applicazione del modello lineare descritto nella sezione 2 alla classifica finale del campionato italiano di calcio 2018/2019. In Appendice A ci sono i risultati di tutte le partite giocate. Al campionato italiano di Serie A partecipano 20 squadre. Leggendo gli elementi per riga abbiamo i risultati delle partite interne (giocate in casa) dalle squadre indicate nella prima colonna. Leggendo invece per colonna abbiamo i risultati delle partite esterne (giocate in trasferta) dalle squadre indicate nella prima riga.

Scriviamo ora la matrice di transizione con una scelta dei “pesi” nella forma  $(1; 1/3; 0)$  per i tre possibili esiti di una partita. Più precisamente, poniamo

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la squadra } i \text{ vince contro la squadra } j \\ 1/3 & \text{se le squadre } i \text{ e } j \text{ pareggiano} \\ 0 & \text{se la squadra } i \text{ perde contro la squadra } j \end{cases}$$

e  $a_{ij} = 0$  se  $i = j$ . Si ottiene la matrice  $20 \times 20$  in Appendice B.

Anzitutto notiamo che la matrice non è positiva, bensì non negativa. Calcolando con Scilab gli autovalori della matrice  $A$  otteniamo lo spettro, riportato in Tabella 1(a).

Come detto in precedenza, nella teoria più generale di Frobenius sulle matrici non negative, sappiamo che per le matrici irriducibili il risultato di esistenza e unicità di Perron continua a valere. La nostra matrice è in effetti irriducibile e comunque mostra un evidente unico autovalore reale positivo di modulo massimo. Si notano poi, oltre a molte coppie di autovalori complessi coniugati, altri cinque autovalori reali negativi.



Possiamo chiedere a Scilab di calcolare gli autospazi associati: si trova che, associato all'autovalore dominante  $\rho(A) \approx 9.3798856$  c'è l'autovettore positivo normalizzato  $r$  in Tabella 1(b). Questo vettore ha componenti tutte positive e quindi soddisfa le proprietà dell'autovettore di Perron. E' bene indicare qui che l'output di Scilab in questo caso è un vettore normalizzato

-->spec(A) ans =	-->r = R*eye(20,1) r =	-->r/norm(r,'inf') ans =
9.3798856	0.2366622	0.6672615
0.9600202 + 0.4088287i	0.2246924	0.6335131
0.9600202 - 0.4088287i	0.1894160	0.5340524
0.1549563 + 1.3143953i	0.0589285	0.1661471
0.1549563 - 1.3143953i	0.2095523	0.5908260
- 1.0103493 + 1.3598447i	0.1721613	0.4854032
- 1.0103493 - 1.3598447i	0.0553997	0.1561977
- 0.1653962 + 1.2375553i	0.1921680	0.5418115
- 0.1653962 - 1.2375553i	0.2669683	0.7527087
- 1.9762909	0.3546768	1.
- 0.9209871 + 0.8224655i	0.2165159	0.6104597
- 0.9209871 - 0.8224655i	0.2676825	0.7547221
- 1.3207017 + 0.6017683i	0.2993857	0.8441084
- 1.3207017 - 0.6017683i	0.1458728	0.4112836
- 1.514949	0.2974843	0.8387476
- 1.0780052	0.2377530	0.6703370
- 0.4551172	0.1706217	0.4810623
- 0.3548544	0.1807754	0.5096906
0.3021233 + 0.0338060i	0.2575494	0.7261523
0.3021233 - 0.0338060i	0.202351	0.5705222
(a) Autovalori	(b) $\ r\ _2 = 1$	(c) $\ r\ _\infty = 1$

Tabella 1 Autovalori e autovettori della matrice di transizione

in norma 2, cioè  $\|r\|_2 = 1$ . In Tabella 1(b) abbiamo quindi l'unico autovettore di Perron con norma 2 unitaria.

Usando la norma  $\infty$  otteniamo il vettore in Tabella 1(c), dove abbiamo diviso il vettore in Tabella 1(b) per la sua componente massima ( $\|r\|_\infty = r_{10} = 0.3546768$ ).

Confrontiamo ora la classifica prodotta dal modello matematico con la classifica che realmente si è presentata alla fine del campionato.

La Tabella 2 riporta a sinistra la classifica ufficiale finale del campionato e a destra la classifica finale proposta dal modello, determinata dai *rank* delle squadre forniti in particolare dall'autovettore di Perron con norma  $\infty$  unitaria.

Cercando le più evidenti disparità tra modello e realtà per quanto riguarda i piazzamenti spicca subito il caso Atalanta: terza classificata ufficialmente e solo ottava nel modello. Particolarmente evidente l'anomalia se si considera che è avanti di 16 punti rispetto alla Sampdoria e invece ha un *rank* inferiore nel modello.

Il caso Roma: ben distanziata dal Napoli (13 punti sotto) e molto vicina invece nel *rank* del modello.

Il caso Sassuolo: pur osservando che ci sono parecchie squadre tra i 41 e i 43 punti, un piazzamento di tranquilla metà classifica corrisponde ad un rischio retrocessione nel modello.

Squadra	Punti		Squadra	<i>Rank</i>
Juventus	90		Juventus	1.
Napoli	79		Napoli	0.8441084
Atalanta	69		Roma	0.8387476
Inter	69		Milan	0.7547221
Milan	68		Inter	0.7527087
Roma	66		Torino	0.7261523
Torino	63		Sampdoria	0.6703370
Lazio	59		Atalanta	0.6672615
Sampdoria	53		Bologna	0.6335131
Bologna	44		Lazio	0.6104597
Sassuolo	43		Empoli	0.5908260
Udinese	43		Udinese	0.5705222
SPAL	42		Genoa	0.5418115
Parma	41		Cagliari	0.5340524
Cagliari	41		SPAL	0.5096906
Fiorentina	41		Fiorentina	0.4854032
Genoa	38		Sassuolo	0.4810623
Empoli	38		Parma	0.4112836
Frosinone	25		Chievo	0.1661471
Chievo	17		Frosinone	0.1561977

Tabella 2 Confronto tra i piazzamenti realtà/modello

Il caso Empoli: opposto al caso Sassuolo, l'Empoli è stato retrocesso in Serie B e nel modello avrebbe invece meritato un'assolutamente tranquilla "salvezza".

Il caso Parma: simile al caso Sassuolo, ma con retrocessione in Serie B nel modello a fronte di una salvezza un po' a rischio nella realtà.

Cerchiamo ora qualche possibile motivazione che spieghi le differenze tra realtà e modello per quanto riguarda l'assegnazione dei *rank*, che poi produce le anomalie nell'ordine di classifica. Il modello non valuta certamente in modo diverso i punti conquistati in casa e quelli in trasferta: i *rank* provengono dalla matrice di transizione e questa non discrimina tra le due tipologie.

Certamente i tifosi, soprattutto quelli di squadre non blasonate, percepiscono che un pareggio contro una squadra forte vale forse quanto una vittoria contro una squadra del proprio livello. L'assegnazione dei punti nella classifica reale certamente non tiene conto di questo. La domanda allora è: il modello lo fa? Potrebbe sembrare, per lo stesso motivo di prima, che tutto dipenda dalla matrice di transizione, che ha elementi inesorabilmente costanti: 1 per una vittoria e 1/3 per un pareggio. Ma nel modello lineare i *rank*

dipendono dagli elementi della matrice e nello stesso tempo dai *rank* delle squadre. Quindi un pareggio non vale sempre lo stesso, ma dipende da quale squadra abbiamo incontrato. La cosa sarebbe ancora più evidente se richiamassimo nel dettaglio il funzionamento del metodo iterativo per il calcolo dell'autovalore e dell'autovettore dominante (detto *metodo delle potenze*), e che si può trovare in [3,6,8,9].

Il metodo può partire da una qualunque distribuzione di *rank* delle squadre, contenuta in un vettore  $x^0$ : inutile quindi litigare su quale sia una valutazione iniziale delle squadre. Ad ogni iterazione il metodo aggiorna le valutazioni (mediante un'equazione del tipo  $x^k = Ax^{k-1}$ , o se si vuole  $x^k = A^k x^0$ ), quindi in base ai *rank* correnti e agli elementi della matrice di transizione, cioè gli esiti delle partite. Si può dimostrare che, a parte qualche dettaglio tecnico, la successione degli  $x^k$  così costruita converge all'autovettore associato all'autovalore dominante.

Si noti che quindi gli elementi della matrice di transizione non vengono usati una sola volta, ma ad ogni iterazione: questo fa sì che la valutazione finale, quella della classifica definitiva, consideri che una squadra acquista *rank* se sconfigge una squadra di alto *rank*, ma anche se batte una squadra che ha battuto un'altra di alto *rank*, e così via "all'infinito", considerando effetti di primo, secondo, ...,  $k$ -esimo ordine.

## Conclusioni

Le differenze tra realtà e modello possono essere spiegate dalle considerazioni appena fatte. Il modello lineare basato sull'autovalore dominante di Perron è un valido strumento per cogliere, alla fine del campionato, aspetti nascosti che il meccanismo ufficiale di assegnazione dei punti non può cogliere.

Tra il serio e il faceto, qualche commento ora sulla applicabilità concreta di questo modello al campionato reale: ovviamente nella quotidianità del campionato, anzi nella sua "settimanalità", c'è bisogno di produrre una classifica provvisoria ogni domenica. Questo nel modello significa una matrice di transizione molto "sparsa" (con molti zeri), almeno nella prima fase del campionato. Tecnicamente questo è un problema per l'autovalore di Perron, dato che la matrice sarebbe probabilmente riducibile, il che mette in dubbio l'esistenza dell'autovalore di Perron. Quindi, sempre tra il serio e il faceto, il modello matematico potrebbe essere applicato alla fine, per sostituire una classifica prodotta settimana per settimana in modo classico: sarebbe però a questo punto interessante intervistare i tifosi della squadra che, dopo aver conquistato con la classifica usuale un buon piazzamento, magari una UEFA

League, si vedesse retrocessa dal modello matematico a metà classifica. Stesso discorso per le squadre che avessero conquistato una dignitosa salvezza e che si vedessero retrocesse in Serie B dalla matematica.

### Riferimenti Bibliografici

- [1] FERCOQ O., Perron vector optimization applied to search engines, *Appl. Numer. Math.*, **75**, 77–99, 2014.
- [2] GLEICH D. F., PageRank beyond the web, *SIAM Rev.* **57** (3), 321–363, 2015.
- [3] GOLUB G. H. – VAN LOAN C. F.: *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 4<sup>th</sup> ed. (2013).
- [4] HORN R.H., JOHNSON C.A., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> ed., 2013.
- [5] KEENER J.P., The Perron–Frobenius theorem and the ranking of football teams, *SIAM Review*, **35** (1), 1993 (published online 2012).
- [6] MEYER C.D., *Matrix analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.
- [7] NEGAHBAN S., OH S., SHAH D., Rank centrality: ranking from pairwise comparisons, *Oper. Res.*, **65** (1), 266–287, 2017.
- [8] PERETTI A., A linear model for a ranking problem, Working Paper Series no. 20, Department of Economics, University of Verona, 2017.
- [9] PERETTI A., A linear model for ranking soccer teams, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, **22** (3), 243–263, 2019.
- [10] PERETTI A., ROVEDA A., On the mathematical background of Google PageRank algorithm, Working Paper Series no. 25, Department of Economics, University of Verona, 2014.
- [11] SLUTZKI G., VOLIJ O., Ranking participants in generalized tournaments, *Internat. J. Game Theory*, **33** (2), 255–270, 2005.

Appendice A – Tutti i risultati delle partite del Campionato 2018/2019

	ATA	BOL	CAG	CHI	EMP	FIO	FRO	GEN	INT	JUV	LAZ	MIL	NAP	PAR	ROM	SAM	SAS	SPA	TOR	UDI
Atalanta		4-1	0-1	1-1	0-0	3-1	4-0	2-1	4-1	2-2	1-0	1-3	1-2	3-0	3-3	0-1	3-1	2-1	0-0	2-0
Bologna	1-2		2-0	3-0	3-1	0-0	0-4	1-1	0-3	0-1	0-2	0-0	3-2	4-1	2-0	3-0	2-1	0-1	2-2	2-1
Cagliari	0-1	2-0		2-1	2-2	2-1	1-0	1-0	2-1	0-2	1-2	1-1	0-1	2-1	2-2	0-0	2-2	2-1	0-0	1-2
Chievo	1-5	2-2	0-3		0-0	3-4	1-0	0-0	1-1	2-3	1-1	1-2	1-3	1-1	0-3	0-0	0-2	0-4	0-1	0-2
Empoli	3-2	2-1	2-0	2-2		1-0	2-1	1-3	0-1	1-2	0-1	1-1	2-1	3-3	0-2	2-4	3-0	2-4	4-1	2-1
Florentina	2-0	0-0	1-1	6-1	3-1		0-1	0-0	3-3	0-3	1-1	0-1	0-0	0-1	1-1	3-3	0-1	3-0	1-1	1-0
Frosinone	0-5	0-0	1-1	0-0	3-3	1-1		1-2	1-3	0-2	0-1	0-0	0-2	3-2	2-3	0-5	0-2	0-1	1-2	1-3
Genoa	3-1	1-0	1-1	2-0	2-1	0-0	0-0		0-4	2-0	2-1	0-2	1-2	1-3	1-1	1-1	1-1	1-1	0-1	2-2
Inter	0-0	0-1	2-0	2-0	2-1	2-1	3-0	5-0		1-1	0-1	1-0	1-0	0-1	1-1	2-1	0-0	2-0	2-2	1-0
Juventus	1-1	2-0	3-1	3-0	1-0	2-1	3-0	1-1	1-0		2-0	2-1	3-1	3-3	1-0	2-1	2-1	2-0	1-1	4-1
Lazio	1-3	3-3	3-1	1-2	1-0	1-0	1-0	4-1	0-3	1-2		1-1	1-2	4-1	3-0	2-2	2-2	4-1	1-1	2-0
Milan	2-2	2-1	3-0	3-1	3-0	0-1	2-0	2-1	2-3	0-2	1-0		0-0	2-1	2-1	3-2	1-0	2-1	0-0	1-1
Napoli	1-2	3-2	2-1	0-0	5-1	1-0	4-0	1-1	4-1	1-2	2-1	3-2		3-0	1-1	3-0	2-0	1-0	0-0	4-2
Parma	1-3	0-0	2-0	1-1	1-0	1-0	0-0	1-0	0-1	1-2	0-2	1-1	0-4		0-2	3-3	2-1	2-3	0-0	2-2
Roma	3-3	2-1	3-0	2-2	2-1	2-2	4-0	3-2	2-2	2-0	3-1	1-1	1-4	2-1		4-1	3-1	0-2	3-2	1-0
Sampdoria	1-2	4-1	1-0	2-0	1-2	1-1	0-1	2-0	0-1	2-0	1-2	1-0	3-0	2-0	0-1		0-0	2-1	1-4	4-0
Sassuolo	2-6	2-2	3-0	4-0	3-1	3-3	2-2	5-3	1-0	0-3	1-1	1-4	1-1	0-0	0-0	3-5		1-1	1-1	0-0
SPAL	2-0	1-1	2-2	0-0	2-2	1-4	0-3	1-1	1-2	2-1	1-0	2-3	1-2	1-0	2-1	1-2	0-2		0-0	0-0
Torino	2-0	2-3	1-1	3-0	3-0	1-1	3-2	2-1	1-0	0-1	3-1	2-0	1-3	1-2	0-1	2-1	3-2	1-0		1-0
Udinese	1-3	2-1	2-0	1-0	3-2	1-1	1-1	2-0	0-0	0-2	1-2	0-1	0-3	1-2	1-0	1-0	1-1	3-2	1-1	

Appendice B – La corrispondente matrice di transizione

	ATA	BOL	CAG	CHI	EMP	FIO	FRO	GEN	INT	JUV	LAZ	MIL	NAP	PAR	ROM	SAM	SAS	SPA	TOR	UDI
Atalanta	0	1	0	1/3	1/3	1	1	1	1	1/3	1	0	0	1	1/3	0	1	1	1/3	1
Bologna	0	0	1	1	1	1/3	0	1/3	0	0	1/3	1	1	1	1	1	1	0	1/3	1
Cagliari	0	1	0	1	1/3	1	1	1	1	0	1/3	0	1	1/3	1/3	1/3	1	1/3	0	
Chievo	0	1/3	0	0	1/3	0	1	1/3	1/3	0	1/3	0	0	1/3	0	1/3	0	0	0	0
Empoli	1	1	1	1/3	0	1	1	0	0	0	1/3	1	1/3	0	0	1	0	1	1	1
Florentina	1	1/3	1/3	1	1	0	0	1/3	1/3	0	1/3	0	1/3	0	1/3	1/3	0	1	1/3	1
Frosinone	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0	1/3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Genoa	1	1	1/3	1	1	1/3	1/3	0	0	1	1	0	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	0	1/3
Inter	1/3	0	1	1	1	1	1	1	0	1/3	0	1	1	0	1/3	1	1/3	1	1/3	1
Juventus	1/3	1	1	1	1	1	1	1/3	1	0	1	1	1	1/3	1	1	1	1	1/3	1
Lazio	0	1/3	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1/3	0	1	1	1/3	1/3	1	1/3	1
Milan	1/3	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1/3	1	1	1	1	1	1/3	1/3
Napoli	0	1	1	1/3	1	1	1	1/3	1	0	1	1	0	1	1/3	1	1	1	1/3	1
Parma	0	1/3	1	1/3	1	1	1/3	1	0	0	0	1/3	0	0	0	1/3	1	0	1/3	1/3
Roma	1/3	1	1	1/3	1	1	1/3	1	1	1/3	1	1	1/3	0	1	0	1	0	1	1
Sampdoria	0	1	1	1	0	1/3	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1/3	1	0	1
Sassuolo	0	1/3	1	1	1	1/3	1/3	1	1	0	1/3	0	1/3	1/3	1/3	0	0	1/3	1/3	1/3
SPAL	1	1/3	1/3	1/3	1/3	0	0	1/3	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1/3	1/3
Torino	1	0	1/3	1	1	1/3	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
Udinese	0	1	1	1	1	1/3	1/3	1	1/3	0	0	0	0	0	1	1	1/3	1	1/3	0



**Pratiche di valutazione formativa tra pari in  
ambiente online per promuovere il pensiero  
matematico negli studenti universitari**

**Formative peer-review practices in an online  
environment to promote the undergraduate students'  
mathematical thinking**

**Anna Pierri<sup>1</sup>**

**Abstract**

This work comes from the discussion about the difficulties in mathematics of students in the transition from school to university, which can be attributed to various factors. Specifically, the work aims to show how a blended approach based on peer to peer online activities, in a context of formative assessment, can be an effective pedagogical strategy for overcoming such difficulties and promoting advanced mathematical thinking. The activity, experimented in a university context, aims to improve formative assessment strategies and leads students to develop continuous reflections on their learning processes and, consequently, to a greater awareness of their own reasoning.

---

<sup>1</sup> [apiერი@unisa.it](mailto:apiერი@unisa.it), Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione ed Elettrica e Matematica Applicata, Università degli Studi di Salerno.

Comunicato da U. Dello Iacono

## Introduzione

Uno dei temi centrali, anche a livello internazionale, della ricerca in didattica della matematica è il passaggio dalla scuola secondaria all'università, passaggio che è problematico per molti studenti come testimoniano i vari studi relativi a tali difficoltà [1].

Nello specifico, De Guzmán et al. [2] sottolineano l'importanza che, nel passaggio dalla scuola superiore all'università gli studenti acquisiscano autonomia nell'apprendimento, dato che molti di loro arrivano all'università senza sapere come prendere appunti, come leggere un testo, come pianificare lo studio. Sembra che, sebbene la matematica nelle scuole elementari e superiori abbia una posizione predominante nei programmi di studio, le conoscenze e le competenze degli studenti universitari potrebbero non far eco a questo aspetto [3]. Una possibile ragione è che ci sono diversi cambiamenti nella transizione verso l'istruzione universitaria, compresi quelli negli stili di insegnamento e di apprendimento, quelli relativi al tipo di matematica insegnata, alla comprensione concettuale, a conoscenze procedurali necessarie per la comprensione del materiale e ai cambiamenti legati ad un avanzato pensiero matematico. Una grande quantità di ricerche sulla matematica fa notare che gli studenti all'inizio dell'università o alla fine della scuola secondaria non hanno le competenze necessarie per combinare diversi ragionamenti, diversi modi di pensare.

Nello specifico, Sierpiska [4] distingue tra pensiero teorico e pensiero pratico. Il pensiero teorico è caratterizzato da sistemi organizzati di concetti e dalla riflessione sui vari sistemi di rappresentazione semiotica. Il pensiero pratico è l'opposto: utilizza esempi archetipici, ragionamenti basati sulla logica dell'azione. Secondo Sierpiska, i matematici usano entrambi i modi di pensare: il più delle volte, in un contesto familiare, pensano in modo pratico, ma usano il pensiero teorico quando affrontano un nuovo e difficile problema. Molte difficoltà incontrate dagli studenti del primo anno possono essere intese come conseguenze del pensiero pratico. Queste difficoltà sono più evidenti in quei corsi di laurea, dove la matematica ha una vasta gamma di applicazioni e offre agli studenti l'opportunità di imparare a fare astrazioni matematiche. In questo contesto, non è più sufficiente che gli studenti sappiano come operare, ma che diventino consapevoli di ciò che fanno e del perché lo fanno. L'attenzione ai processi argomentativi è riconosciuta anche dalle Indicazioni nazionali [5], che sottolineano come la matematica possa contribuire a "sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare



correttamente, di comprendere i punti di vista e gli argomenti degli altri” (p. 49). Sebbene i corsi di matematica di base siano tipicamente insegnati in modo tradizionale, talvolta caratterizzati da “gesso e discussione” [6], il nostro obiettivo è quello di mostrare come un approccio misto (apprendimento online e in presenza) che utilizzi attività online di interazione tra pari, in un contesto di valutazione formativa, possa essere una strategia pedagogica efficace per la promozione del pensiero matematico avanzato e per il superamento delle difficoltà sopra menzionate.

La nostra domanda di ricerca è quindi la seguente: in che modo, in un contesto di valutazione formativa, le attività online di valutazione tra pari possano essere una strategia efficace per la promozione del pensiero matematico?

## Quadro teorico

Il punto di partenza della nostra ricerca è la definizione di valutazione formative fornita da Black and Wiliam [7]: *“la pratica in classe diventa formativa nel momento in cui consente ad insegnanti e studenti di evidenziare i risultati degli studenti, condividerli, interpretarli e servirsi di essi per prendere decisioni sui passi successivi da fare nel processo di istruzione”* (Black e Wiliam, p.9, traduzione).

Attività tipiche dei processi di valutazione formativa sono quindi quelle attraverso le quali gli studenti hanno modo di verificare i propri livelli di apprendimento, come l'autovalutazione e le attività di valutazione tra pari.

Black e Wiliam evidenziano cinque diverse strategie di valutazione formativa, attivate dai diversi attori che partecipano al processo di valutazione formativa (insegnante, studente, pari): (a) chiarire/capire/condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di “successo”; (b) progettare discussioni di classe efficaci ed attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti; (c) fornire feedback che consentano allo studente di poter migliorare nel processo di apprendimento; (d) attivare gli studenti come risorse didattiche gli uni per gli altri; (e) attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento.

Le tecnologie digitali, come evidenziato dalla ricerca [8], possono contribuire a creare contesti di apprendimento che consentano di svolgere funzioni fondamentali dei processi di valutazione formativa.

Sulla base di queste considerazioni sull'utilizzo della tecnologia per promuovere i processi di valutazione formativa, all'interno del progetto europeo FaSMEd [9], è stata messa a punto una estensione del modello bidimensionale di Wiliam e Thompson [10], che contenga anche le

funzionalità della tecnologia per la valutazione formativa. Tali funzionalità si riferiscono a: *inviare e mostrare*, quando la tecnologia è utilizzata come supporto per la comunicazione e per attivare discussioni di classe; *elaborare e analizzare*, quando la tecnologia è utilizzata per analizzare i dati e le informazioni raccolti durante le lezioni; *creare un ambiente interattivo per la matematica*, quando la tecnologia è utilizzata per creare un ambiente di lavoro condiviso, in cui esplorare i contenuti matematici. La funzionalità tecnologica, che abbiamo maggiormente stressato nel nostro lavoro di ricerca è la prima. In particolare vogliamo indagare come una piattaforma di e-learning, in ambiente universitario, possa essere sfruttata per promuovere i processi di valutazione formativa in matematica coinvolgendo i tre attori, in particolare i pari, in un contesto di apprendimento misto.

Altro aspetto da considerare nel quadro teorico è il feedback fornito dai diversi attori, al fine di mettere in pratica le strategie chiave della valutazione formativa. Hattie e Timperley [11] distinguono i diversi livelli di feedback. In particolare, nella nostra ricerca, ci concentriamo su (i) feedback sul compito e (ii) feedback sullo svolgimento del compito. Il feedback sul compito è mirato a focalizzare l'attenzione su problematiche connesse all'interpretazione del testo del problema o alla correttezza della risposta fornita. Il feedback sullo svolgimento del compito è relativo ai processi, alle competenze, alle strategie e al pensiero necessari per comprendere ed affrontare efficacemente il compito.

## **Metodologia**

### **Il disegno didattico**

Il contesto di riferimento preso in esame è un corso universitario del percorso di laurea triennale in Ingegneria Informatica in cui gli studenti del primo anno partecipano ad un modulo intensivo di due trimestri in matematica. Il contesto scelto riguarda nello specifico il secondo modulo di matematica, che comprende argomenti di algebra lineare e analisi matematica. Il modulo si sviluppa in 12 settimane, con 3 lezioni frontali (relative a lezioni teoriche e sessioni esercitative) di 2 ore a settimana. Inoltre, al fine di coinvolgere gli studenti in maniera attiva evitando quindi che possano svolgere un ruolo passivo, come potrebbe accadere nelle lezioni dei corsi di ingegneria seguite sempre da un gran numero di studenti, sono state messe a disposizione ulteriori risorse di apprendimento nonché strumenti di comunicazione attraverso una piattaforma di e-learning.

Alla luce delle precedenti esperienze sulle piattaforme di e-learning [11] [12], per coinvolgere gli studenti e renderli responsabili sia del proprio processo di apprendimento che di quello dei propri coetanei, abbiamo utilizzato uno specifico strumento avanzato della piattaforma web Moodle, chiamato “workshop” al fine di supportare il lavoro tra pari nella prospettiva della valutazione formativa online [13].

Lo strumento workshop permette agli studenti, da un lato, di caricare la risoluzione di specifici problemi/esercizi e, dall'altro, la redistribuzione automatica e anonima di compiti svolti dagli studenti e soggetti alla valutazione da parte di altri studenti (nello specifico ogni compito viene corretto da tre pari), diversi da chi ha svolto il problema/esercizio. In fase di correzione, gli studenti sono invitati a fornire un opportuno feedback in modo da rendere evidenti gli errori riscontrati e a dare suggerimenti ai propri pari per migliorarne la soluzione; in tal modo, come sottolineato da Black e William, essi diventano sia risorse didattiche per i loro coetanei che responsabili del proprio apprendimento. La valutazione è guidata da specifici criteri stabiliti dal docente in relazione agli aspetti chiave relativi ai diversi argomenti proposti. In particolare abbiamo considerato i criteri di correttezza, chiarezza e completezza. Il criterio della correttezza si riferisce alla mancanza di errori matematici nella risposta e nella giustificazione fornita; il criterio della chiarezza si riferisce al piano di comunicazione e alla comprensione della risposta da parte di un interlocutore (pari, insegnante); il criterio della completezza si riferisce alla giustificazione dei vari passaggi che portano allo svolgimento del compito.

Di seguito, esponiamo i criteri in dettaglio:

- *Criterio 1 (correttezza): “Per ogni esercizio, valuta se ci sono errori nel risultato o nel processo risolutivo e se le risposte sono tutte presenti. I richiami teorici, se ci sono, sono corretti? I simboli matematici sono usati in maniera corretta?”*
- *Criterio 2 (chiarezza): “Per ogni esercizio, valuta se il risultato è espresso chiaramente ed in modo univoco e se il procedimento risolutivo è presente e se è comprensibile, ossia se esprime in modo chiaro, preciso e univoco cosa intende dire”.*
- *Criterio 3 (completezza): “Valuta se sono presenti tutti i risultati/le risposte. Laddove richiesto dalla consegna, valuta se i procedimenti sono completi o se ci sono parti mancanti o salti nel ragionamento, o conclusioni non giustificate”.*

Dopo che gli studenti hanno completato il loro compito, l'insegnante chiude l'attività di workshop mettendo a disposizione degli studenti tutte le tracce assegnate nel workshop insieme a modelli di risoluzione ottimale, che vengono estratti dagli elaborati degli studenti, opportunamente rivisti, integrati e commentati dal docente. Così ogni studente riceve due tipi di feedback: la valutazione da tre pari, che consiste in un commento/feedback puntuale per ogni criterio e un feedback generale aggiuntivo; una valutazione meno diretta che corrisponde al modello di risoluzione ottimale per ogni problema inviato dal docente; quest'ultimo è un feedback più generale e indiretto e può essere utilizzato dallo studente come forma di autovalutazione. Il criterio di correttezza è maggiormente orientato nel fornire un tipo di feedback sul compito, in quanto valuta errori legati allo svolgimento, mentre i criteri di chiarezza e completezza sono maggiormente indirizzati a fornire feedback legati al processo risolutivo.

In questo lavoro, intendiamo mostrare come, a partire da alcuni esempi di feedback ricevuti dagli studenti valutatori, la strategia della valutazione formativa potrebbe migliorare la competenza argomentativa degli studenti. Inoltre, al fine di includere il punto di vista degli studenti, abbiamo loro somministrato un questionario relativo alle sensazioni/stati d'animo legate alla partecipazione all'attività e alle ricadute che si sono avute sul processo di apprendimento.

## L'implementazione tecnologica

Dal punto di vista tecnologico, l'attività è stata implementata avvalendosi del modulo workshop della piattaforma di e-learning Moodle.

Questo modulo copre essenzialmente due fasi dell'attività di apprendimento:

- **Fase 1- Risolvi:** *“Risolvi la prova che hai ricevuto. Per ogni quesito del problema fornisci adeguate spiegazioni, vale a dire, spiega mano mano cosa stai facendo, in modo sintetico ma sufficientemente chiaro perché chi legge possa seguire il ragionamento che hai fatto e il procedimento che hai applicato; richiama opportuni risultati teorici (teoremi, definizioni, proprietà) che sono alla base delle procedure che usi. Successivamente carica il tuo svolgimento, facendo attenzione a non mettere il tuo nome nello svolgimento.”*
- **Fase 2 - Valuta:** *“Correggi e valuta le prove che ti sono state assegnate, come se tu fossi un docente che dovrebbe verificare la*

*conoscenza di uno studente, relativamente agli argomenti proposti, in base all'elaborato che ha consegnato."*

I problemi sono scelti dal docente in modo da coprire tutti gli argomenti del corso. Grazie ad uno specifico software, lo stesso problema è assegnato, via email, ad un piccolo gruppo di (4 o 5) studenti scelti a caso. Questo garantisce, da un lato, che ogni studente non conosca il compagno che ha ricevuto lo stesso problema da risolvere; dall'altro, che, nella Fase 2, ogni studente ha buone probabilità di non ricevere lo stesso problema che ha risolto nella Fase 1. In ogni caso, i problemi scelti dall'insegnante prevedono più strategie risolutive. In questo modo, se uno studente deve valutare lo stesso problema che ha ricevuto nella Fase 1, ci sono buone probabilità che il suo compagno abbia risolto il problema in modo diverso.

Nell'assegnazione e somministrazione dei problemi agli studenti, vengono fatte specifiche richieste:

- *"spiega ciò che stai facendo man mano che svolgi il compito, in modo sintetico ma abbastanza chiaro, affinché il lettore possa seguire il ragionamento che è stato fatto ed il procedimento applicato"*
- *"richiama appropriati risultati teorici (teoremi, definizioni, proprietà) che sono alla base delle procedure che usi"*.

La Fase 1 è anticipata da una fase di preparazione in cui, attraverso le impostazioni del modulo workshop, il docente predispose l'ambiente: stabilisce il tempo per la risoluzione delle due fasi (da 1 a 4 giorni rispettivamente); definisce gli elementi di valutazione associati ai tre criteri (correttezza, completezza, chiarezza); distribuisce un certo numero di elaborati per ogni studente, escludendo l'autovalutazione (come esposto nella sezione precedente sono stati scelti 3 revisori per ogni compito); rende visibile agli studenti i punteggi ottenuti sulla base dei punteggi ricevuti dai loro coetanei (elaborazione e analisi delle funzionalità della tecnologia).

## **Sperimentazione**

Abbiamo sperimentato il workshop, come strumento di valutazione formativa, nel corso obbligatorio di Geometria, Algebra e Logica del corso di laurea in Ingegneria Informatica, in cui sono iscritti 175 studenti. Il corso prevede due prove d'esame scritte, una intermedia e una finale, che sono il

prerequisito per accedere agli esami orali. Per la sperimentazione, cui hanno preso parte studenti volontari, sono stati preparati ed erogati, attraverso la piattaforma Moodle, cinque workshop, prima delle due prove scritte, e relativi ad esercizi di riepilogo di algebra lineare. Per ogni sessione sono stati preparati circa 40 esercizi, ognuno dei quali è stato somministrato a gruppi di 3 o 4 studenti.

Dopo aver ricevuto via e-mail il problema/esercizio preparato dal docente, gli studenti sono stati invitati a risolverlo e a caricare le loro soluzioni entro una determinata scadenza. Poi, grazie alla funzionalità di redistribuzione automatica del modulo workshop, tutti i problemi e i relativi svolgimenti sono stati distribuiti tra gli studenti, in modo che ogni studente riceva tre elaborati da valutare. Entro una seconda scadenza, fissata dal docente durante la preparazione dell'attività, gli studenti sono stati invitati a valutare i prodotti ricevuti secondo i criteri di correttezza, chiarezza e completezza. Nella fase finale dell'attività, ogni studente ha ricevuto un feedback dettagliato dai tre revisori. Al termine dell'attività, il docente ha fornito un feedback generale più diretto caricando sulla piattaforma una cartella con i modelli ottimali di risoluzione. Ciascun studente ha potuto visionarne il contenuto per svolgere un'attività di autovalutazione. Di seguito riportiamo alcuni esempi di feedback, riferiti ai tre criteri di valutazione e forniti dagli studenti, che hanno ricoperto il ruolo di revisore. I feedback R1-R3 sono riferiti al criterio di correttezza; R4 si riferisce al criterio della chiarezza, mentre R5 a quello della completezza.

**R1:** [*...Alla fine della riduzione a scalini, infatti, abbiamo una matrice con tre righe non nulle, per cui il vettore assegnato non appartiene allo spazio  $V$  e, di conseguenza, esso non può essere espresso come combinazione lineare della base...*]

**R2:** [*...Ci sono errori nell'uso di simboli matematici e imperfezioni formali (vedi file allegato) ...*]

**R3:** [*...Non puoi eseguire il prodotto scalare tra tre vettori [...] un consiglio: per evitare di confonderti chiamali in modo diverso ...*]

**R4:** [*...Non puoi eseguire il prodotto scalare tra tre vettori [...] un consiglio: per evitare di confonderti chiamali in modo diverso ...*]

**R5:** [*...Non puoi eseguire il prodotto scalare tra tre vettori [...] un consiglio: per evitare di confonderti chiamali in modo diverso ...*]

Il questionario inviato agli studenti al termine dell'attività ha voluto indagare sulle sensazioni/emozioni degli studenti sia quando hanno svolto il ruolo di revisori che quando sono stati soggetti a valutazione. Inoltre, abbiamo indagato l'impatto che la partecipazione a questa attività ha avuto

sull'apprendimento degli argomenti del corso, sul metodo di studio e sul superamento dell'esame. Nello specifico, le domande che sono state loro poste, attraverso il questionario, sono: (1) Come ti sentivi quando ricevevi la valutazione da parte dei tuoi compagni? (2) In che modo la partecipazione ai workshop ha influito sull'apprendimento dei contenuti del corso? (3) In che modo la partecipazione ai workshop ha influito sul tuo metodo di studio in vista dell'esame?

## **Analisi dei dati e conclusione**

In questa sezione forniamo un'analisi qualitativa dei dati che possiamo estrapolare sia dai feedback forniti dagli studenti, con il ruolo di revisori, sia dalle risposte al questionario. Possiamo osservare come R1 fornisca un'argomentazione sul perché ci sia un errore. Parte da una considerazione sul calcolo [... *abbiamo una matrice con tre righe non nulle...*] fornendone una interpretazione teorica [...*per cui il vettore assegnato non appartiene allo spazio  $V$ ...*] e infine illustra un ulteriore risultato teorico, conseguenza del precedente [...*di conseguenza, esso non può essere espresso come combinazione lineare della base...*]. R3 concentra il suo feedback sull'aspetto cognitivo/linguistico, sottolineando che oggetti diversi dovrebbero avere nomi diversi [...*un consiglio: per evitare di confonderti chiamali in modo diverso...*]. Per quanto riguarda il criterio della chiarezza, R4 sottolinea l'importanza di rendere espliciti alcuni fatti impliciti; per quanto riguarda la completezza, R5 evidenzia una mancanza di apprendimento profondo.

I dati qualitativi ottenuti dalle risposte al questionario mostrano che i sentimenti/sensazioni degli studenti nel loro ruolo di revisore sono diversi: alcuni studenti si sono sentiti responsabilizzati, come si evince dall'affermazione di uno studente [... *Responsabilizzato e mi ha permesso di capire molti errori che commettevo anch'io...*]; altri studenti si sono sentiti di aiuto per gli altri, come afferma un altro studente [...*In alcuni compiti, ho cercato di guidare lo studente che valutavo verso la corretta esecuzione dell'esercizio, motivandolo con i giusti riferimenti teorici ove necessario. In quelle situazioni, mi sono sentito a mio agio con l'idea di poter aiutare...*]. Dalle risposte fornite possiamo osservare come queste vadano nella direzione delle strategie chiavi (d) ed (e) di Black e Wiliam esposte nel quadro teorico. A volte il senso di responsabilità era quello di non sentirsi all'altezza del compito, così è emerso un senso di frustrazione, come hanno riportato alcuni studenti [...*A tratti in difficoltà per paura di un giudizio errato...*].

Rispetto all'impatto sull'apprendimento dei contenuti, i principali benefici derivanti dalla partecipazione alle attività dei workshop sono risultati i

seguenti: acquisizione di un ritmo di studio regolare, nell'autovalutazione di quanto si è compreso durante le lezioni [...*La partecipazione ai workshop mi ha permesso di capire dove ci fossero più lacune, in modo tale da lavorarci su maggiormente; identificazione e recupero delle lacune [...Mi ha permesso di capire dove è più possibile sbagliare in un esercizio e quali sono errori o imprecisioni che commettevo...*].

L'attività ha avuto un impatto positivo anche sul metodo di studio degli studenti (terzo punto del questionario), favorendo una continuità nello studio [...*Mi ha "costretto" a studiare gradualmente e non solo alla fine del corso e in prossimità dell'esame, cosa che altrimenti avrei sicuramente fatto...*] e la focalizzazione da parte degli studenti su aspetti teorici e argomentativi [...*Ha inciso positivamente portandomi ad uno studio teorico più approfondito...*], [...*Mi ha aiutato a fissare i concetti teorici...*].

In conclusione, l'analisi qualitativa suggerisce che la pratica formativa della valutazione tra pari, erogata in un ambiente di apprendimento di tipo misto, può essere di grande aiuto per superare le principali difficoltà nel passaggio dalla scuola secondaria di secondo grado all'università. I risultati forniscono una risposta incoraggiante alla nostra domanda di ricerca: le attività online peer to peer possono essere una strategia efficace per la promozione del pensiero matematico negli studenti, sia a livello cognitivo che meta-cognitivo.

### **Riferimenti Bibliografici**

[1] SELDEN A., SELDEN J., Tertiary mathematics education research and its future. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level: An ICMI Study* (pp.207-220). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[2] DE GUZMAN M., HODGSON B.R., VILLANI V., Difficulties in the passage from Secondary to Tertiary Education. In *Proceedings of the ICM*, Berlin, vol. III (747-762), 1998.

[3] ARTIGUE M., What can we learn from research at the university level? In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at the university level: An ICMI study* (pp. 237-254). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.



- [4] SIERPINSKA A., On some aspects of students' thinking in linear algebra, In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209–246). Dordrecht: Kluwer, 2000.
- [5] MIUR (Italian Ministry of Education University and Research) (2012). National Indications for the curriculum of pre-school and first cycle of instruction. Roma: MIUR Retrieved from: <http://www.indicazioninazionali.it>
- [6] WEBER K., Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course, *J Math Behav.*, **23**, 115–133, 2004.
- [7] BLACK P., WILIAM D., Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, **21** (1), 5-31, 2009.
- [8] QUELLMALZ E.S., TIMMS M.J., BUCKLEY B.C., DANVENPORT J., LOVELAND M., SILBERGLITT M.D., 21st century dynamic assessment. In J. Clarke-Midura, M. Mayrath, & C. Dede (Eds.). *Technology-based assessments for 21st century skills: Theoretical and practical implications from modern research* (pp. 55-89). Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2012.
- [9] CUSI A., MORSELLI F., SABENA C., Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources, *ZDM Mathematics Education*, **49** (5), 755-767, 2017.
- [10] WILIAM D., THOMPSON M., Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.). *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (pp. 53–82). Mahwah, NJ: Erlbaum, 2007.
- [11] HATTIE J., TIMPERLEY H., The Power of Feedback. *Review of Educational Research* **77** (1), 81–112, 2007.
- [12] ALBANO G., PIERRI A., Mathematical competencies in a role-play activity. In C. Nicol, P. Liljedhal, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.). *Proc. of PME38* (Vol. 2, pp. 17-24). Vancouver, Canada, 2014.

[13] PIERRI A., Dal prodotto al processo: Un approccio blended per sviluppare competenze matematiche. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol.42 A-B n.3 (Numero Speciale AIRDM), 2019.

[14] ALDON G., SABENA C., Formative assessment in the FaSMEd project: reflections from classroom experiences. In C. Sabena, B. Di Paola (eds.), *Teaching and learning mathematics: resources and obstacles*, Proceedings of CIEAEM 67, Quaderni di ricerca didattica, 25-2 (pp. 83-86). Aosta, Italy, 2015.

[http://math.unipa.it/~grim/CIEAEM%2067\\_Pproceedings\\_QRDM\\_Issue%2025\\_Suppl.2.pdf](http://math.unipa.it/~grim/CIEAEM%2067_Pproceedings_QRDM_Issue%2025_Suppl.2.pdf).

## **Cultura matematica e competenza statistica al tempo del COVID-19**

### **Mathematical culture and statistical competence during COVID-19 pandemics**

**Bruno Carbonaro<sup>1</sup>**

#### **Abstract**

The present short paper aims to show how in connection with the present COVID-19 pandemics the whole system of communications from institutions as well as from mass-media was superficial and misleading, insofar it has more or less deliberately ignored any scientific and statistical accuracy, so raising in most people a wrong perception of pandemics.

#### **Introduzione**

Ogni evento catastrofico produce *per definizione* effetti devastanti su un certo numero di individui, e questo numero caratterizza la portata dell'evento (individuale, cittadina, regionale, nazionale, ...). E, si noti, fra questi effetti non si annoverano soltanto quelli specifici dell'evento (perdita di vite umane, distruzione di risorse, sconvolgimenti territoriali, avvelenamento dell'aria o dell'acqua, etc.) ma anche quelli psicologici e comportamentali. A questi, raramente si presta la dovuta attenzione, in parte perché gli effetti specifici dominano l'attenzione degli individui coinvolti, ma soprattutto perché essi dominano quella di coloro che hanno la responsabilità di limitarli o, se

---

<sup>1</sup> [bruno.carbonaro@unicampania.it](mailto:bruno.carbonaro@unicampania.it), Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania “L. Vanvitelli”.

Comunicato da A. Russo

possibile, annullarli. Eppure, i danni psicologici e le alterazioni del comportamento non solo degli individui che hanno effettivamente subito l'evento, ma anche di quelli che temono di poter esserne colpiti in tempi successivi, sono spesso più gravi e di gran lunga più duraturi delle devastazioni fisiche e territoriali che l'evento ha prodotto.

Ovviamente, la recente diffusione del contagio da virus COVID-19 non fa eccezione a questa consuetudine. Anzi, i danni che essa ha prodotto nei comportamenti di governanti, esperti chiamati a descrivere in termini il più possibile obiettivi l'epidemia, strutture deputate alla gestione dell'emergenza ed organi di informazione si sono palesati immediatamente dopo il suo inizio, quando da un lato la paura che essa raggiungesse proporzioni tali da renderla incontrollabile, dall'altro il bisogno di esorcizzare tale paura, hanno percettibilmente represso (e, in qualche caso, francamente soppresso) la distaccata razionalità che sarebbe stata necessaria a produrre nei singoli individui reazioni psicologiche sane.

I danni peggiori prodotti dalla paura riguardano la comunicazione. E sono questi che vogliamo qui brevemente discutere, soprattutto in relazione alla deplorabile carenza di cultura matematica e all'ancor più deplorabile quasi totale ignoranza del significato e dei metodi della statistica che affliggono la società italiana, a cominciare dagli organi d'informazione, che --- in vista del loro compito comunicativo --- avrebbero il dovere di possedere un minimo di competenza statistica e di rigore matematico, per garantire esattezza e *trasparenza* alla comunicazione. Si deve infatti sottolineare che --- come fu detto anni fa in una seduta di laurea --- *la matematica è, tra l'altro, comunicazione*. L'ansia di formulare in termini accurati e non ambigui le proposizioni matematiche, quella di dichiarare esplicitamente quali fra esse vadano considerate arbitrarie, e soggette alla stipulazione di accordi preventivi per essere ritenute *pubblicamente* vere, e quella di *dimostrare* con la massima chiarezza e precisione tutte le altre, derivano chiaramente da una necessità di condivisione, di convincere eventuali scettici od oppositori. E naturalmente, si persegue una convinzione che non dipenda da umori momentanei o dalla simpatia reciproca degli interlocutori, ma sia tutta intellettuale e non revocabile in dubbio se non dalla scoperta di un errore o dal rifiuto delle premesse.

Così, le buone abitudini comunicative derivanti da una sana, anche se non approfondita, cultura matematica andrebbero il più possibile diffuse tra coloro

che si assumono la responsabilità di informare i membri di una collettività non soltanto dei fatti ma anche delle loro possibili interpretazioni. Ma queste risultano sistematicamente latitanti (per ovvie ragioni) dalle consuetudini professionali di quasi tutti i giornalisti; e, come vedremo, la loro latitanza è apparsa particolarmente evidente nell'emergenza che stiamo vivendo.

A questo si aggiunge che, allorché i fatti coinvolgono intere collettività, ed è necessario darne un'interpretazione complessiva, l'unica forma di "conoscenza" (intesa come capacità di valutazione dei loro possibili sviluppi e delle loro conseguenze) che possiamo derivarne è di tipo statistico, ed è quindi indispensabile che tutti coloro che vogliono produrre e diffondere questo tipo di conoscenza si dotino delle necessarie competenze per maneggiare in modo corretto e non fuorviante i metodi statistici. E su questo punto, le manchevolezze non soltanto degli organi di informazione, ma anche degli organi che dovrebbero possedere strumenti e abilità specifiche per gestire le emergenze, hanno raggiunto livelli vergognosi.

Questi due aspetti e le loro conseguenze richiedono perciò un'accurata, per quanto breve, discussione, almeno per tentare di evitare il loro riprodursi nella malaugurata ipotesi che emergenze analoghe ci colpiscano in futuro.

## **Comunicazione pseudo-scientifica**

Riferendoci alla differenza tra le informazioni che si rivolgono all'intelletto e quelle che invece, pur senza averne esplicitamente o consapevolmente lo scopo, hanno soprattutto il risultato di suscitare reazioni umorali o istintive, dobbiamo in primo luogo descrivere e discutere le informazioni e i commenti, spesso in folla e in competizione, proposti da quasi tutte le testate giornalistiche e da quasi tutti i *talk-show* e i cosiddetti *programmi di approfondimento* diffusamente e instancabilmente trasmessi dalle reti pubbliche e private italiane, da parte di persone considerate in possesso di competenze specifiche sui problemi epidemiologici e sanitari (medici, biologi, virologi, epidemiologi, infettivologi e, occasionalmente, qualche psicologo), e quindi particolarmente accreditate a valutare le caratteristiche del COVID-19 e la pericolosità e la possibile evoluzione dell'epidemia, e a suggerire i comportamenti più opportuni ad affrontarla. Gli interventi di questi esperti, a causa della mancanza di informazioni complete e definitive sul virus in questione, non potevano essere che --- in massima parte --- opinioni, certamente motivate dalla loro esperienza, ma che si sarebbero dovute

argomentare, e soprattutto si sarebbero dovute presentare come tali. E sarebbe irrealistico, oltre che offensivo, supporre che gli intervistati lo ignorassero. Ma le argomentazioni, essendo fondate su processi induttivi, sarebbero state necessariamente di tipo probabilistico, e anche piuttosto complicate per spettatori del tutto privi di preparazione scientifica: e il pubblico non soltanto ha bisogno di certezze, ma per formarsi opinioni sufficientemente salde ha bisogno di comunicazioni chiare e dirette. È pressoché impossibile convincerlo che la frase più scientifica che uno scienziato possa pronunciare (o scrivere) è “Non lo so”, che la caratteristica della scienza non sta nella capacità di spiegare tutto ma nella consapevolezza che c’è sempre qualcos’altro da spiegare, e che quelli che sanno tutto non si chiamano scienziati, ma *mistici*, o *profeti*, o magari *Unti del Signore*, il che rende particolarmente complicato formarsi opinioni non puramente viscerali allorché due di costoro si contraddicono a vicenda. Così, la comunicazione pubblica si è imperniata su sentenze tanto falsamente certe quanto improntate a una sana prudenza che però l’apparente certezza trasformava in ineludibile minaccia. Si sono perciò dovute subire enunciazioni del tipo “Il picco del contagio deve ancora venire” (ma naturalmente il picco di una funzione si riconosce dal suo comportamento *da entrambi i lati*, e quindi --- nel caso di funzioni del tempo --- soltanto *a posteriori*, non *a priori*), oppure “Ci sarà certamente una seconda ondata in autunno” (su quali basi di dati?), fino a giungere, proprio nei primi tempi della pandemia, all’infelice uscita di un cosiddetto psicologo, il cui nome taccio per carità di patria: “Niente sarà mai più come prima” (puntualmente, e fortunatamente, contraddetta dai fatti). Per non parlare delle bufale sulle mutazioni “a tempo di record” del virus, secondo alcuni verso forme più aggressive secondo altri meno. Eppure, a quanto sembra, il virus della poliomielite, identificato nel 1908, ma attivo probabilmente da secoli, è stato stabile per almeno un secolo, rendendo possibile la realizzazione di un vaccino nel 1950, quarantadue anni dopo; e il virus del morbillo (che, tra l’altro, a quanto riportato nella letteratura, può a sua volta condurre alla polmonite interstiziale, ed è mortale nello 0.2% dei casi, ma giunge al 10% tra soggetti malnutriti o immunodepressi, e si stima aver causato la morte di sette-otto milioni di bambini ogni anno, prima della realizzazione del vaccino) sembra essere stato stabile per millenni, così da consentire la realizzazione di un vaccino tra la fine degli anni Cinquanta e l’inizio degli anni Sessanta del secolo XX.

I dati qui sopra riportati sono ricavati da articoli specialistici pubblicati online, e non vuol esserci in quanto si è detto alcuna implicazione sulla

valutazione dell'attuale pandemia. Si mirava soltanto a sottolineare quanto possa essere fuorviante, e perciò pericolosa, almeno a livello psicologico, una comunicazione che non sia *leale*, ossia basata sull'onesta dichiarazione del carattere ipotetico delle premesse, come accade in qualunque esposizione delle teorie matematiche. “Ma” obietterà il solito conduttore televisivo o giornalista di turno “non c’è *uomo qualsiasi* che capisca il carattere ipotetico di un ragionamento!” Vero. Ma allora --- a meno che non perseguiamo consapevolmente e deliberatamente lo scopo di suscitare reazioni viscerali ben precise --- stiamo zitti. Oppure ... quando insegneremo meglio la logica e la matematica nelle scuole elementari?

### **Deliberata ignoranza del metodo statistico**

Se le previsioni e le valutazioni di una congiuntura di eventi richiedono una comunicazione “leale”, la richiedono anche la pura e semplice informazione sugli sviluppi di questi eventi e la loro descrizione. Ma, oltre a questa “lealtà”, laddove le informazioni riguardino collettività, e perciò debbano essere espresse in linguaggio statistico, si richiede anche una notevole competenza. Il linguaggio statistico, infatti, consente di sintetizzare i contenuti di innumerevoli esperienze in molti modi, che li esprimono come proprietà della collettività di individui che tali esperienze riguardano (Questo stesso testo dimostra che spesso lo sforzo di evitare un linguaggio tecnico rende l'esposizione ancor più faticosa e incomprensibile. Noi speriamo che non lo sia troppo. In ogni caso, chi non dovesse avere alcuna familiarità con la Statistica può trarre grande profitto dalla consultazione di un qualsiasi testo universitario introduttivo all'argomento, come ad esempio [1,3]). Ma la stessa pluralità dei modi impone che ciascuno vada scelto attentamente in vista delle domande alle quali si desidera rispondere, avendo cura di formularle accuratamente per non confondere metodi adatti a problematiche differenti. E lo stesso modo di raccogliere e riferire i risultati delle esperienze dev'essere scelto con cura e rigore, altrimenti anziché informare rischia soltanto di confondere le idee e suscitare aspettative ingannevoli. E a tal proposito, il modo in cui i risultati degli esami clinici (i famigerati “tamponi”), la frequenza dei casi di particolare gravità, e quella dei decessi causati dal COVID-19, sono stati diffusi da persone che pure dovrebbero essere competenti in materia (la Protezione Civile e Istituto Superiore di Sanità) è stato a dir poco lacrimevole per superficialità e sciatteria. Era legittimo attendersi che le domande più importanti che ciascun cittadino si rivolgeva costantemente durante il periodo più intenso del contagio fossero tre: 1) che probabilità ho di ammalarmi? 2) se

dovessi ammalarmi, che probabilità avrei di morire? 3) quanto è probabile che la malattia duri a lungo, con periodi di contagio intenso alternati a periodi di apparente scomparsa? Ebbene, a *nessuna* di queste tre domande è stata data una risposta scientificamente fondata. Ci si è limitati a uno sterile elenco di numeri quotidiani, in generale il “numero dei nuovi contagiati del giorno” e il “numero dei deceduti del giorno” (solo raramente anche il “numero dei nuovi ricoverati giornalieri in terapia intensiva”). Si è proceduto col metodo dei “bollettini quotidiani di guerra”, che ci si ostina a diramare ancora oggi, senza curarsi delle gravi conseguenze psicologiche (e, in seconda battuta, anche pratiche) che una tale procedura può causare.

Consideriamo in effetti la prima domanda. Accettata per evitare sterili polemiche linguistiche la solita obiezione (secondo me offensiva e molto spesso fasulla) secondo la quale pochissima gente sa ragionare in termini di probabilità, tuttavia si dovrebbe ammettere che tutti si siano chiesti quanto era “forte” il rischio di ammalarsi. Ora, un minimo di competenza statistica avrebbe richiesto di considerare l'insieme dei tamponi di ciascun giorno come un “campione” estratto dalla popolazione italiana, nell'impossibilità di esaminare tutti i cittadini, e di decidere quale informazione se ne voleva trarre. Ora, nel generico giorno  $h$  si eseguono  $T_h$  tamponi, e di questi  $\pi_h$  sono positivi. Il *rapporto*

$$p_h = \frac{\pi_h}{T_h}$$

dà una misura del rischio di aver preso il COVID-19 se si presentano certi sintomi, e anche del rischio che --- incontrando qualcuno con quei sintomi --- ne veniamo contagiati. Inoltre, se nel giorno  $h + 1$  si eseguono  $T_{h+1}$  tamponi, e di questi  $\pi_{h+1}$  sono positivi, la misura del rischio risulta corretta e precisata, perché è data dal nuovo rapporto

$$p_{h+1} = \frac{\pi_h + \pi_{h+1}}{T_h + T_{h+1}}$$

Che è più “vero” del precedente, perché calcolato su un campione più grande di entrambi i campioni giornalieri.

Ma --- si dice --- è troppo difficile spiegare tutto questo all'ascoltatore (spettatore, lettore) medio. Ma allora è meglio rovesciargli in testa secchiate di numeri aridi e che non trasmettono proprio nulla, se non la generica sensazione che ci siano “tanti” casi di COVID-19? Non vogliamo pensare che sia *intenzionalmente* questo l'unico messaggio che si vuole passare.



E poi, anche elaborati così, i dati sarebbero gravemente incompleti e fuorvianti. In effetti, in primo luogo i campioni giornalieri *non sono casuali*, perché i tamponi non sono mai fatti a caso, ma sempre sotto la spinta di una sintomatologia sufficientemente severa. Così, non possiamo inferire la percentuale di italiani colpiti dal COVID-19, ma solo l'incidenza relativa del COVID-19 sugli italiani con serie insufficienze respiratorie. E d'altra parte, sembra sufficientemente assodato (si veda in proposito un'intervista a Ilaria Capua proprio nei primi giorni del lockdown) che molti individui colpiti dal COVID-19 *sono del tutto asintomatici* oppure *presentano sintomi lievi* (paragonabili, per intenderci, a quelli delle comuni malattie respiratorie stagionali). Perciò, da un lato possiamo aspettarci che la percentuale di contagi sia parecchio più alta di quella che si ottiene dal calcolo precedente, dall'altro per quantificarla con una certa affidabilità avremmo dovuto eseguire un numero di tamponi tre volte maggiore di quelli eseguiti di fatto. Perciò, se denotiamo col simbolo  $p_h^*$  la “vera” percentuale di contagiati all' $h$ -esimo giorno, possiamo supporre che si abbia  $p_h^* \gg p_h$ . Questa è *apparentemente* una cattiva notizia, e come tale è stata vissuta dalla stragrande maggioranza degli ascoltatori (spettatori, lettori), specie perché i contagiati sfuggiti ai tamponi sono stati identificati tra gli anziani morti nelle case di riposo e di cura. Ma, come vedremo tra poco, in relazione alla seconda domanda, è in realtà un'*ottima* notizia, e a questo punto serve solo a sottolineare che --- per avere informazioni statisticamente affidabili sulla reale contagiosità del virus --- sarebbe stato necessario formare campioni *molto più ampi e casuali*, consentendo la ripetizione casuale dei test sui soggetti negativi. Ogni dato propinato all'opinione pubblica *in mancanza* di questi accorgimenti tecnici è *una truffa!*

E veniamo alla seconda domanda, che riguarda la *letalità* del virus. In tutto questo periodo, ci si è costantemente preoccupati (e ci si preoccupa tuttora) di abbinare alla pignola enunciazione del numero giornaliero  $\pi_h$  di nuovi contagiati quella, altrettanto pignola, del numero giornaliero  $d_h$  di morti, facendo in tal modo una scelta comunicativa ineguagliabilmente stupida e cattiva. Si è surrettiziamente guidato l'immaginario collettivo, inducendo l'opinione pubblica a ritenere (almeno inconsciamente) che  $d_h$  dovesse essere una frazione di  $\pi_h$ , ossia che l'andamento del numero di decessi fosse una funzione del numero di nuovi contagi, quasi che, dei  $\pi_h$  nuovi malati,  $d_h$  fossero stati fulminati subito dal virus. Non è possibile immaginare nulla di scientificamente più scorretto e psicologicamente più devastante.

A una mente logica, di quoziente intellettivo medio, che abbia conservato un minimo di distacco, e non sia viziata dal desiderio di *épater les bourgeois*, dovrebbe apparire ovvio che il numero  $d_h$  di morti è necessariamente fluttuante e casuale, e non può dipendere in alcun modo da quello dei nuovi contagiati. Il fatto che  $\frac{d_{h+1}}{\pi_{h+1}}$  sia maggiore di  $\frac{d_h}{\pi_h}$  non [spaventoso, e per converso il fatto che  $\frac{d_{h+1}}{\pi_{h+1}}$  sia *minore* di  $\frac{d_h}{\pi_h}$  non [in alcun modo rassicurante! Dovrebbe essere evidente, infatti, che --- se oggi abbiamo 10 ammalati in condizioni tanto gravi da lasciar prevedere un esito infausto nonostante le cure --- 3 fra essi potrebbero morire tra quattro giorni, 1 domani, 1 fra una settimana, 2 fra dieci giorni, 2 dopodomani e 1 tra un mese! Dipenderà dalla resistenza e dalle condizioni di salute di ciascuno. Questi morti cosa significheranno, nelle rispettive occorrenze? Che il virus dopodomani sarà più cattivo di domani e meno che tra quattro giorni ma più che tra un mese? Ma dove abbiamo lasciato il cervello?

E dev'essere soprattutto ben chiaro che il rapporto  $\frac{d_h}{\pi_h}$  *non dice proprio nulla sulla letalità del virus!* Questa letalità sarebbe stimata in modo più affidabile dal rapporto

$$\frac{D_h}{\Pi_h^*} = \frac{\sum_{i=0}^h d_i}{\sum_{i=0}^h \pi_i^*} \quad (1)$$

tra la somma  $D_h$  di tutti i morti sperimentalmente riconosciuti come causati dal virus da un certo giorno 0 fino ad oggi (giorno  $h$ ), e la somma  $\Pi_h^*$  di tutti i contagiati *effettivi* (fra i quali devono essere compresi anche quelli sfuggiti ai tamponi per essere asintomatici o avere sintomi "lievi"), a partire dallo stesso giorno fino ad oggi. Ora, come abbiamo visto, noi saremmo in grado di calcolare invece il rapporto

$$\frac{D_h}{\Pi_h} = \frac{\sum_{i=0}^h d_i}{\sum_{i=0}^h \pi_i} \quad (2)$$

dove la somma al denominatore del secondo membro fornisce il numero totale dei tamponi positivi dall'inizio dei test fino ad oggi. Perciò non possiamo ottenere una stima corretta. Tuttavia, dalla precedente osservazione secondo la quale  $\Pi_h^*$  \e verosimilmente molto maggiore di  $\Pi_h$  (diciamo almeno il triplo, ma forse il quadruplo), consegue che la percentuale di decessi fra i contagiati dovrebbe stimarsi a circa un terzo o un quarto di quella stimata dal

semplice rapporto (decessi/tamponi positivi), che è quella ingenuamente adottata dai nostri governanti e dai nostri mezzi di comunicazione. Ecco perché il rendersi conto che i tamponi effettivamente eseguiti “catturano” solo una parte dei cittadini colpiti dal COVID-19, la maggior parte dei quali è asintomatica o presenta solo sintomi lievi, non è una cattiva notizia, ma un'*ottima* notizia.

A tal proposito, un esempio serio dei rapporti che *si sarebbero dovuti* calcolare per ottenere una stima attendibile tanto della reale diffusione del contagio in Italia quanto dell'effettiva letalità del virus, e del *modo corretto* di calcolarli, è stato recentemente fornito da un team di ricercatori di diverse competenze (ma evidentemente accomunati da solidissima preparazione statistica e computazionale), in un lavoro molto tecnico, scritto e pubblicato con un tempismo davvero straordinario [2]. Gli autori, applicando in modo più preciso e rigoroso le considerazioni necessariamente semi-qualitative presentate qui, hanno da un lato raffrontato i numeri di contagiati e morti in Italia con quelli di un ampio campione di nazioni (al 30 marzo 2020), dall'altro hanno analizzato una “popolazione test”, isolata e suscettibile di controllo clinico completo, e perciò capace di fornire rapporti non alterati dall'insufficiente numero di campioni o dall'ingresso di individui infetti. Tale “popolazione prototipo” è quella della nave da crociera “Diamond princess”, considerata nel periodo di quarantena. Alla fine della quarantena, il 2 marzo 2020, risultava essere stato contagiato il 19.2% (712 persone) dell'*intera* popolazione degli occupanti la nave (3711 persone in tutto, fra passeggeri e membri dell'equipaggio). Il 46.5% (331 persone) dei contagiati risultò asintomatico, e del restante 53,5% (381 contagiati con sintomi) ebbero bisogno di terapia intensiva 37 persone (ossia il 9.7%) e 9 morirono. Il rapporto tra vittime e contagiati totali, noto in letteratura come IFR (*Infection Fatality Ratio*, corrispondente al nostro rapporto (1)), risulta dunque essere del 1.3%. Molto più basso del rapporto (2) che avremmo potuto calcolare coi nostri dati italiani, che sarebbe denotato in letteratura come CFR (*Case Fatality Ratio*), e che al 30 marzo risultava dell'11%.

Anche soltanto con una semplice proporzione, volendo assumere per ipotesi un IFR pari al 5.7% (molto più alto di quello della *Diamond princess* e di quelli di alcune nazioni, per tener conto di altre concause di morte, quali, anzianità, patologie pregresse, immunodepressione, malnutrizione, infezioni batteriche opportunistiche da batteri antibiotico-resistenti), possiamo supporre che il numero reale di casi di COVID-19 al 30 marzo 2020 fosse di circa

300000 individui. E molti di più (circa 1.2 milioni) se assumiamo un IFR pari a 1.3% (come nella *Diamond princess*).

Ma intanto, le notizie sono diffuse nella più completa (e forse deliberata) ignoranza di come si debbano interpretare in maniera statisticamente corretta i dati. Rai News, coi dovuti toni apocalittici, ci informa che, ad oggi, negli Stati Uniti si è giunti a 3,4 milioni di casi con 136000 morti, “dimenticando” di osservare che questo significa una mortalità del 4%, di gran lunga inferiore a quella delle malattie cardiovascolari; e ci viene anche detto che nel mondo si è giunti a contare 13,3 milioni di casi con oltre 578000 morti. A parte l'ambigua vaghezza di quell’ “oltre”, che comunque dovrebbe essere al disotto del migliaio, anche stavolta si “dimentica” di osservare che questo significa una letalità complessiva del virus ancora pari a circa il 4% (come in Brasile, del resto). In India, il tasso di mortalità è ancora più basso, del 2.6%. Questi valori sono in linea con quelli considerati nel lavoro sopra citato (i dati qui riportati sono del 15 luglio 2020, e perciò al lettore risulteranno dati diversi. Confidiamo tuttavia che le percentuali, seppur lievemente aumentate, non risulteranno percettibilmente diverse da queste).

Quanto alla terza domanda, che si presenta come la più importante per decidere quale sia il modo più saggio di gestire le fasi di ritorno a una vita sociale ed economica il più possibile normale, non possiamo dedicarvi ragionamenti così dettagliati. Dobbiamo solo riconoscere che ci mancano troppi dati, per formulare previsioni che possano ambire a una qualche plausibilità: (1) esistono livelli di contagio? (2) il virus immunizza, in parte, nel breve periodo, o sul lungo periodo? (3) Concluso il lockdown, quanti individui ancora capaci di contagiare a livello “percettibile” (che cioè renda necessari nuovi tamponi) saranno posti a contatto con individui sani e mai contagiati in precedenza? (4) E quanti individui suscettibili di *essere contagiati* con una sintomatologia preoccupante saranno rimasti? Chiunque formuli ipotesi o, peggio, enunci previsionsi con pretese di certezza prescindendo dalle risposte a queste domande, commette la più grave delle colpe nei confronti del metodo scientifico. E deprime il pensiero che il desiderio di esibire autorevolezza in pubblico possa spingere qualcuno a dimenticare il rigore metodologico e l'onestà intellettuale.

È tristemente notevole il fatto che soltanto in un telegiornale di un paio di settimane fa un medico, intervistato dalla solita giornalista ansiosa di sapere se vi sarà una cosiddetta “seconda ondata” di epidemia in autunno, abbia risposto “*non è possibile sapere ora se vi sarà*”.

In conclusione, le scelte comunicative dei media e delle fonti ufficiali d'informazione sono state (e restano purtroppo sinora) improntate alla più completa mancanza di cultura logica (e matematica) e a una totale assenza di competenza statistica. Se ciò sia dovuto a grave carenza di educazione scientifica (in particolare, matematica e statistica) nel nostro Paese o a una strategia mirante a perpetuare un'atmosfera di paura e la percezione del COVID-19 come di una vera e propria pestilenza, di una malattia paragonabile alla Spagnola, che sembra aver ucciso 50 milioni di persone negli anni 1918, 1919 e 1920, ossia 16.6 milioni di persone all'anno, ovvero ancora 5.6 milioni di persone ogni quattro mesi (questo immondo paragone è stato attribuito al virologo Fauci, speriamo che non si sia trattato di un'uscita da scienziato-showman, ansioso di “fare passerella”) (e la differenza dalle cifre riportate sopra balza agli occhi) resta materia di libera discussione. Ma --- ascoltando per caso le discussioni che di tanto in tanto si svolgono tra gli italiani in famiglia o per strada --- appare gravemente diffusa tra loro l'incapacità di affrontare la discussione con la competenza e lo spirito critico che sarebbero necessari a formarsi opinioni meditate.

## **Ringraziamenti**

Desidero esprimere la mia gratitudine al mio allievo e amico Marco Menale per i suoi consigli sulla forma finale di questa nota e il suo impegno per raggiungerla.

## **Riferimenti Bibliografici**

[1] CARBONARO B., VITALE F., *Fondamenti di Probabilità e Statistica*, CEA, Milano, 2010.

[2] DE NATALE G., et al., *The COVID-19 infection in Italy: a statistical study of an abnormally severe disease*, *Journal of Clinical Medicine* **9** (5), 3, 1564, 2020.

[3] MOOD A.M., GRAYBILL F.A., BOES D.C., *Introduzione alla Statistica*, McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 1991.



## ISTRUZIONI PER GLI AUTORI

Il *Periodico di Matematiche* pubblica articoli di Matematica e di Fisica che abbiano carattere scientifico, storico e didattico, previa valutazione di contenuti ed originalità. Ciascun lavoro presentato è giudicato da esperti anonimi che riferiscono al Direttore, cui compete il giudizio finale.

### Guida per gli autori

#### Formattazione del testo

- L'articolo deve essere in formato .doc. Può essere scritto in italiano o in inglese, su libera scelta degli autori, ad eccezione del sunto (abstract) da scrivere in sola lingua inglese.
- 
- Il testo deve essere redatto in Times New Roman, con dimensione del carattere di 11 pt, interlinea 1 e testo giustificato su ambo i lati.
- I margini di scrittura sono: 5,7 cm superiore; 6,2 cm inferiore; 4,5 cm destra e sinistra.
- Il titolo dell'articolo deve essere in grassetto, centrato e non completamente maiuscolo, con dimensione del carattere di 15 pt. Devono essere lasciati 36 pt di spazio prima di quest'ultimo. Qualora il titolo sia in italiano, va riportato anche in inglese.
- Il nome degli autori deve essere in grassetto e centrato, con dimensione del carattere di 12 pt. Devono essere lasciati 20 pt di spazio prima e 40 pt di spazio dopo.
- Gli autori devono inserire una nota a piè della prima pagina, fornendo gli indirizzi mail e le rispettive afferenze/occupazioni, con dimensione del carattere di 10 pt e rientro di 5mm.
- Il nome del sunto, Abstract, deve essere giustificato a sinistra, grassetto e con dimensione del carattere di 12 pt. Il testo dell'abstract non deve superare le 10 righe, con dimensione del carattere di 10 pt.
- I titoli dei paragrafi devono essere in grassetto e giustificati a sinistra, con dimensione del carattere di 14 pt. A conclusione di ogni paragrafo, gli autori devono lasciare uno spazio verticale di 11 pt.
- L'articolo non può superare le 12 pagine, salvo dirette autorizzazioni della Direzione e/o dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.
- A conclusione del testo e prima della bibliografia, gli autori possono inserire il paragrafo Ringraziamenti (con titolo in grassetto, giustificato a sinistra e con dimensione del carattere di 14 pt.). In suddetto paragrafo, gli autori possono inserire opportuni ringraziamenti a persone, progetti o funding, questi ultimi esplicitamente indicati.

#### Bibliografia

- Gli autori devono lasciare due spazi verticali di 11 pt a conclusione dell'ultimo paragrafo (i ringraziamenti, qualora siano inseriti) che precede la bibliografia, per la quale deve essere usata la seguente formattazione:

#### Riferimenti Bibliografici (12 pt)

[1] CARBONARO B., VITALE F., L'assiomatica di Kolmogorof e l'insegnamento della matematica nelle scuole superiori, *Periodico di Matematiche* **1** (serie XI), 3, 61-68, 2009. (11 pt)

[2] CARBONARO B., MENALE M., *Fondamenti di Meccanica*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2019. (11 pt)

- I riferimenti bibliografici devono essere in ordine di citazione.
- Tutti i riferimenti bibliografici devono essere numerati fra parentesi quadre ([1,2]) nel corpo del testo, seguendo la rispettiva numerazione.

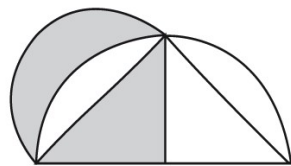
### **Copyright**

Gli autori possono corredare il corpo del testo con immagini in formato .jpeg .jpg con una risoluzione minima di 300 dpi. Ad ogni immagine va associata un'apposita didascalia. Per ogni immagine che non sia di autoproduzione va indicata la fonte, con un eventuale URL. Qualora l'immagine sia di proprietà degli autori sarebbe opportuno indicare il software con il quale la si è realizzata.

### **Invio dei lavori**

Gli articoli vanno inviati a mezzo posta elettronica al Direttore e a ciascuno dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.





## **Mathesis**

### **Presidente**

**Elisabetta Lorenzetti**

È presidente dal 18 febbraio 2019, ventitreesima dal 1895, anno della fondazione.

[presidente@mathesisnazionale.it](mailto:presidente@mathesisnazionale.it)

### **Consiglio Nazionale**

Francesco de Giovanni *vice presidente*, Massimo Fioroni *segretario*, Roberto Franzina *tesoriere*, Angela Balestra, Tiziana Bindo, Antonietta Carbone, Atalia Del Bene, Marcello Pedone, Alessio Russo, Annalisa Santini.

### **Sezioni**

Abruzzo – Avellino – Bari – Bergamo – Brescia – Caserta – Castellamare di Stabia – Catania – Crotone – Ferrara – Firenze – Foggia – Grottaglie – Lanciano Ortona – Latina – Lecce – Mantova – Messina – Milano – Mondragone – Napoli – Napoli Flegrea – Olbia – Pavia – Roma – Rovigo – Salerno – Serra San Bruno – Spoleto – Terni – Udine – Varese – Venezia – Verona – Vicenza.

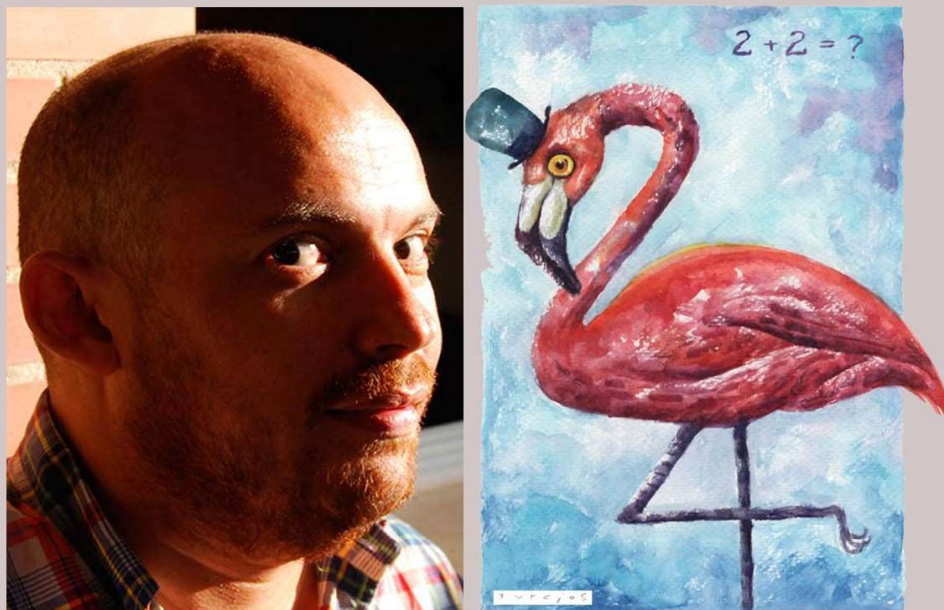
### **Rivista**

***Periodico di Matematiche***

Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 “di Matematiche”. La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell’Editore Zanichelli.

### **Sito web**

[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it)



L'illustrazione in copertina è dell'artista colombiano **Omar Figueroa Turcios**, che vive e lavora in Spagna. Omar Turcios ha ricevuto numerosi premi e riconoscimenti internazionali, tra cui il premio “Luigi Mari 2019” alla XXX Biennale dell'Umore di Tolentino per il suo ritratto di Frida Kahlo. Ha già collaborato con matematici italiani, realizzando in particolare i loghi originali dell'associazione “AGTA – Advances in Group Theory and Applications” e del convegno internazionale “Ordered Statistical Data 2020”.

## MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

c/o Accademia dei Concordi  
Piazza Vittorio Emanuele 14 - 45100 Rovigo  
[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it) • [info@mathesisnazionale.it](mailto:info@mathesisnazionale.it)