Periodico di Matematiche **12** (2020), pp. 107-122

Il Fascino Discreto della Teoria dei Gruppi

La Classificazione dei Gruppi Semplici Finiti

The Discreet Charm of Group Theory

The Classification of Finite Simple Groups

Francesco de Giovanni – Marco Trombetti [1]

Nel 1983, il matematico americano Daniel Gorenstein annunciava il completamento del progetto di classificazione dei gruppi semplici finiti. Tale classificazione, che costituisce un risultato estremamente importante per la matematica, ha attirato persino l'attenzione dei media (non specializzati) e ancora colpisce chi matematico non è per le sue eccezionali caratteristiche: l'incredibile numero di pagine richieste per la sua dimostrazione (oltre 15.000, contro le circa 200 necessarie alla prova dell'*Ultimo Teorema di Fermat* ottenuta da Andrew Wiles nel 1994) l'elevato numero di matematici coinvolti nella dimostrazione stessa (oltre 100), l'ordine del cosiddetto *gruppo Mostro* (poco meno di 10^{54}, e precisamente 808.017.424.794.512.875.886.459.904.96 1.710.757.005.754.368.000.000.000).

È possibile raccontare in poche pagine cosa sono i gruppi semplici e perché la loro classificazione è così complicata ed importante? Toccherà al lettore giudicare se ne siamo stati in grado o meno.

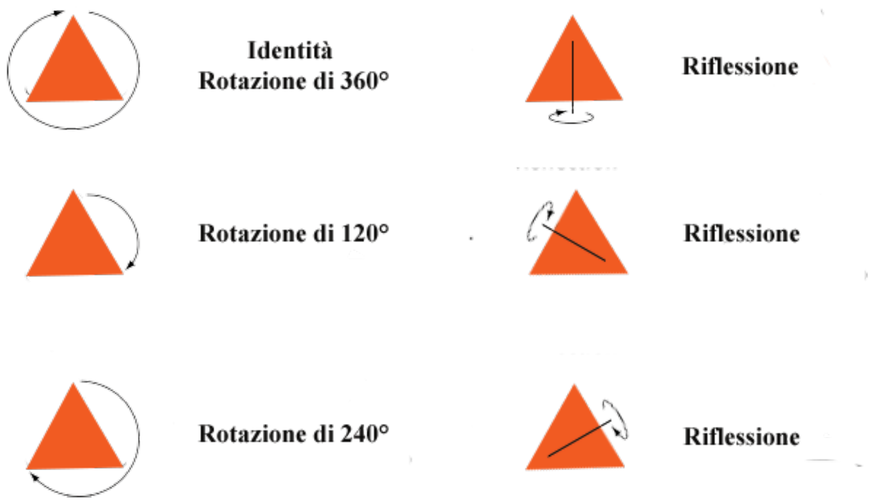
[1] Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Napoli Federico II, Complesso Universitario Monte Sant'Angelo, Via Cintia, Napoli (Italia). E-mail: degiovan@unina.it; marco.trombetti@unina.it

Comunicato da A. Russo

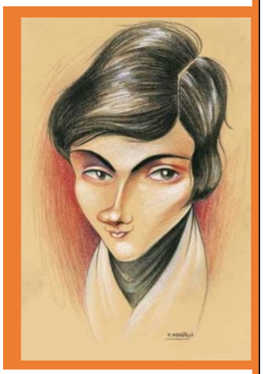
Nel 1915, Emmy Noether provò che simmetrie delle leggi fisiche e leggi di conservazione sono intimamente collegate: l'invarianza rispetto a traslazione spaziale corrisponde alla conservazione della quantità totale di moto, l'invarianza rispetto a traslazione temporale corrisponde alla conservazione dell'energia totale, l'invarianza per rotazione spaziale corrisponde alla conservazione del momento angolare e così via.

Ma cos'è una *simmetria* per i matematici?
Nella sua forma più elementare, una simmetria è una funzione che lascia globalmente inalterato un ente matematico. Ad esempio, se consideriamo il triangolo equilatero

una sua simmetria è una *isometria*, cioè una funzione biettiva del triangolo in sé che conservi le distanze. Ci si accorge subito che le uniche simmetrie del triangolo in questione sono le 6 funzioni che si ottengono come rotazioni e come ribaltamenti rispetto alle altezze.



Chiaramente, la funzione che si ottiene applicando di seguito due simmetrie è ancora una simmetria (ad esempio, nel caso del triangolo equilatero, la composta di una riflessione e di una rotazione è ancora una riflessione); inoltre la funzione inversa di una qualunque simmetria è una simmetria (nel caso del triangolo equilatero, componendo una qualunque riflessione con sé stessa oppure una rotazione non identica con l'altra, il risultato è sempre la simmetria identica). Possiamo quindi concludere che l'insieme delle simmetrie di un ente matematico (ad esempio il triangolo equilatero) è un *gruppo* rispetto alla composizione, cioè un insieme munito di una operazione interna che sia associativa, che ammetta identità e rispetto alla quale tutti gli elementi siano invertibili. Strutture di questo tipo erano state implicitamente considerate già dall'italiano Joseph-Louis Lagrange, ma il primo ad utilizzare il termine "gruppo" è stato **Èvariste Galois**.



Èvariste Galois (Bourg-la-Reine, 25 ottobre 1811 – Parigi, 31 maggio 1832) è stato un matematico francese. Anticonformista e ribelle, fu il primo a realizzare il ruolo cruciale delle simmetrie nell'ambito dell'algebra, caratterizzando in particolare la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche mediante il comportamento del gruppo delle permutazioni delle radici. Per la profondità e il carattere innovativo delle sue idee, non fu compreso dai contemporanei e solo nel 1870, grazie agli sforzi di Camille Jordan, si iniziò a intravedere l'incredibile rilevanza della sua opera per la matematica intera.

Il suo animo tormentato e il suo atteggiamento rivoluzionario lo condussero a una precoce morte in duello a soli 20 anni, la notte prima del quale concluse una approssimativa stesura delle sue idee.

Quasi sempre l'operazione in un gruppo si denota moltiplicativamente. In questo modo, ad esempio, se x è la rotazione di 120° del triangolo equilatero e y è la riflessione rispetto alla sua base, il prodotto xy è la riflessione rispetto al lato ovest. Si tenga inoltre presente che i gruppi sono usualmente studiati a meno di possibili "identificazioni" (a questo proposito, il lettore può trovare più avanti la definizione precisa di *isomorfismo* tra gruppi).

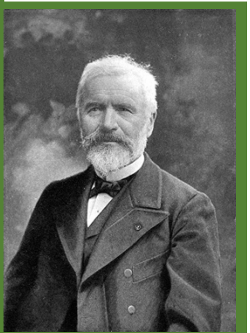
Come si può facilmente intuire, il gruppo delle simmetrie del triangolo equilatero (da ora in poi denotato con il simbolo S_3) ha una struttura molto elementare, ma in generale la descrizione di un gruppo può risultare estremamente complicata. Per procedere all'analisi di oggetti matematici tanto complessi si cerca in genere di ridurne la complessità guardando ad enti dello stesso tipo, ma "più piccoli", e che siano in grado di fornire un quadro abbastanza completo della struttura originaria. Nel caso dei gruppi questi strumenti sono i *sottogruppi normali* e i relativi *gruppi quoziente*.

Un **sottogruppo** di un gruppo G è una collezione H di suoi elementi che contenga tutti i risultati dell'operazione di G applicata ai suoi oggetti e che risulti a sua volta un gruppo rispetto all'*operazione indotta*.

Chiaramente ogni gruppo è sottogruppo di sé stesso e contiene tra i suoi sottogruppi quello costituito dalla sola identità (questi sono i cosiddetti *sottogruppi banali*). Eccetto che in casi molto elementari, ogni gruppo possiede sottogruppi non banali. Ad esempio, nel caso del gruppo S_3, l'insieme delle rotazioni è un sottogruppo, costituito da 3 oggetti, e similmente è un sottogruppo ciascuno degli insiemi costituiti dall'identità e da una singola riflessione. Si verifica che questi sono gli unici sottogruppi non banali di S_3.

Non è un caso che in S_3 manchino sottogruppi di ordine 4 e di ordine 5, perché in un qualunque gruppo finito *l'ordine di un sottogruppo divide l'ordine del gruppo*. Questo risultato è generalmente attribuito a Lagrange, il quale nel 1771 ne dimostrò un caso particolare; dopo altri contributi parziali di Gauss (1801) e di Cauchy (1844), il risultato ci è pervenuto nella sua forma attuale grazie a **Camille Jordan** (1861).

Camille Jordan (Lione, 5 gennaio 1838 – Parigi, 22 gennaio 1922) è stato un famoso matematico francese. Affascinato dalla lettura dell'opera di Galois, ripubblicata da Joseph Liouville nel 1846, iniziò quello che è passato alla storia come il primo studio sistematico della teoria dei gruppi. I suoi risultati in questo ambito sono stati pubblicati nel *Traitré des substitutions et des équations algébriques* (1870). A Jordan è dovuto il fondamentale concetto di *serie di composizione* di un gruppo, a partire dal quale lo studio della teoria dei gruppi finiti può oggi essere ricondotto a quello dei gruppi semplici.



Passiamo ora a definire i sottogruppi normali. La normalità per un sottogruppo di un gruppo arbitrario è una proprietà rara e di grande rilievo, già evidenziata da Galois, come risulta da una sua lettera indirizzata ad Auguste Chevalier e datata 24 ottobre 1832.

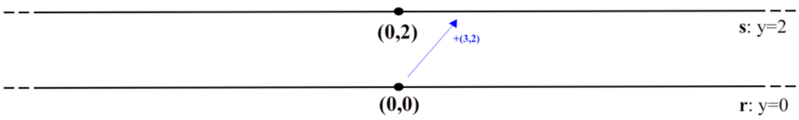
> "En *d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H, le groupe G peut se partager en groupes, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution; en sorte que*
>
> $$G = H + HS + HS' + \cdots$$
>
> *Et aussi il peur se décomposer en groupes qui ont tous les mèmes substitutions, en sorte que*
>
> $$G = H + TH + T'H + \cdots$$
>
> *Ces deux genres de décompositions ne coincident pas ordinairement. Quand ils coincident, la décomposition est dite* ***propre****.*"

Cerchiamo ora di chiarire il senso di quello che scriveva Galois. Se H è un sottogruppo di un gruppo G, per ogni elemento x di G si possono considerare gli insiemi

$$Hx = \{hx : h \in H\} \quad \text{e} \quad xH = \{xh : h \in H\}$$

che si ottengono *traslando* a destra o a sinistra tutti gli elementi di H con *ampiezza* x; tali insiemi, che ovviamente contengono il *rappresentante* x, sono oggi denominati rispettivamente *laterale destro* e *laterale sinistro* di H. L'insieme di tutti i laterali sinistri di H, così come quello di tutti i suoi laterali destri, è una *partizione* di G, cioè *decompone* il gruppo nell'unione di sottoinsiemi non vuoti e a due a due disgiunti.

Per comprendere l'intuizione alla base di queste nozioni si pensi al gruppo additivo $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ delle coppie di numeri reali (munito della somma puntuale), il cui *sostegno* (cioè l'insieme in cui è definita l'operazione) si può facilmente identificare con l'insieme dei punti di un piano cartesiano; ci si rende subito conto che ogni retta r passante per l'origine è un sottogruppo, i cui laterali (sinistri o destri) sono esattamente tutte le rette parallele ad r (che ovviamente costituiscono una partizione del piano).



r={(x,0) : x è un numero reale} = **r** + (0,0) = **r** + (-5,0)
è un sottogruppo del piano

s={(x,2) : x è un numero reale}= **r** + (3,2) = **r** + (0,2)
non è un sottogruppo del piano

I sottogruppi che, nella terminologia di Galois, determinano una *decomposizione propria* del gruppo sono quelli per i quali i laterali sinistri e destri determinano la stessa partizione, e sono oggi noti come *sottogruppi normali*. Pertanto, un sottogruppo H di un gruppo G è normale se e solo se $Hx = xH$ per ogni $x \in G$. Si osservi che in un *gruppo abeliano* (cioè un gruppo in cui vale l'identità $xy = yx$) tutti i sottogruppi sono normali. Questo è quello che avviene nell'esempio del piano appena considerato. Diversa è la situazione nel caso del gruppo S_3, dove l'unico sottogruppo normale non *banale* (cioè diverso dall'intero gruppo e dal sottogruppo formato dalla sola identità) è quello costituito dalle rotazioni.

Se H è un sottogruppo normale di un gruppo G, è facile accorgersi che l'operazione in G induce sull'insieme G/H, costituito dai laterali di H, una nuova operazione mediante la posizione:

$$Hx \cdot Hy = H(xy).$$

In questo modo G/H diventa anch'esso un gruppo, detto *gruppo quoziente* di G rispetto ad H. Chiaramente, l'operazione di "passaggio al quoziente" identifica tutti gli oggetti che si trovano in uno stesso laterale. Si pensi ad esempio al caso già citato del gruppo additivo $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, in cui, nel passaggio al quoziente rispetto alla retta r, vengono identificati tutti i punti che si trovano su una stessa retta parallela ad r, ottenendo così una struttura identificabile con la retta perpendicolare ad r nell'origine. In qualche senso, lo studio del piano è stato ridotto a quello di due rette ortogonali tra di loro.

È opportuno osservare qui che il già citato teorema di Lagrange assicura altresì che l'ordine di un qualunque quoziente di un gruppo finito G è divisore dell'ordine di G.

In generale, quando si ha un sottogruppo normale H di un gruppo G, è possibile recuperare informazioni sulla struttura di G a partire da quella più facile del sottogruppo H e del gruppo quoziente G/H. In qualche senso, G è ottenuto come *estensione* del gruppo H mediante il gruppo G/H; la *teoria delle estensioni*, introdotta dai matematici Otto Schreier e Otto Hölder, è un importante capitolo della teoria dei gruppi che permette il riconoscimento di una estensione a partire dalle sue "componenti". Ad ogni modo, tale teoria non è utilizzabile qualora il gruppo in esame sia privo di sottogruppi normali non banali.

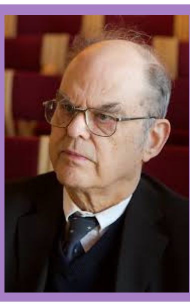
Un gruppo, non costituito dalla sola identità, si dice **semplice** se i suoi unici sottogruppi normali sono quelli banali.

Esempi ovvi di gruppi semplici sono tutti i gruppi finiti di ordine primo in quanto, per il citato teorema di Lagrange, essi sono addirittura privi di sottogruppi non banali. Gruppi di questo tipo hanno una struttura molto elementare: sono costituiti dalle potenze di un singolo elemento ed in particolare sono abeliani. Si noti che tutti i sottogruppi non banali di S_3 sono in questa situazione e S_3 è estensione di un gruppo di ordine 3 mediante un gruppo di ordine 2, cioè si ottiene "componendo" due gruppi semplici. Questo non è un caso: non è troppo difficile provare che ogni gruppo finito può essere costruito mediante composizione iterata di gruppi semplici. Più precisamente, si dimostra che se G è un gruppo finito, esiste una sequenza di sottogruppi

$$\{1\} = X_0 < X_1 < \cdots < X_k = G$$

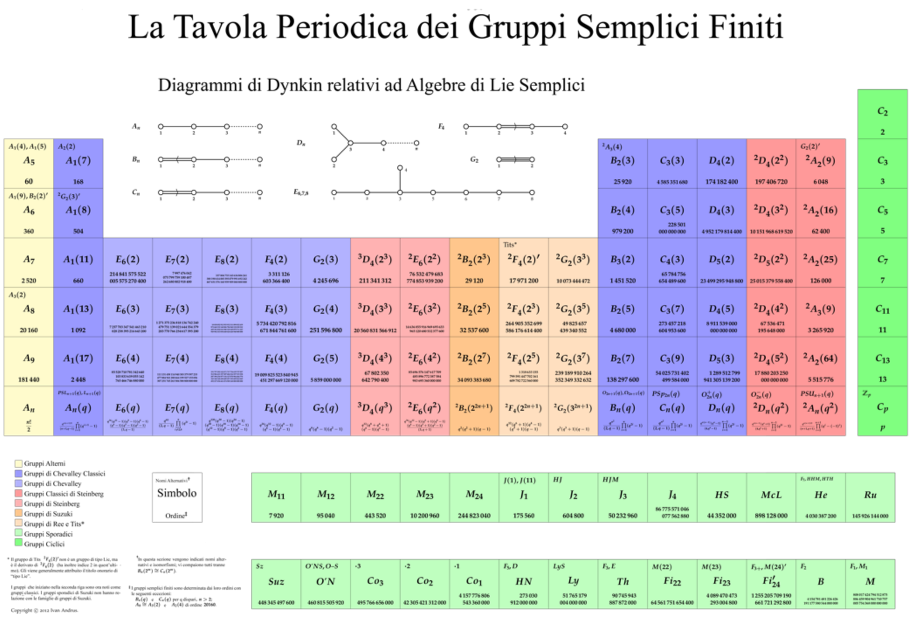
tale che, per ogni $i = 0,1,\dots,k-1$, il sottogruppo X_i è normale in X_{i+1} e il gruppo quoziente X_{i+1}/X_i è semplice. Una sequenza di questo genere prende il nome di *serie di composizione* del gruppo G. In generale, un gruppo finito può ammettere serie di composizione distinte, ma Jordan provò, intorno al 1869, che gli ordini dei gruppi quoziente che intervengono in queste serie sono degli *invarianti* del gruppo, cioè non dipendono dalla scelta della serie di composizione. Questo risultato è stato migliorato nel 1889 da Hölder, il quale dimostrò che addirittura i gruppi semplici che compaiono come gruppi quoziente di una serie di composizione di un gruppo finito sono degli invarianti, e tale è anche la loro molteplicità.

Arrivati a questo punto, dovrebbe apparire chiaro perché la determinazione di tutti i gruppi semplici finiti, unitamente ad un'adeguata teoria delle estensioni, permetterebbe, in linea di principio, la costruzione di tutti i gruppi finiti. Si osservi inoltre che la sola teoria delle estensioni consentirebbe di realizzare tutti i gruppi finiti di ordine dispari. Infatti, un famoso teorema di Walter Feit e **John Thompson** assicura che ogni gruppo semplice di ordine dispari ha ordine primo e quindi ogni gruppo finito di ordine dispari può essere ottenuto "componendo" gruppi semplici di questo tipo, che abbiamo già menzionato avere una struttura del tutto elementare.



John Thompson (nato il 13 ottobre 1932) è un famoso matematico statunitense, la cui notorietà è legata alla dimostrazione, in collaborazione con Walter Feit, di una importante congettura dovuta a William Burnside. Quest'ultimo aveva provato che non esistono gruppi semplici finiti il cui ordine è divisibile per esattamente due numeri primi distinti e congetturato la commutatività di tutti i gruppi semplici di ordine dispari. Nel 1970, Thompson fu insignito della *Medaglia Fields* (uno dei riconoscimenti più prestigiosi per la matematica) per questo ed altri notevoli risultati.

In generale, quanto abbiamo descritto serve a capire che i gruppi semplici finiti sono i componenti fondamentali della teoria dei gruppi, un po' come in chimica gli elementi della tavola periodica di Mendeleev sono i componenti fondamentali della materia. Proprio questa analogia fu sfruttata dal matematico Ivan Andrus per spiegare al padre ciò di cui si occupava, costruendo a questo scopo una "tavola periodica" dei gruppi semplici finiti.

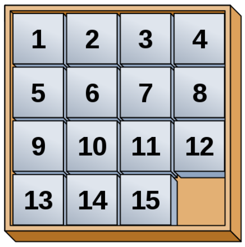


Il teorema di classificazione dei gruppi semplici finiti asserisce che i gruppi semplici finiti sono esattamente quelli indicati in questa tavola. La rappresentazione utilizzata nella costruzione della tavola si fonda principalmente sulla distribuzione della maggior parte dei gruppi semplici finiti in famiglie omogenee.

La più elementare di tali famiglie è quella dei gruppi di ordine primo, di cui abbiamo già parlato e che è rappresentata dalla colonna verde sulla destra della tavola. Quella gialla sulla sinistra rappresenta invece la famiglia dei cosiddetti *gruppi alterni*. Per ogni numero intero positivo n, il gruppo alterno A_n ha come sostegno l'insieme di tutte le *permutazioni pari* di $\{1,2,\dots,n\}$, cioè le funzioni biettive di $\{1,2,\dots,n\}$ in sé che si possono ottenere componendo un numero pari di scambi, ed è munito dell'operazione di composizione di funzioni.

È facile convincersi che A_n ha ordine $n!/2$, sicché in particolare A_1 e A_2 sono costituiti dalla sola identità, mentre $|A_3| = 3$, per cui A_3 è presente nella colonna dei gruppi di ordine primo; inoltre A_4 ha ordine $12 = 3 \cdot 2^2$ e quindi non può essere semplice per il già citato teorema di Burnside. Il gruppo A_5 è semplice (e di fatto il più piccolo tra i gruppi semplici non abeliani) per un importante teorema di Galois, che è stato completato da Jordan provando che in realtà A_n è semplice per ogni $n \geq 5$. Nel provare la semplicità di A_5, Galois era motivato dalla sua sorprendente scoperta che tale fatto fosse equivalente alla *non risolubilità per radicali* dell'equazione generale di quinto grado, cioè l'impossibilità di avere una formula generale per determinare le soluzioni dell'equazione attraverso i suoi coefficienti e le operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice).

Una simpatica caratterizzazione del gruppo alterno A_{15} si può ottenere attraverso il ben noto "Gioco del Quindici".



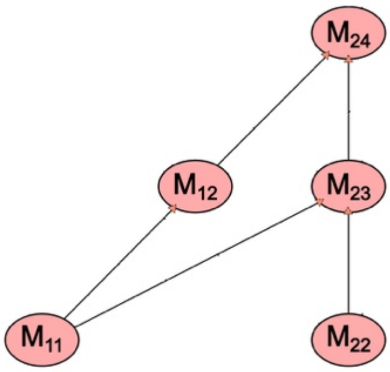
Infatti, non è difficile dimostrare che le configurazioni possibili che lascino vuota la sedicesima casella sono tutte e solo quelle realizzabili mediante l'applicazione di permutazioni pari alle quindici tessere. Ne segue che tra le due configurazioni

la prima è realizzabile mentre la seconda non lo è. Il numero 15 in questo contesto non è tuttavia speciale, in quanto può essere rimpiazzato da qualsiasi numero dispari, purché ovviamente si modifichi il gioco cambiando opportunamente il numero delle tessere.

Continuando ora la nostra analisi dei gruppi semplici che si trovano nella parte "continentale" della tavola periodica, ciascuna delle colonne, a partire dalla seconda, rappresenta una famiglia di gruppi semplici cosiddetti di *tipo Lie* (dal nome del matematico norvegese Sophus Lie il quale, pur non occupandosi direttamente di gruppi semplici, considerò certe tipologie di gruppi in qualche senso relazionabili a tali famiglie). I gruppi di tipo Lie si distribuiscono in 16 famiglie, ciascuna delle quali contiene infiniti gruppi semplici, che risultano "parametrizzabili" in modo simile. Infatti, alcune di queste famiglie richiedono una dimensione e un campo per specificare un gruppo: ad esempio, nella seconda colonna sono descritti gruppi del tipo $PSL(n, q)$, cioè gruppi di matrici $n \times n$, con determinante 1, su un campo di ordine q, modulo le *matrici scalari*. Altre famiglie richiedono per essere definite solamente un campo (spesso molto particolare): tale è ad esempio il caso della decima colonna, dove si trovano *i gruppi di Suzuki* $Sz(q)$, su un campo il cui ordine q è potenza di 2 con esponente dispari maggiore di 1.

Nelle due righe verdi in basso trovano posto 26 gruppi semplici eccezionali, cosiddetti *sporadici*, che non possono essere ricondotti ad alcuna delle famiglie precedentemente descritte. I primi tra questi gruppi ad essere stati scoperti sono i cinque *gruppi di Mathieu* $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ individuati dal matematico francese Émile Mathieu tra il 1861 e il 1873; il primo tra questi è il più piccolo gruppo semplice sporadico e ha ordine 7920. È da notare che il termine "sporadico" fu introdotto nel 1911 con riferimento a questi gruppi dal matematico britannico William Burnside, il quale scriveva: "Questi gruppi semplici apparentemente *sporadici* richiederebbero probabilmente un esame più attento di quello che hanno ricevuto finora".

Il gruppo M_{24} è il più grande tra i gruppi di Mathieu, non solo per il numero dei suoi elementi, ma soprattutto perché contiene ciascuno degli altri come sottogruppo. Ad ogni modo, questa non è l'unica relazione intercorrente tra i gruppi di Mathieu. Tutte le inclusioni tra questi gruppi sono rappresentate dal seguente diagramma.



In generale, le relazioni che intercorrono tra i gruppi semplici sporadici sono basate sul concetto di *sezione*, per la cui definizione è necessario ricordare preliminarmente il concetto di *isomorfismo*.

Due gruppi $(G_1,\star)$ e $(G_2,\circ)$ si dicono **isomorfi** se esiste tra essi una funzione biettiva φ che *preservi* le operazioni, cioè tale che

$$\varphi(x \star y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

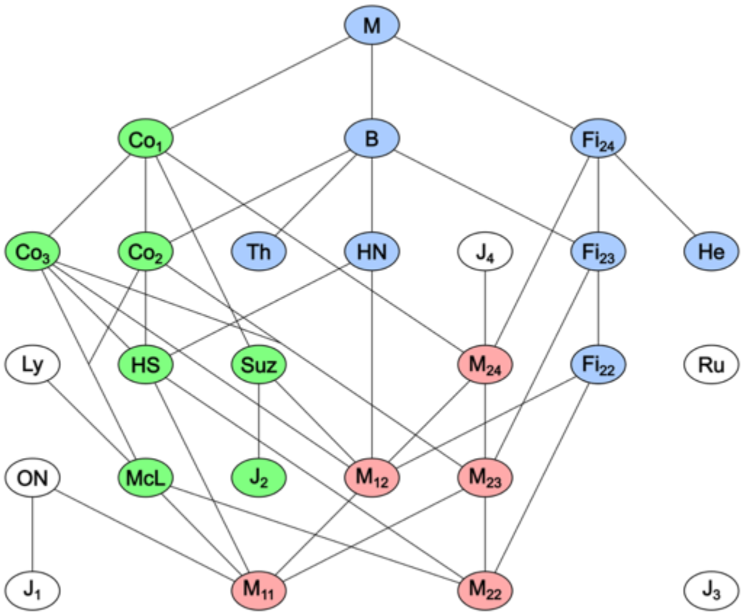
qualunque siano gli oggetti x e y di G_1.

In altri termini, i gruppi $(G_1,\star)$ e $(G_2,\circ)$ sono isomorfi se è possibile identificare i sostegni G_1 e G_2 rinominando gli oggetti di G_1 mediante i simboli che rappresentano quelli di G_2 in modo tale che $x \star y = z$ se e solamente se $x \circ y = z$. Ad esempio, tutti i gruppi aventi uno stesso ordine primo sono tra loro isomorfi; è questo il caso del gruppo alterno A_3 e del gruppo delle rotazioni del triangolo equilatero.

La nozione di isomorfismo determina una relazione di equivalenza tra gruppi, che consente di studiarli "a meno di isomorfismi".

Se G_1 e G_2 sono gruppi, si dice che G_1 è una **sezione** di G_2 se esistono un sottogruppo H di G_2 e un sottogruppo normale K di H tale che G_1 sia isomorfo ad H/K.

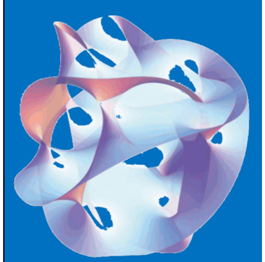
Dalla definizione segue subito che la nozione di sezione generalizza quella di sottogruppo. In particolare, ogni sottogruppo è una sezione e, per il teorema di Lagrange, l'ordine di una qualunque sezione di un gruppo finito divide l'ordine del gruppo. Non è difficile verificare che se G_1 è una sezione del gruppo G_2 e G_2 è a sua volta sezione di un gruppo G_3, allora anche G_1 è sezione di G_3. Si osservi inoltre che se i gruppi finiti G_1 e G_2 sono ciascuno sezione dell'altro, allora essi sono isomorfi. Pertanto, è possibile ritenere "confrontabili" due gruppi finiti se uno è sezione dell'altro. Il confronto tra tutti i gruppi semplici sporadici è rappresentato dal seguente diagramma, che ovviamente presenta al suo interno quello precedente relativo ai gruppi di Mathieu.



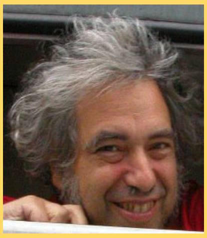
Come si evince dal grafico c'è un gruppo sporadico che sovrasta quasi tutti gli altri, stiamo parlando del cosiddetto **gruppo Mostro M**.

L'esistenza del **gruppo Mostro** (anche conosciuto come *gruppo di Fischer-Griess* o *gigante amichevole*) è stata prevista da Bernd Fischer nel 1973 e dimostrata da Robert Griess nel 1982. Questa situazione, che non è unica per i gruppi sporadici, ricorda molto il caso degli elementi previsti dalla tavola periodica di Mendeleev ma all'epoca non ancora scoperti, come ad esempio il *germanio*.

Tra i gruppi che si possono ottenere come sezioni del gruppo Mostro figurano ben 20 dei 26 gruppi sporadici. L'insieme di tali gruppi fu battezzato *Famiglia Felice* da Griess e può essere ragionevolmente organizzato in tre sottofamiglie (in cui sono collocati gruppi con medesima "origine"), che nel diagramma sono identificate dai colori: rosa, verde e azzurro. I rimanenti 6 gruppi sporadici (rappresentati in bianco) hanno preso il nome di *paria*.



L'eccezionalità del gruppo Mostro è evidenziata lucidamente da John Conway con la seguente frase: "Non c'è mai stata nessuna spiegazione del perché si trovi lì, e certamente non è lì per pura coincidenza. Ha troppe proprietà affascinanti perché possano essere tutte frutto del caso". Una di queste proprietà, provata soltanto nel 1992 da Richard Borcherds, ma congetturata addirittura prima della conferma dell'esistenza stessa del "Mostro", lo pone inaspettatamente in relazione con certe questioni di analisi complessa. Tale proprietà prende il nome di "Mostruoso Chiaro di Luna", una terminologia ad effetto coniata da Conway e **Simon Norton** nel 1979. Lo stesso Norton, a proposito del *Monstrous Moonshine*, ebbe a dire "Posso spiegare che cosa sia il Mostruoso Chiaro di Luna in una sola frase: è la voce di Dio".



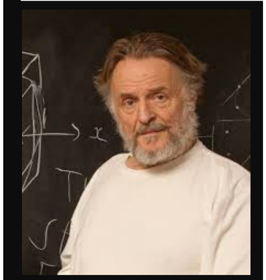
Simon Norton (28 febbraio 1952 – 14 febbraio 2019) è stato un matematico britannico, tra i più geniali ed eccentrici a cavallo tra il XX e il XXI secolo. Allievo di Conway, ha scoperto uno dei 26 gruppi semplici sporadici ed è stato tra gli autori del famoso *ATLAS of Finite Groups,* un compendio di informazioni basilari su molti gruppi semplici finiti. La sua singolare personalità è stata descritta da Alexander Masters nel libro "Un genio nello scantinato".

Il numero preciso di elementi del "Mostro" è stato esplicitato all'inizio di questo articolo, ma possiamo qui farne comprendere l'entità osservando, ad esempio, che il suo ordine è circa mille volte il numero degli atomi presenti sul nostro pianeta. Tutti gli altri gruppi sporadici hanno ordine, sebbene spesso molto elevato, di gran lunga inferiore a quello del "Mostro". Basti pensare che il secondo gruppo sporadico per "grandezza", il *Baby Mostro* (ancora una volta una terminologia dovuta a Conway), contiene un numero di oggetti pari a circa un milionesimo degli atomi della Terra. A tal proposito, è simpatico ricordare che, come riportato da Richard Borcherds, gli allievi di **John Conway** avevano scherzosamente soprannominato "Baby Monster" il figlio del loro maestro, allora di circa un anno.

John Conway (Liverpool, 26 dicembre 1937 – New Brunswick, 11 aprile 2020) è stato un matematico britannico, famoso non solo per i suoi risultati fondamentali in teoria dei gruppi, ma anche per i suoi contributi alla teoria dei nodi, alla teoria dei numeri e alla teoria dei codici. È conosciuto dal grande pubblico in quanto inventore del celebre *Game of Life*.

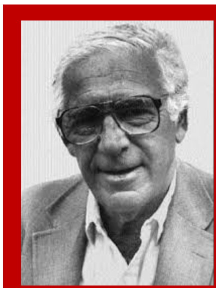
Ha scoperto 3 dei 26 gruppi semplici sporadici (Co_1, Co_2, Co_3) ed è stato l'autore principale dell'*ATLAS of Finite Groups*.

La sua scomparsa è legata alla pandemia di COVID-19.



A questo punto della nostra panoramica sui gruppi semplici finiti, ci sembra opportuno menzionare che, dopo la scoperta dei primi gruppi sporadici (i gruppi di Mathieu) sono trascorsi oltre 100 anni prima che un nuovo gruppo semplice fosse aggiunto alla lista: è il gruppo J_1, uno dei paria, scoperto da Zvonimir Janko nel 1965.

È infine doveroso ricordare la mente dietro il monumentale progetto di classificazione dei gruppi semplici finiti: **Daniel Gorenstein**.



Daniel Gorenstein (Boston, 1° gennaio 1923 – 26 agosto 1992) è stato un matematico statunitense. Autodidatta, studiò l'analisi giovanissimo, dall'età di 12 anni. L'interesse per la teoria dei gruppi finiti nacque quando, entrato ad Harvard, cominciò a lavorare con Saunders Mac Lane. Dopo qualche anno trascorso a studiare geometria algebrica sotto la direzione di Oscar Zariski, e stimolato da Yitz Herstein, tornò nel 1957 ad occuparsi di teoria dei gruppi, rendendolo il lavoro di una vita.

Il suo interesse per i gruppi semplici iniziò, durante il *Group Theory Year* che si tenne all'Università di Chicago nel 1960/61, quando fu chiaro che Feit e Thompson erano ormai in grado di provare che un gruppo semplice finito non-abeliano deve avere ordine pari. Gorenstein iniziò una lunga collaborazione con i due, ed ebbe allo stesso tempo modo di conoscere molti dei più importanti gruppisti allora in attività, tra i quali Richard Brauer, Michio Suzuki, Philip Hall, Graham Higman, Helmut Wielandt. Anche se il completamento della "Classificazione" fu senza dubbio dovuto a una pluralità di menti di altissimo livello, fu Gorenstein a dettare la linea da seguire portandolo così a felice completamento.

Si potrebbe continuare a discorrere per altre decine di pagine della "Classificazione" e delle persone che vi furono coinvolte, ma, ahinoi, lo spazio che possiamo occupare è inevitabilmente limitato ed anche la pazienza del lettore è stata già abbastanza messa alla prova. Speriamo però che quanto abbiamo scritto possa essere di stimolo per coloro che vorranno approfondire la storia che abbiamo raccontato, e ci auguriamo di ritrovarci ancora insieme nelle prossime puntate del nostro viaggio alla scoperta del *fascino discreto della teoria dei gruppi*.