

Periodico di Matematiche



**Organo della
MATHESIS**

Società italiana di scienze
matematiche e fisiche
fondata nel 1895

Numero 3 (Dicembre 2020)
Volume 12 Serie XIV
Anno CXXX

Direttore

Francesco de Giovanni
degiovan@unina.it

Comitato di Redazione

Maria Cocozza	mariacocozza@iscortese.com
Atalia Del Bene	atalia.delbene@istruzione.it
Umberto Dello Iacono	umberto.delloiacono@unicampania.it
Massimo Fioroni	fioronimassimo@gmail.com
Paola Gario	paola.gario@unimi.it
Franco Ghione	ghione@axp.mat.uniroma2.it
Elisabetta Lorenzetti	elisabetta.lorenzetti@unife.it
Marcello Pedone	marcellopedone@tin.it
Alessio Russo	alessio.russo@unicampania.it
Annalisa Santini	annalisanantini66@gmail.com
Luigi Verolino	verolino@unina.it

Staff editoriale

Marco Menale marco.menale@unicampania.it

Autorizzazioni e supporti Autorizzazioni Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Il Periodico di Matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su www.mathesisnazionale.it

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia € 60,00 – Per l'Estero € 70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati: segreteria@mathesisnazionale.it

c/c postale, Codice IBAN:
IT051076010400000048597470

intestato a:
Mathesis Nazionale c/o Accademia dei Concordi, Piazza Vittorio Emanuele, 14,
45100 Rovigo (RO),
www.mathesisnazionale.it

Numero 3 Dicembre 2020 Volume 12 serie XIV anno CXXX

Rivista quadrimestrale

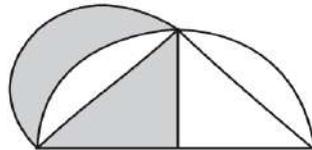
Periodico di Matematiche

Organo della MATHESIS

Società italiana di scienze

matematiche e fisiche

fondata nel 1895



Mathesis

Indice

Editoriale – Elisabetta Lorenzetti	105
Francesco de Giovanni – Marco Trombetti Il Fascino Discreto della Teoria dei Gruppi	107
Sergio Savarino Modelli e popolazioni	123
Alessio Russo La Matematica come pratica di Libertà	135
Antonino Onorato Brevi note sull'unificazione dei principale metodi di interpolazione statistica	151
Silvia Cerasaro L'aritmetica con il Liber Abici di Fibonacci	175
Alfio Ragusa La funzione di Hilbert e sue applicazioni geometriche	195

EDITORIALE

Come Presidente uscente della Mathesis Nazionale, vorrei esprimere al nuovo Consiglio Nazionale il mio augurio di buon lavoro, ispirato al nostro Statuto e agli impegni di testimonianza disinteressata del valore della cultura matematica e della importanza della formazione dei nostri docenti, ora più che mai di fronte a una sfida straordinaria.

Permettetemi, poi, di condividere il rammarico di aver dovuto in questi due anni della mia presidenza affrontare amarezze e conflittualità largamente immotivate e artificiosamente ampliate, di aver dovuto contrastare tentativi di delegittimazione e di frammentazione della stessa Mathesis, che hanno generato un senso di smarrimento e confusione in molti soci. E ancora, recentemente, le improprie richieste di contributi per l'iscrizione a corsi on line, quando l'accesso a queste opportunità doveva essere assicurato dalla sola quota associativa Mathesis, ancor più grave chiedendo in alcuni casi di versare tale quota alla sola sezione provinciale, configurando un'indebita appropriazione. Nulla a che vedere con lo spirito del nostro Statuto, cui io ho tenuto ostinatamente fede.

Sento il dovere di mettere in guardia il nuovo Consiglio ed il prossimo Presidente su questi problemi, perché quanto ho appena descritto si traduce in un importante rischio, ancora attuale, per l'esistenza stessa della nostra associazione. In questi due anni ho avuto la fortuna di essere supportata da un Consiglio attivo e coeso, che ha affrontato collettivamente ogni situazione. Il mio auspicio è che il prossimo Consiglio possa similmente essere equilibrato ed omogeneo, perché tenere la barra ben salda ed evitare che il vento possa condurre al naufragio è un obbligo, ma non sarà facile.

Che i prossimi anni della nostra Associazione possano essere sereni e fruttuosi. Dipenderà da ciascuno di noi.

Elisabetta Lorenzetti

Il Fascino Discreto della Teoria dei Gruppi
La Classificazione dei Gruppi Semplici Finiti

The Discreet Charm of Group Theory
The Classification of Finite Simple Groups

Francesco de Giovanni – Marco Trombetti¹

Nel 1983, il matematico americano Daniel Gorenstein annunciava il completamento del progetto di classificazione dei gruppi semplici finiti. Tale classificazione, che costituisce un risultato estremamente importante per la matematica, ha attirato persino l'attenzione dei media (non specializzati) e ancora colpisce chi matematico non è per le sue eccezionali caratteristiche: l'incredibile numero di pagine richieste per la sua dimostrazione (oltre 15.000, contro le circa 200 necessarie alla prova dell'*Ultimo Teorema di Fermat* ottenuta da Andrew Wiles nel 1994) l'elevato numero di matematici coinvolti nella dimostrazione stessa (oltre 100), l'ordine del cosiddetto *gruppo Mostro* (poco meno di 10^{54} , e precisamente 808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368.000.000.000).

È possibile raccontare in poche pagine cosa sono i gruppi semplici e perché la loro classificazione è così complicata ed importante? Toccherà al lettore giudicare se ne siamo stati in grado o meno.

¹ Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Napoli Federico II, Complesso Universitario Monte Sant'Angelo, Via Cintia, Napoli (Italia). E-mail: degiovan@unina.it; marco.trombetti@unina.it

Comunicato da A. Russo

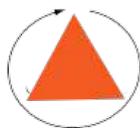
Nel 1915, Emmy Noether provò che simmetrie delle leggi fisiche e leggi di conservazione sono intimamente collegate: l'invarianza rispetto a traslazione spaziale corrisponde alla conservazione della quantità totale di moto, l'invarianza rispetto a traslazione temporale corrisponde alla conservazione dell'energia totale, l'invarianza per rotazione spaziale corrisponde alla conservazione del momento angolare e così via.

Ma cos'è una *simmetria* per i matematici?

Nella sua forma più elementare, una simmetria è una funzione che lascia globalmente inalterato un ente matematico. Ad esempio, se consideriamo il triangolo equilatero



una sua simmetria è una *isometria*, cioè una funzione biettiva del triangolo in sé che conservi le distanze. Ci si accorge subito che le uniche simmetrie del triangolo in questione sono le 6 funzioni che si ottengono come rotazioni e come ribaltamenti rispetto alle altezze.



Identità
Rotazione di 360°



Riflessione



Rotazione di 120°



Riflessione

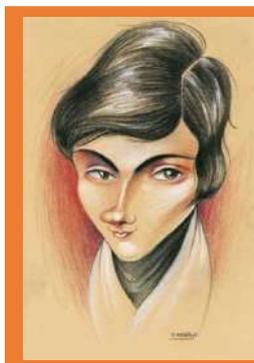


Rotazione di 240°



Riflessione

Chiaramente, la funzione che si ottiene applicando di seguito due simmetrie è ancora una simmetria (ad esempio, nel caso del triangolo equilatero, la composta di una riflessione e di una rotazione è ancora una riflessione); inoltre la funzione inversa di una qualunque simmetria è una simmetria (nel caso del triangolo equilatero, componendo una qualunque riflessione con sé stessa oppure una rotazione non identica con l'altra, il risultato è sempre la simmetria identica). Possiamo quindi concludere che l'insieme delle simmetrie di un ente matematico (ad esempio il triangolo equilatero) è un *gruppo* rispetto alla composizione, cioè un insieme munito di una operazione interna che sia associativa, che ammetta identità e rispetto alla quale tutti gli elementi siano invertibili. Strutture di questo tipo erano state implicitamente considerate già dall'italiano Joseph-Louis Lagrange, ma il primo ad utilizzare il termine "gruppo" è stato **Évariste Galois**.



Évariste Galois (Bourg-la-Reine, 25 ottobre 1811 – Parigi, 31 maggio 1832) è stato un matematico francese. Anticonformista e ribelle, fu il primo a realizzare il ruolo cruciale delle simmetrie nell'ambito dell'algebra, caratterizzando in particolare la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche mediante il comportamento del gruppo delle permutazioni delle radici. Per la profondità e il carattere innovativo delle sue idee, non fu compreso dai contemporanei e solo nel 1870, grazie agli sforzi di Camille Jordan, si iniziò a intravedere l'incredibile rilevanza della sua opera per la matematica intera.

Il suo animo tormentato e il suo atteggiamento rivoluzionario lo condussero a una precoce morte in duello a soli 20 anni, la notte prima del quale concluse una approssimativa stesura delle sue idee.

Quasi sempre l'operazione in un gruppo si denota moltiplicativamente. In questo modo, ad esempio, se x è la rotazione di 120° del triangolo equilatero e y è la riflessione rispetto alla sua base, il prodotto xy è la riflessione rispetto al lato ovest. Si tenga inoltre presente che i gruppi sono usualmente studiati a meno di possibili "identificazioni" (a questo proposito, il lettore può trovare più avanti la definizione precisa di *isomorfismo* tra gruppi).

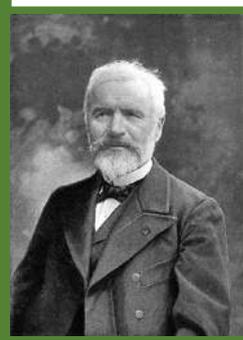
Come si può facilmente intuire, il gruppo delle simmetrie del triangolo equilatero (da ora in poi denotato con il simbolo S_3) ha una struttura molto elementare, ma in generale la descrizione di un gruppo può risultare estremamente complicata. Per procedere all'analisi di oggetti matematici tanto complessi si cerca in genere di ridurne la complessità guardando ad enti dello stesso tipo, ma "più piccoli", e che siano in grado di fornire un quadro abbastanza completo della struttura originaria. Nel caso dei gruppi questi strumenti sono i *sottogruppi normali* e i relativi *gruppi quoziente*.

Un **sottogruppo** di un gruppo G è una collezione H di suoi elementi che contenga tutti i risultati dell'operazione di G applicata ai suoi oggetti e che risulti a sua volta un gruppo rispetto all'*operazione indotta*.

Chiaramente ogni gruppo è sottogruppo di sé stesso e contiene tra i suoi sottogruppi quello costituito dalla sola identità (questi sono i cosiddetti *sottogruppi banali*). Eccetto che in casi molto elementari, ogni gruppo possiede sottogruppi non banali. Ad esempio, nel caso del gruppo S_3 , l'insieme delle rotazioni è un sottogruppo, costituito da 3 oggetti, e similmente è un sottogruppo ciascuno degli insiemi costituiti dall'identità e da una singola riflessione. Si verifica che questi sono gli unici sottogruppi non banali di S_3 .

Non è un caso che in S_3 manchino sottogruppi di ordine 4 e di ordine 5, perché in un qualunque gruppo finito *l'ordine di un sottogruppo divide l'ordine del gruppo*. Questo risultato è generalmente attribuito a Lagrange, il quale nel 1771 ne dimostrò un caso particolare; dopo altri contributi parziali di Gauss (1801) e di Cauchy (1844), il risultato ci è pervenuto nella sua forma attuale grazie a **Camille Jordan** (1861).

Camille Jordan (Lione, 5 gennaio 1838 – Parigi, 22 gennaio 1922) è stato un famoso matematico francese. Affascinato dalla lettura dell'opera di Galois, ripubblicata da Joseph Liouville nel 1846, iniziò quello che è passato alla storia come il primo studio sistematico della teoria dei gruppi. I suoi risultati in questo ambito sono stati pubblicati nel *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870). A Jordan è dovuto il fondamentale concetto di *serie di composizione* di un gruppo, a partire dal quale lo studio della teoria dei gruppi finiti può oggi essere ricondotto a quello dei gruppi semplici.



Passiamo ora a definire i sottogruppi normali. La normalità per un sottogruppo di un gruppo arbitrario è una proprietà rara e di grande rilievo, già evidenziata da Galois, come risulta da una sua lettera indirizzata ad Auguste Chevalier e datata 24 ottobre 1832.

“

En d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H , le groupe G peut se partager en groupes, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution; en sorte que

$$G = H + HS + HS' + \dots$$

Et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que

$$G = H + TH + T'H + \dots$$

*Ces deux genres de décompositions ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite **propre**.*

”

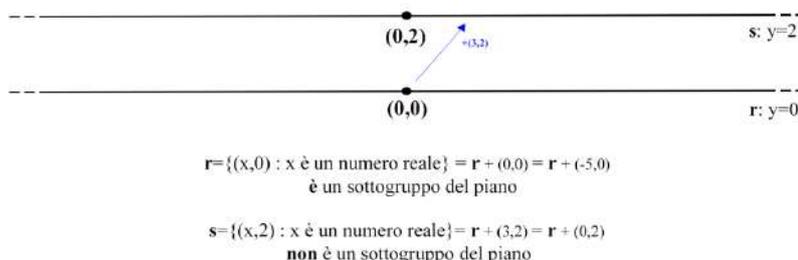
Cerchiamo ora di chiarire il senso di quello che scriveva Galois. Se H è un sottogruppo di un gruppo G , per ogni elemento x di G si possono considerare gli insiemi

$$Hx = \{hx : h \in H\} \quad \text{e} \quad xH = \{xh : h \in H\}$$

che si ottengono *traslando* a destra o a sinistra tutti gli elementi di H con *ampiezza* x ; tali insiemi, che ovviamente contengono il *rappresentante* x , sono oggi denominati rispettivamente *laterale destro* e *laterale sinistro* di H . L'insieme di tutti i laterali sinistri di H , così come quello di tutti i suoi laterali destri, è una *partizione* di G , cioè *decompone* il gruppo nell'unione di sottoinsiemi non vuoti e a due a due disgiunti.

Per comprendere l'intuizione alla base di queste nozioni si pensi al gruppo additivo $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ delle coppie di numeri reali (munito della somma puntuale), il cui *sostegno* (cioè l'insieme in cui è definita l'operazione) si può facilmente identificare con l'insieme dei punti di un piano cartesiano; ci si rende subito conto che ogni retta r passante per l'origine è un sottogruppo, i

cui laterali (sinistri o destri) sono esattamente tutte le rette parallele ad r (che ovviamente costituiscono una partizione del piano).



I sottogruppi che, nella terminologia di Galois, determinano una *decomposizione propria* del gruppo sono quelli per i quali i laterali sinistri e destri determinano la stessa partizione, e sono oggi noti come *sottogruppi normali*. Pertanto, un sottogruppo H di un gruppo G è normale se e solo se $Hx = xH$ per ogni $x \in G$. Si osservi che in un *gruppo abeliano* (cioè un gruppo in cui vale l'identità $xy = yx$) tutti i sottogruppi sono normali. Questo è quello che avviene nell'esempio del piano appena considerato. Diversa è la situazione nel caso del gruppo S_3 , dove l'unico sottogruppo normale non *banale* (cioè diverso dall'intero gruppo e dal sottogruppo formato dalla sola identità) è quello costituito dalle rotazioni.

Se H è un sottogruppo normale di un gruppo G , è facile accorgersi che l'operazione in G induce sull'insieme G/H , costituito dai laterali di H , una nuova operazione mediante la posizione:

$$Hx \cdot Hy = H(xy).$$

In questo modo G/H diventa anch'esso un gruppo, detto *gruppo quoziente* di G rispetto ad H . Chiaramente, l'operazione di "passaggio al quoziente" identifica tutti gli oggetti che si trovano in uno stesso laterale. Si pensi ad esempio al caso già citato del gruppo additivo $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, in cui, nel passaggio al quoziente rispetto alla retta r , vengono identificati tutti i punti che si trovano su una stessa retta parallela ad r , ottenendo così una struttura identificabile con la retta perpendicolare ad r nell'origine. In qualche senso, lo studio del piano è stato ridotto a quello di due rette ortogonali tra di loro.

È opportuno osservare qui che il già citato teorema di Lagrange assicura altresì che l'ordine di un qualunque quoziente di un gruppo finito G è divisore dell'ordine di G .

In generale, quando si ha un sottogruppo normale H di un gruppo G , è possibile recuperare informazioni sulla struttura di G a partire da quella più facile del sottogruppo H e del gruppo quoziente G/H . In qualche senso, G è ottenuto come *estensione* del gruppo H mediante il gruppo G/H ; la *teoria delle estensioni*, introdotta dai matematici Otto Schreier e Otto Hölder, è un importante capitolo della teoria dei gruppi che permette il riconoscimento di una estensione a partire dalle sue “componenti”. Ad ogni modo, tale teoria non è utilizzabile qualora il gruppo in esame sia privo di sottogruppi normali non banali.

Un gruppo, non costituito dalla sola identità, si dice **semplice** se i suoi unici sottogruppi normali sono quelli banali.

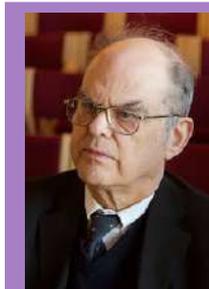
Esempi ovvi di gruppi semplici sono tutti i gruppi finiti di ordine primo in quanto, per il citato teorema di Lagrange, essi sono addirittura privi di sottogruppi non banali. Gruppi di questo tipo hanno una struttura molto elementare: sono costituiti dalle potenze di un singolo elemento ed in particolare sono abeliani. Si noti che tutti i sottogruppi non banali di S_3 sono in questa situazione e S_3 è estensione di un gruppo di ordine 3 mediante un gruppo di ordine 2, cioè si ottiene “componendo” due gruppi semplici. Questo non è un caso: non è troppo difficile provare che ogni gruppo finito può essere costruito mediante composizione iterata di gruppi semplici. Più precisamente, si dimostra che se G è un gruppo finito, esiste una sequenza di sottogruppi

$$\{1\} = X_0 < X_1 < \dots < X_k = G$$

tale che, per ogni $i = 0, 1, \dots, k - 1$, il sottogruppo X_i è normale in X_{i+1} e il gruppo quoziente X_{i+1}/X_i è semplice. Una sequenza di questo genere prende il nome di *serie di composizione* del gruppo G . In generale, un gruppo finito può ammettere serie di composizione distinte, ma Jordan provò, intorno al 1869, che gli ordini dei gruppi quoziente che intervengono in queste serie sono degli *invarianti* del gruppo, cioè non dipendono dalla scelta della serie di composizione. Questo risultato è stato migliorato nel 1889 da Hölder, il quale dimostrò che addirittura i gruppi semplici che compaiono come gruppi

quoziente di una serie di composizione di un gruppo finito sono degli invarianti, e tale è anche la loro molteplicità.

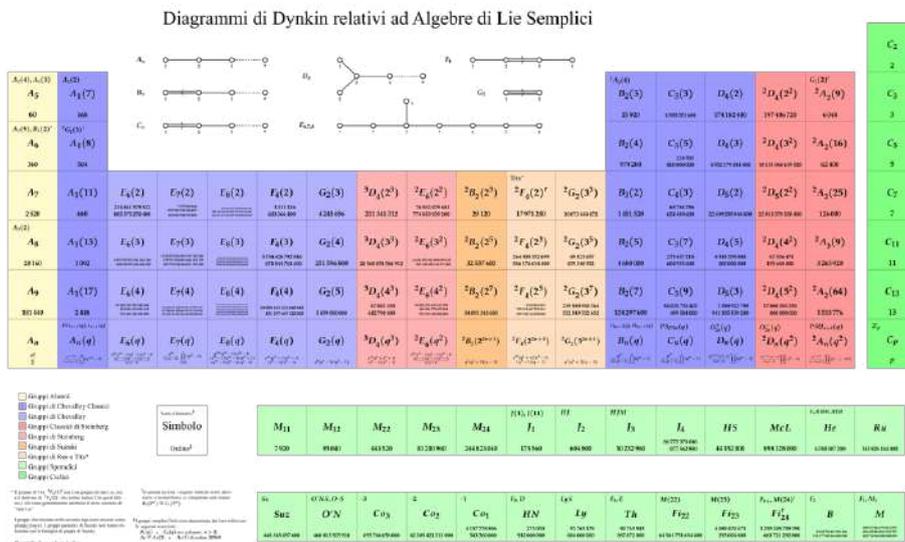
Arrivati a questo punto, dovrebbe apparire chiaro perché la determinazione di tutti i gruppi semplici finiti, unitamente ad un'adeguata teoria delle estensioni, permetterebbe, in linea di principio, la costruzione di tutti i gruppi finiti. Si osservi inoltre che la sola teoria delle estensioni consentirebbe di realizzare tutti i gruppi finiti di ordine dispari. Infatti, un famoso teorema di Walter Feit e **John Thompson** assicura che ogni gruppo semplice di ordine dispari ha ordine primo e quindi ogni gruppo finito di ordine dispari può essere ottenuto "componendo" gruppi semplici di questo tipo, che abbiamo già menzionato avere una struttura del tutto elementare.



John Thompson (nato il 13 ottobre 1932) è un famoso matematico statunitense, la cui notorietà è legata alla dimostrazione, in collaborazione con Walter Feit, di una importante congettura dovuta a William Burnside. Quest'ultimo aveva provato che non esistono gruppi semplici finiti il cui ordine è divisibile per esattamente due numeri primi distinti e congetturato la commutatività di tutti i gruppi semplici di ordine dispari. Nel 1970, Thompson fu insignito della *Medaglia Fields* (uno dei riconoscimenti più prestigiosi per la matematica) per questo ed altri notevoli risultati.

In generale, quanto abbiamo descritto serve a capire che i gruppi semplici finiti sono i componenti fondamentali della teoria dei gruppi, un po' come in chimica gli elementi della tavola periodica di Mendeleev sono i componenti fondamentali della materia. Proprio questa analogia fu sfruttata dal matematico Ivan Andrus per spiegare al padre ciò di cui si occupava, costruendo a questo scopo una "tavola periodica" dei gruppi semplici finiti.

La Tavola Periodica dei Gruppi Semplici Finiti



Il teorema di classificazione dei gruppi semplici finiti asserisce che i gruppi semplici finiti sono esattamente quelli indicati in questa tavola. La rappresentazione utilizzata nella costruzione della tavola si fonda principalmente sulla distribuzione della maggior parte dei gruppi semplici finiti in famiglie omogenee.

La più elementare di tali famiglie è quella dei gruppi di ordine primo, di cui abbiamo già parlato e che è rappresentata dalla colonna verde sulla destra della tavola. Quella gialla sulla sinistra rappresenta invece la famiglia dei cosiddetti *gruppi alterni*. Per ogni numero intero positivo n , il gruppo alterno A_n ha come sostegno l'insieme di tutte le *permutazioni pari* di $\{1, 2, \dots, n\}$, cioè le funzioni biettive di $\{1, 2, \dots, n\}$ in sé che si possono ottenere componendo un numero pari di scambi, ed è munito dell'operazione di composizione di funzioni.

È facile convincersi che A_n ha ordine $n!/2$, sicché in particolare A_1 e A_2 sono costituiti dalla sola identità, mentre $|A_3| = 3$, per cui A_3 è presente nella colonna dei gruppi di ordine primo; inoltre A_4 ha ordine $12 = 3 \cdot 2^2$ e quindi non può essere semplice per il già citato teorema di Burnside. Il gruppo A_5 è semplice (e di fatto il più piccolo tra i gruppi semplici non abeliani) per un importante teorema di Galois, che è stato completato da Jordan provando che in realtà A_n è semplice per ogni $n \geq 5$. Nel provare la semplicità di A_5 , Galois

era motivato dalla sua sorprendente scoperta che tale fatto fosse equivalente alla *non risolubilità per radicali* dell'equazione generale di quinto grado, cioè l'impossibilità di avere una formula generale per determinare le soluzioni dell'equazione attraverso i suoi coefficienti e le operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice).

Una simpatica caratterizzazione del gruppo alterno A_{15} si può ottenere attraverso il ben noto "Gioco del Quindici".

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Infatti, non è difficile dimostrare che le configurazioni possibili che lascino vuota la sedicesima casella sono tutte e solo quelle realizzabili mediante l'applicazione di permutazioni pari alle quindici tessere. Ne segue che tra le due configurazioni

2	1	4	3
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

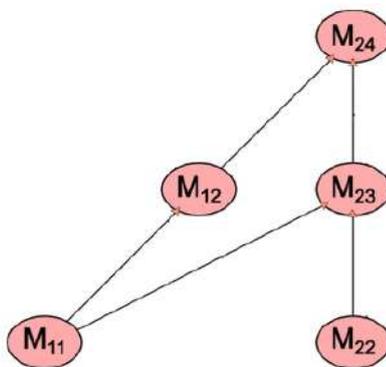
la prima è realizzabile mentre la seconda non lo è. Il numero 15 in questo contesto non è tuttavia speciale, in quanto può essere rimpiazzato da qualsiasi numero dispari, purché ovviamente si modifichi il gioco cambiando opportunamente il numero delle tessere.

Continuando ora la nostra analisi dei gruppi semplici che si trovano nella parte "continentale" della tavola periodica, ciascuna delle colonne, a partire dalla seconda, rappresenta una famiglia di gruppi semplici cosiddetti di *tipo Lie* (dal nome del matematico norvegese Sophus Lie il quale, pur non occupandosi direttamente di gruppi semplici, considerò certe tipologie di

gruppi in qualche senso relazionabili a tali famiglie). I gruppi di tipo Lie si distribuiscono in 16 famiglie, ciascuna delle quali contiene infiniti gruppi semplici, che risultano “parametrizzabili” in modo simile. Infatti, alcune di queste famiglie richiedono una dimensione e un campo per specificare un gruppo: ad esempio, nella seconda colonna sono descritti gruppi del tipo $PSL(n, q)$, cioè gruppi di matrici $n \times n$, con determinante 1, su un campo di ordine q , modulo le *matrici scalari*. Altre famiglie richiedono per essere definite solamente un campo (spesso molto particolare): tale è ad esempio il caso della decima colonna, dove si trovano i *gruppi di Suzuki* $Sz(q)$, su un campo il cui ordine q è potenza di 2 con esponente dispari maggiore di 1.

Nelle due righe verdi in basso trovano posto 26 gruppi semplici eccezionali, cosiddetti *sporadici*, che non possono essere ricondotti ad alcuna delle famiglie precedentemente descritte. I primi tra questi gruppi ad essere stati scoperti sono i cinque *gruppi di Mathieu* $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ individuati dal matematico francese Émile Mathieu tra il 1861 e il 1873; il primo tra questi è il più piccolo gruppo semplice sporadico e ha ordine 7920. È da notare che il termine “sporadico” fu introdotto nel 1911 con riferimento a questi gruppi dal matematico britannico William Burnside, il quale scriveva: “Questi gruppi semplici apparentemente *sporadici* richiederebbero probabilmente un esame più attento di quello che hanno ricevuto finora”.

Il gruppo M_{24} è il più grande tra i gruppi di Mathieu, non solo per il numero dei suoi elementi, ma soprattutto perché contiene ciascuno degli altri come sottogruppo. Ad ogni modo, questa non è l’unica relazione intercorrente tra i gruppi di Mathieu. Tutte le inclusioni tra questi gruppi sono rappresentate dal seguente diagramma.



In generale, le relazioni che intercorrono tra i gruppi semplici sporadici sono basate sul concetto di *sezione*, per la cui definizione è necessario ricordare preliminarmente il concetto di *isomorfismo*.

Due gruppi (G_1, \star) e (G_2, \circ) si dicono **isomorfi** se esiste tra essi una funzione biettiva φ che *preservi* le operazioni, cioè tale che

$$\varphi(x \star y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

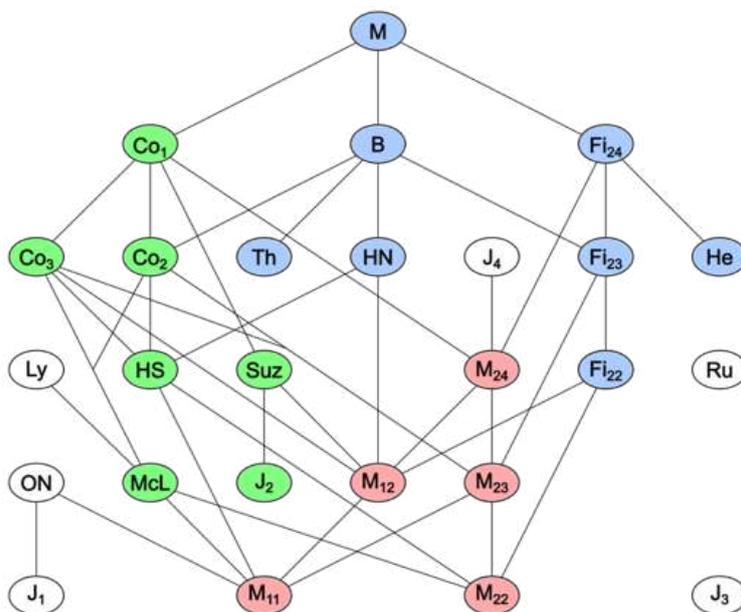
qualunque siano gli oggetti x e y di G_1 .

In altri termini, i gruppi (G_1, \star) e (G_2, \circ) sono isomorfi se è possibile identificare i sostegni G_1 e G_2 rinominando gli oggetti di G_1 mediante i simboli che rappresentano quelli di G_2 in modo tale che $x \star y = z$ se e solamente se $x \circ y = z$. Ad esempio, tutti i gruppi aventi uno stesso ordine primo sono tra loro isomorfi; è questo il caso del gruppo alterno A_3 e del gruppo delle rotazioni del triangolo equilatero.

La nozione di isomorfismo determina una relazione di equivalenza tra gruppi, che consente di studiarli “a meno di isomorfismi”.

Se G_1 e G_2 sono gruppi, si dice che G_1 è una **sezione** di G_2 se esistono un sottogruppo H di G_2 e un sottogruppo normale K di H tale che G_1 sia isomorfo ad H/K .

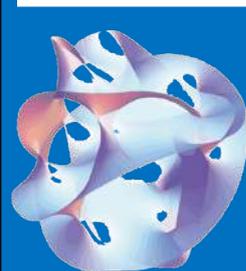
Dalla definizione segue subito che la nozione di sezione generalizza quella di sottogruppo. In particolare, ogni sottogruppo è una sezione e, per il teorema di Lagrange, l'ordine di una qualunque sezione di un gruppo finito divide l'ordine del gruppo. Non è difficile verificare che se G_1 è una sezione del gruppo G_2 e G_2 è a sua volta sezione di un gruppo G_3 , allora anche G_1 è sezione di G_3 . Si osservi inoltre che se i gruppi finiti G_1 e G_2 sono ciascuno sezione dell'altro, allora essi sono isomorfi. Pertanto, è possibile ritenere “confrontabili” due gruppi finiti se uno è sezione dell'altro. Il confronto tra tutti i gruppi semplici sporadici è rappresentato dal seguente diagramma, che ovviamente presenta al suo interno quello precedente relativo ai gruppi di Mathieu.



Come si evince dal grafico c'è un gruppo sporadico che sovrasta quasi tutti gli altri, stiamo parlando del cosiddetto **gruppo Mostro M**.

L'esistenza del **gruppo Mostro** (anche conosciuto come *gruppo di Fischer-Griess* o *gigante amichevole*) è stata prevista da Bernd Fischer nel 1973 e dimostrata da Robert Griess nel 1982. Questa situazione, che non è unica per i gruppi sporadici, ricorda molto il caso degli elementi previsti dalla tavola periodica di Mendeleev ma all'epoca non ancora scoperti, come ad esempio il *germanio*.

Tra i gruppi che si possono ottenere come sezioni del gruppo Mostro figurano ben 20 dei 26 gruppi sporadici. L'insieme di tali gruppi fu battezzato *Famiglia Felice* da Griess e può essere ragionevolmente organizzato in tre sottofamiglie (in cui sono collocati gruppi con medesima "origine"), che nel diagramma sono identificate dai colori: rosa, verde e azzurro. I rimanenti 6 gruppi sporadici (rappresentati in bianco) hanno preso il nome di *paria*.



L'eccezionalità del gruppo Mostro è evidenziata lucidamente da John Conway con la seguente frase: "Non c'è mai stata nessuna spiegazione del perché si trovi lì, e certamente non è lì per pura coincidenza. Ha troppe proprietà affascinanti perché possano essere tutte frutto del caso". Una di queste proprietà, provata soltanto nel 1992 da Richard Borcherds, ma congetturata addirittura prima della conferma dell'esistenza stessa del "Mostro", lo pone inaspettatamente in relazione con certe questioni di analisi complessa. Tale proprietà prende il nome di "Mostruoso Chiaro di Luna", una terminologia ad effetto coniata da Conway e **Simon Norton** nel 1979. Lo stesso Norton, a proposito del *Monstrous Moonshine*, ebbe a dire "Posso spiegare che cosa sia il Mostruoso Chiaro di Luna in una sola frase: è la voce di Dio".



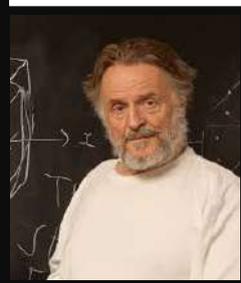
Simon Norton (28 febbraio 1952 – 14 febbraio 2019) è stato un matematico britannico, tra i più geniali ed eccentrici a cavallo tra il XX e il XXI secolo. Allievo di Conway, ha scoperto uno dei 26 gruppi semplici sporadici ed è stato tra gli autori del famoso *ATLAS of Finite Groups*, un compendio di informazioni basilari su molti gruppi semplici finiti. La sua singolare personalità è stata descritta da Alexander Masters nel libro "Un genio nello scantinato".

Il numero preciso di elementi del "Mostro" è stato esplicitato all'inizio di questo articolo, ma possiamo qui farne comprendere l'entità osservando, ad esempio, che il suo ordine è circa mille volte il numero degli atomi presenti sul nostro pianeta. Tutti gli altri gruppi sporadici hanno ordine, sebbene spesso molto elevato, di gran lunga inferiore a quello del "Mostro". Basti pensare che il secondo gruppo sporadico per "grandezza", il *Baby Mostro* (ancora una volta una terminologia dovuta a Conway), contiene un numero di oggetti pari a circa un milionesimo degli atomi della Terra. A tal proposito, è simpatico ricordare che, come riportato da Richard Borcherds, gli allievi di **John Conway** avevano scherzosamente soprannominato "Baby Monster" il figlio del loro maestro, allora di circa un anno.

John Conway (Liverpool, 26 dicembre 1937 – New Brunswick, 11 aprile 2020) è stato un matematico britannico, famoso non solo per i suoi risultati fondamentali in teoria dei gruppi, ma anche per i suoi contributi alla teoria dei nodi, alla teoria dei numeri e alla teoria dei codici. È conosciuto dal grande pubblico in quanto inventore del celebre *Game of Life*.

Ha scoperto 3 dei 26 gruppi semplici sporadici (Co_1, Co_2, Co_3) ed è stato l'autore principale dell'*ATLAS of Finite Groups*.

La sua scomparsa è legata alla pandemia di COVID-19.



A questo punto della nostra panoramica sui gruppi semplici finiti, ci sembra opportuno menzionare che, dopo la scoperta dei primi gruppi sporadici (i gruppi di Mathieu) sono trascorsi oltre 100 anni prima che un nuovo gruppo semplice fosse aggiunto alla lista: è il gruppo J_1 , uno dei paria, scoperto da Zvonimir Janko nel 1965.

È infine doveroso ricordare la mente dietro il monumentale progetto di classificazione dei gruppi semplici finiti: **Daniel Gorenstein**.



Daniel Gorenstein (Boston, 1° gennaio 1923 – 26 agosto 1992) è stato un matematico statunitense. Autodidatta, studiò l'analisi giovanissimo, dall'età di 12 anni. L'interesse per la teoria dei gruppi finiti nacque quando, entrato ad Harvard, cominciò a lavorare con Saunders Mac Lane. Dopo qualche anno trascorso a studiare geometria algebrica sotto la direzione di Oscar Zariski, e stimolato da Yitz Herstein, tornò nel 1957 ad occuparsi di teoria dei gruppi, rendendolo il lavoro di una vita.

Il suo interesse per i gruppi semplici iniziò, durante il *Group Theory Year* che si tenne all'Università di Chicago nel 1960/61, quando fu chiaro che Feit e Thompson erano ormai in grado di provare che un gruppo semplice finito

non-abeliano deve avere ordine pari. Gorenstein iniziò una lunga collaborazione con i due, ed ebbe allo stesso tempo modo di conoscere molti dei più importanti gruppisti allora in attività, tra i quali Richard Brauer, Michio Suzuki, Philip Hall, Graham Higman, Helmut Wielandt. Anche se il completamento della “Classificazione” fu senza dubbio dovuto a una pluralità di menti di altissimo livello, fu Gorenstein a dettare la linea da seguire portandolo così a felice completamento.

Si potrebbe continuare a discorrere per altre decine di pagine della “Classificazione” e delle persone che vi furono coinvolte, ma, ahinoi, lo spazio che possiamo occupare è inevitabilmente limitato ed anche la pazienza del lettore è stata già abbastanza messa alla prova. Speriamo però che quanto abbiamo scritto possa essere di stimolo per coloro che vorranno approfondire la storia che abbiamo raccontato, e ci auguriamo di ritrovarci ancora insieme nelle prossime puntate del nostro viaggio alla scoperta del *fascino discreto della teoria dei gruppi*.

Modelli e popolazioni

Models and Populations

Sergio Savarino¹

Abstract

Population dynamics provides good examples of applying mathematics to social context. The equations that describe it are intuitive. Their solutions and graphs are simple in some cases, not in others. Explanations are given that are within reach of people with a mathematical background.

Malthus, la crescita esponenziale

Il modello di Malthus fornisce un esempio di matematica applicata alla dinamica delle popolazioni. L'ipotesi è che la velocità di crescita della popolazione sia proporzionale alla popolazione stessa. Ne deriva un modello matematico semplice:

$$\dot{N}(t) = k \cdot N(t) \quad \text{legge di Malthus}$$

Con k tasso di crescita e \dot{N} derivata rispetto al tempo. Una relazione che, peraltro, presuppone un numero d'individui elevato, in modo che sia accettabile l'ipotesi del continuo in un contesto che non lo è. Il risultato:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

¹ Mathesis Roma, s.savarino@tiscali.it
Comunicato da A. Russo

una crescita esponenziale, una popolazione che aumenta in modo rapido, con esiti potenzialmente catastrofici. Ma il modello è semplicistico. Non tiene conto degli “attriti” che l’ambiente impone e che possono essere drammatici: sovrappollamento, carenza di cibo, inquinamento, malattie, guerre. Tuttavia per la popolazione umana, specie su grandi numeri e su tempi lunghi, ci sono molti esempi in cui il tracciato è realmente esponenziale.

*Popolazione mondiale
(milioni) dal
1000 a.C.*
Dopo l'anno 1000 d.C. la
crescita è più
lenta: il tracciato è quasi
orizzontale
(zona cerchiata), poi riprende
a
crescere in modo
esponenziale.

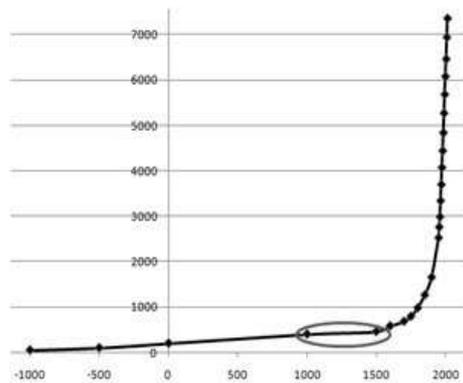


fig.1 Andamento demografico nel mondo
https://it.wikipedia.org/wiki/Popolazione_mondiale

Popolazione europea dal 1000 a.C.:

Le zone cerchiare evidenziano deviazioni dall'andamento esponenziale.

Dopo il 1500 d.C. turbolenze sociali frenano lo sviluppo. Attorno al 2000 (zona cerchiata in alto) l'andamento cambia, accenna a una curvatura verso il basso come nella curva logistica: una rapida crescita e un successivo rallentamento in prossimità del limite asintotico.

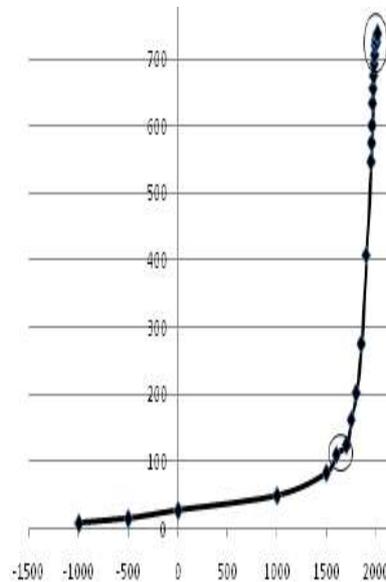


fig.2 Andamento demografico in Europa

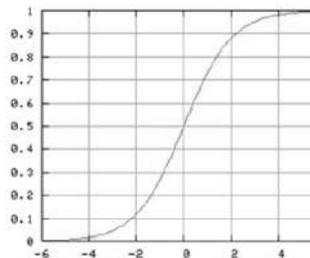


fig.3 [wikipedia.org/wiki/Equazione_logistica](https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_logistica)

Verhulst, la legge logistica

Il biologo Verhulst introduce nel modello dei fattori frenanti. Una forte crescita causa un aumento del numero di 'incontri' fra individui (processi riproduttivi), ma anche 'attriti' nella dinamica (sovraffollamento, insufficienza di risorse, ecc.), quindi una diminuzione del numero d'individui, che va col quadrato di N:

$$\dot{N}(t) = kN(t) - hN(t)^2 \quad \text{legge di Verhulst o legge logistica}$$

Con h legato a fattori ambientali o sociali. Chiamando x il numero d'individui:

$$\dot{x}(t) = kx(t) - hx(t)^2 \quad \text{da cui :}$$

$$t = \int \frac{dx}{(k-hx)x} = \frac{1}{k} (\ln x - \ln(hx - k))$$

$$\text{quindi: } x(t) = \frac{k \cdot e^{kt}}{h \cdot e^{kt} - 1} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k \cdot e^{kt}}{h \cdot e^{kt} - 1} = \frac{k}{h}$$

La popolazione cresce asintoticamente fino al valore $\frac{k}{h}$.

*Per la Drosophila Melanogaster,
il moscerino dell'aceto,
con $k=2$, $h=0.006$
e t espresso in settimane,
si ha l'andamento qui a fianco.
Con un valore limite a circa
340 individui.*

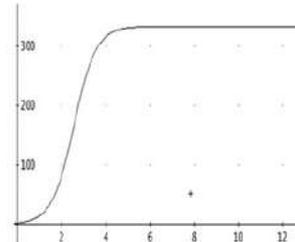


fig.4 Elaborazione computerizzata con Derive

Nelle situazioni storiche ci sono casi esemplari.

La demografia di Roma dalla fondazione all'unità d'Italia. La popolazione cresce con lo sviluppo della città finché le vicende storiche non determinano uno spopolamento improvviso. Poi cresce di nuovo, lentamente e fino ad un valore limite.

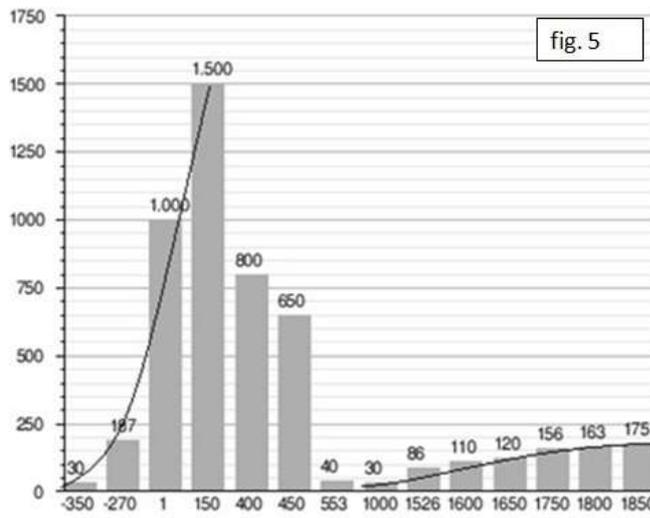


fig. 5

fig. 5
 In ordinate i numeri della popolazione in migliaia. La popolazione di Roma dalla fondazione. C'è un andamento malthusiano finché la città è stabile e prospera, raggiungendo 1.5 milioni di abitanti, per poi crollare. Dal sesto secolo

fig.5 Elaborazione grafica a cura di Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/demografia_di_Roma

all'unità d'Italia cresce con curva logistica, fino a 175000 abitanti.

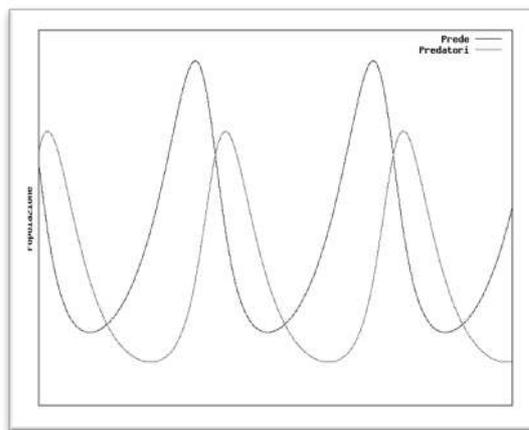


Fig. 6 Sistema di Lotka-Volterra

Lotka-Volterra

I precedenti modelli che descrivono bene l'andamento demografico, ma non tengono conto delle interazioni fra specie animali diverse, in particolare dove ci sia un rapporto preda-predatore. Il biologo U. D'Ancona pone al suocero, il matematico V. Volterra, il problema della fauna ittica nell'Adriatico. Durante la prima guerra mondiale l'attività dei pescatori era fortemente limitata. Molti erano al fronte, altri non uscivano in un mare che era diventato un teatro di guerra. D'Ancona nota un forte aumento dei pesci piccoli. Volterra, nel 1925, modella la situazione rifacendosi al lavoro di A. Lotka, con un sistema di equazioni differenziali che rappresentano la dinamica del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) - B \cdot x(t) \cdot y(t) \\ \dot{y}(t) = -C \cdot y(t) + D \cdot x(t) \cdot y(t) \end{cases} \quad (1)$$

Con x e y numero di prede e predatori, A tasso di crescita delle prede, B coefficiente di predazione, C tasso di mortalità dei predatori, D coefficiente di voracità. Tutti parametri positivi. Nel tempo è prevedibile un andamento di tipo periodico, sinusoidale, con sfasamento reciproco (fig. 6).

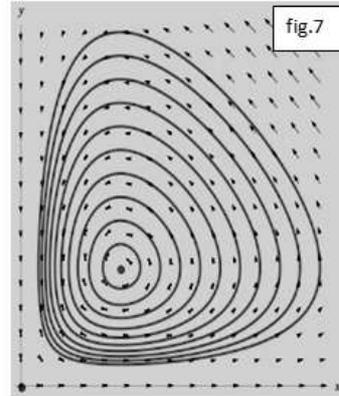
fig. 6 La popolazione delle prede $x(t)$ cresce in proporzione al loro numero ma è frenato dalla quantità d'interazioni $x(t) \cdot y(t)$ con i predatori. Il numero di predatori decresce se sono troppi, perché non c'è cibo per tutti, ma è favorito dagli incontri $x(t) \cdot y(t)$ con le prede.

Il diagramma delle fasi.

Una rappresentazione alternativa si ha ponendo in ascisse le prede e in ordinate i predatori.

fig. 7 Diagramma delle fasi. Prede x in ascisse e predatori y in ordinate.

Se le prede aumentano, ci spostiamo verso destra (tratto in basso). Di conseguenza i predatori lentamente aumentano (spostamento verso l'alto). Se i predatori aumentano molto, le prede diminuiscono (tratto a sinistra).



[https://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni di Lotka-Volterra](https://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Lotka-Volterra)

E così via, finché "l'orbita" si chiude e il ciclo si ripete. L'equilibrio si ha se le popolazioni non variano:

$$\dot{x} = \dot{y} = 0$$

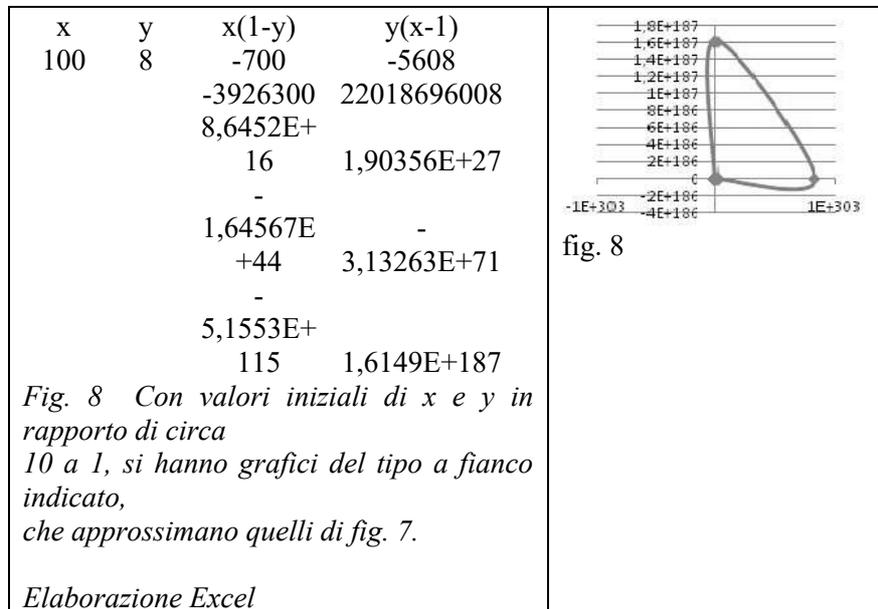
In tal caso il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} 0 = A \cdot x(t) - B \cdot x(t) \cdot y(t) \\ 0 = -C \cdot y(t) + D \cdot x(t) \cdot y(t) \end{cases} \quad (2)$$

da cui i valori di equilibrio sono $(C/D, A/B)$, oppure $(0,0)$.

Il secondo caso è banale: c'è equilibrio perché entrambe le specie si sono estinte.

In generale, se per semplicità poniamo uguali a 1 tutti i parametri, si ha un campo di vettori, "orbite" rappresentabili su foglio elettronico:



Effetto Butterfly

Dopo la seconda guerra mondiale, E. Lorenz, meteorologo e matematico, studia l'atmosfera e i sistemi complessi. Si accorge che più variabili si influenzano per "retroazione", che cambiamenti minimi di una variabile hanno conseguenze enormi e conia l'espressione "effetto farfalla": un battito d'ali può dar luogo a un ciclone.

fig. 9
Grafici di Lorenz, qui a fianco, che, peraltro, somigliano proprio a una farfalla.



Partendo, come prima, dalle equazioni (2), ma stavolta con x e y piccoli e prossimi fra loro (0.8 , 1.09), si hanno grafici del tipo di fig. 10, che approssimano quelli di Lorenz:

x	y	x(1-y)	y(x-1)
0,8	1,09	-0,072	-1,16848
-	-	0,15613056	1,350915437
-	-	0,05478862	-
-	-	4	-1,276900639
-	-	0,12474825	-
-	-	2	1,117609516
-	-	0,01467158	-
-	-	2	-1,134006616
-	-	0,03130925	-
-	-	2	1,169511515

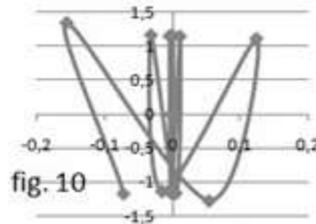


fig. 10 foglio Excel

Linearizzazione

Il sistema di equazioni (1) è non lineare. Purtroppo compare il termine in $x \cdot y$. Per linearizzarlo occorre cercarne gli autovalori.

Il suo jacobiano: $J(x; y) = \begin{vmatrix} A - By & -Bx \\ Cy & Cx - D \end{vmatrix}$

Calcolato nel punto di equilibrio non banale $(\frac{D}{C}; \frac{A}{B})$: $J\left(\frac{D}{C}; \frac{A}{B}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{BD}{C} \\ \frac{CA}{B} & 0 \end{vmatrix}$

Per linearizzarlo, si moltiplicano le due matrici: $\begin{vmatrix} 0 & -\frac{BD}{C} \\ \frac{AC}{B} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

Da cui: $\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{BD}{C} \cdot y(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{AC}{D} \cdot x(t) \end{cases}$

derivando la seconda:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{BD}{C} \cdot y(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{AC}{D} \cdot x(t) \end{cases} \quad \text{e per sostituzione: } \ddot{y} + AD \cdot y = 0$$

i cui autovalori sono $\pm i\sqrt{AD}$ e fornisce per $y(t)$ una soluzione di tipo sinusoidale. Derivando la prima, si ha una soluzione analoga per $x(t)$. Risultati che formalizzano gli andamenti di fig. 5.

Le orbite

Le "orbite" che, in Fig. 6, descrivono la dinamica delle popolazioni, possono essere considerate curve di livello su di una superficie che deriva dal sistema (1) di Lotka-Volterra.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) - B \cdot x(t) \cdot y(t) \\ \dot{y}(t) = -C \cdot y(t) + D \cdot x(t) \cdot y(t) \end{cases}$$

Infatti, ponendo per semplicità uguale a 1 le costanti e dividendo membro a membro:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$$

Da cui: $\left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$

Si ottiene: $F(x, y) = \log y + \log x - y - x + \text{cost.}$

che dà luogo a una superficie e alle relative curve di livello:

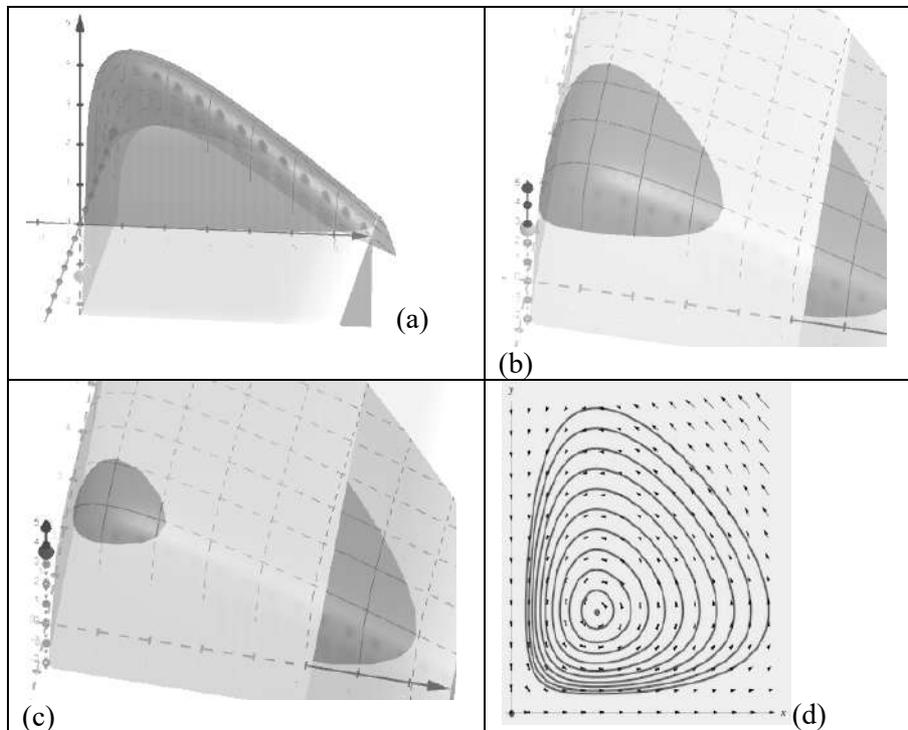


fig. 11

In (a), (b), (c) elaborazioni GeoGebra

(a) la superficie: $F(x, y) = \log y + \log x - y - x + \text{cost.}$

(b) e (c) le curve di livello, sezioni della superficie con piani

(d) grafici preda-predatore da:

https://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Lotka-Volterra

Conclusioni

I grafici riportati, nella loro freddezza, evidenziano fenomeni che possono essere drammatici: una crescita incontrollata porta a disastri (fig.5). In seguito, forse, lo sviluppo può riprendere, ma stavolta con crescita logistica, cioè fino a un preciso limite.

La specie che è più forte, se si espande a spese di un'altra, in modo avido e vorace, alla lunga subirà conseguenze. L'aggressività si ritorce contro chi la pratica.

Gli schemi visti (Malthus, Verhulst, Lorenz, Lotka-Volterra) sono esempi di come la scienza procede incrociando competenze diverse, con aggiustamenti e autocorrezioni. Esempi di come possa essere "fertile", cioè fornire modelli, magari freddi e astratti, ma carichi di significato.

G. Israel: "Paradossale percorso quello della scienza moderna che, per avvicinarsi di più alla realtà ... deve farsi più astratta! ".

Bibliografia

[1] Bertsch, Dal Passo, Giacomelli: Analisi matematica, McGraw-Hill, 2007

[2] Bramanti, Pagani, Salsa: Analisi matematica 1, Zanichelli, luglio 2008

[3] Giorgio Israel: La visione matematica della realtà, Laterza & figli Spa, marzo 1997,

[4] Giorgio Israel: Modelli matematici, Editori Riuniti, 1986

Siti

[5] https://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Lotka-Volterra

[6] https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_logistica

[7] https://it.wikipedia.org/wiki/Popolazione_mondiale

La Matematica come pratica di Libertà

Mathematics as practice of Freedom

Alessio Russo³

Abstract

This paper is an attempt to show that some of the keywords of pedagogical theories of Paulo Freire (1921-1997) can be read as essential properties of mathematical thought, which in this way becomes an educational tool for the growth and liberation of the individual.

“L’unico modo per affrontare un mondo non libero è diventare così assolutamente liberi che la propria esistenza sia un atto di ribellione” (A. Camus)

1 La Matematica: un problema educativo

Nonostante vari segnali positivi degli ultimi tempi, non mancano occasioni in cui si può verificare che in Italia vi è un basso livello di percezione della cultura scientifica e matematica. Purtroppo, paghiamo ancora lo scotto del retaggio di un’impostazione culturale-pedagogica novecentesca tipica del Neoidealismo di Croce e Gentile. Secondo Benedetto Croce la scienza ha una valenza puramente pratica e utilitaristica, priva di capacità cognitive autentiche. Essa viene così ad essere ridotta a mera specializzazione settoriale e a occupare una posizione subalterna rispetto alla “cultura universale”

³ Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania “Luigi Vanvitelli”, email: alessio.russo@unicampania.it

Comunicato da F. de Giovanni

umanistica. Sono emblematiche anche le parole di Giovanni Gentile, ministro della Pubblica Istruzione dal 1922 al 1924, secondo il quale la matematica è “*morta, infeconda, arida come un sasso*”, e lo studio delle scienze nella scuola ha prodotto “*dannosissimi frutti*”.

Come conseguenza di questo tipo di approccio, l’insegnamento-apprendimento scolastico della matematica è stato spesso sviluppato in modo storico, senza cioè tener conto dello sviluppo cronologico delle idee matematiche. Così personaggi come Pitagora, Euclide, Cartesio o Newton sono stati appiattiti su un orizzonte senza tempo, pure etichette appiccate ad aride formule o teoremi.

La constatazione di un’impostazione molto tecnicistica dell’insegnamento-apprendimento della matematica viene evidenziata dal fatto che spesso i contenuti matematici vengono recepiti dallo studente medio in modo meccanico e superficiale, privilegiando lo sviluppo di capacità di risoluzione di determinati problemi rispetto alla comprensione dei problemi stessi e delle idee che ispirano certi procedimenti. Molti di essi arrivano all’Università con chiare difficoltà di comprensione della struttura di un enunciato matematico, dei ruoli di ipotesi e tesi, del significato del concetto di dimostrazione. Ciò rammarica molto, soprattutto se si pensa che esistono matematici italiani di prim’ordine nel panorama internazionale la cui produzione scientifica raggiunge spesso traguardi di eccellenza.

Forse come primo passo per il superamento di questo stato di cose, al di là di una grande capacità di trasposizione didattica del sapere matematico, si dovrebbe insistere nel presentare la matematica non come un qualcosa di estraneo alla cultura generale o alla vita della persona comune, ma come un corpus perfettamente integrato con esse. Nell’introduzione del libro “*Istituzioni di Algebra Astratta*” [9], Lucio Lombardo Radice scrisse: “*Se avessi pensato (se pensassi) che la matematica è solo tecnica e non anche cultura generale; solo calcolo e non anche filosofia, cioè pensiero valido per tutti, non avrei fatto il matematico (non continuerei a farlo).*”

A volte, capita di leggere o ascoltare “divulgatori” che per giustificare lo studio della matematica si sforzano di redigere liste sempre più lunghe di sue applicazioni. Sicuramente qualche importante applicazione va evidenziata, ma forse sarebbe meglio soffermarsi maggiormente sugli aspetti intrinseci della

matematica, sul come il "fare matematica" non sia poi così distante da altre forme di sapere o di arte. A tal riguardo, tornano alla mente le parole scritte nel 1934 da E. Pound, secondo il quale *"la grande letteratura è semplicemente linguaggio investito, in somma misura, di significato. [In particolare] la poesia è la forma più sintetica di espressione verbale. In tedesco dichten (condensare) è il verbo corrispondente al sostantivo astratto dichtung che significa poesia"*.

E cosa è la matematica se non un certo tipo di linguaggio che tende a rappresentazioni (formule e teoremi) pregni di senso? Un esempio: *"Fissato un numero primo p , risulta che p è un divisore di $a^p - a$, comunque si considera un intero a "*. È questo il contenuto del famoso *Piccolo Teorema di Fermat* (1640). Esso permette di ottenere alcuni importanti risultati sui *numeri perfetti* (cioè i numeri che si possono scrivere come somma dei loro divisori propri), argomento della teoria dei numeri, la parte *"più pura della matematica pura"* (Davenport), e al tempo stesso, su tale teorema si basa il crittosistema RSA (1977) che ci consente di acquistare delle cose attraverso internet, tenendo sicuri i dati della nostra carta di credito (cfr. [12]).

Si pensi a come funziona il cervello, a come l'elaborazione del pensiero avvenga attraverso blocchi concettuali frutto di somiglianze e analogie. Se ciò non avvenisse, la normale memoria sarebbe impossibile e così la stessa vita. Saremmo come Funes, il personaggio di quel racconto di J. L. Borges, che a causa di un incidente, acquista una memoria potentissima in cui però non ci sono concetti ma solo una rappresentazione di moltissime cose che sussistono contemporaneamente: la sua "vita" diventa così un'insonnia perenne. Diceva H. Poincaré che la *"matematica è l'arte di chiamare cose diverse con lo stesso nome"*. Pertanto, quando si fa matematica non ci si allontana molto da quello che avviene nella testa di ognuno di noi. La scuola e la divulgazione matematica dovrebbero evidenziare di più questi aspetti.

L'importanza della matematica ed il suo ruolo centrale nella società sono stati spesso rimarcati da autorevoli esponenti del modo politico ed istituzionale. Persino Mariastella Gelmini, Ministro dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca dal 2008 al 2011, ebbe ad affermare che *"la matematica è una emergenza didattica nazionale; è necessario aprire una riflessione su apprendimento e didattica della materia"*. Il problema è che nelle loro intenzioni e nella pratica delle politiche scolastiche ed universitarie, la

matematica è spesso relegata a mero *utensile* volto all'acquisizione di competenze sempre più specialistiche. L'insegnamento della matematica diventa così la palestra in cui si *addestrano* gli individui alle competenze, al "saper fare" più che al "saper come", validi *esecutori* ben *classificati*, da inserire nel ciclo produttivo delle nostre società senz'anima asservite al profitto e all'efficientismo. Un quadro che, sia pure in una forma più lieve e velata, ma forse più subdola, fa venire in mente la società distopica retta dalle inflessibili leggi di una matematica distorta, descritta da E. I. Zamjatin [16] esattamente un secolo fa nel romanzo "*Noi*".

Dalle considerazioni precedenti appare evidente che la questione va inquadrata in un ambito più generale che coinvolge lo sviluppo educativo di un individuo nella sua totalità. Occorre quindi ripensare ad un modello educativo che scuota le coscienze, invece di narcotizzarle, che instilli il *dubbio metodico*, invece di fornire certezze preconfezionate, che susciti domande (e quindi *fruttuosa inquietudine*), invece di dare risposte e ricette. In altre parole, è necessaria un'educazione di ampio respiro antropologico che contrasti e *soverta* una realtà ingiusta ed opprimente e che abbia un orizzonte teleologico in cui vengano perseguiti i fini irrinunciabili che una *educazione liberatrice* è chiamata a promuovere. In tale ottica, sono un riferimento fondamentale, tra altri, le teorie educative del pedagogista brasiliano Paulo Freire (1921-1997), la cui "*Pedagogia degli oppressi*" ([5], 1968), figura tra le opere più significative del pensiero pedagogico del Novecento. La pedagogia di Freire, che in America Latina ha fortemente influenzato la *teologia della liberazione*, un tentativo volto a coniugare i principi del marxismo con quelli cristiani, trova delle anticipazioni nel metodo di Maria Montessori (1870-1952) e in quello di Lorenzo Milani (1923-1967).

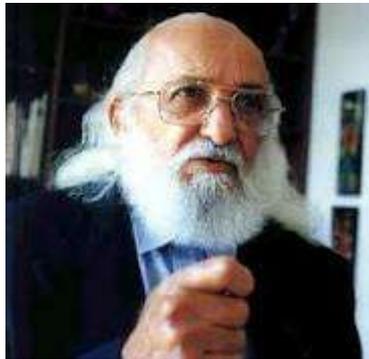


Figura 1 – Paulo Freire

Nella prossima sezione, prendendo come riferimento le parole chiave del pensiero di Freire, si cercherà di delineare un primo abbozzo di un percorso di avvicinamento alla matematica che si proponga di ridefinire alcune delle sue caratteristiche intrinseche e di utilizzarle come strumento educativo nella cornice liberatrice della pedagogia di Freire (si ricordi l'altra opera "*La Pedagogia come pratica di libertà*" ([4], 1967) da cui si è mutuato il titolo di questo articolo).

2 La Matematica per un'educazione liberatrice

Come è noto, la parola Educazione viene dal verbo latino *educere*, che significa "trarre fuori". L'educazione indica quindi un processo attraverso il quale l'educatore fa emergere (come?), fa sbocciare i "semi di verità" presenti nell'educando. In tale contesto, un esempio famoso è sicuramente il *metodo maieutico* di Socrate descritto da Platone in vari dialoghi (ad esempio, nel *Teeteto* e nel *Menone*).

Seguendo l'impostazione di Freire, che cosa, dunque, *non* dovrebbe essere l'educazione? Un'*educazione bancaria*, che trasforma gli educandi in recipienti, in vasi da riempire, riducendo così il processo educativo in un atto di continuo *deposito di contenuto*. In tal modo, si *dicotomizza* il rapporto fra educatore ed educando, dando al primo un ruolo attivo, come unico soggetto del processo educativo, e al secondo un ruolo esclusivamente ricettivo. Questo tipo di educazione alimenta la concezione che il sapere, la scienza e la storia siano *determinismo e non possibilità* e diventa strumento di *addomesticamento* dell'uomo. Come scrive in modo eloquente Freire "*viene*

attuata la burocratizzazione della mente: uno stato raffinato di estraniamento, di autodimissioni della mente, una sorta di conformismo dell'individuo, di accomodamento". Come si vede, si tratta di una concezione economicistica dell'educazione in cui il valore sociale di una persona viene ad essere "direttamente proporzionale" al suo potere d'acquisto.

Per converso, il percorso educativo si avvia nel momento in cui si entra in autentica relazione con la realtà abbandonando un'idea ingenua e superstiziosa di essa, spesso ereditata dalla cosiddetta cultura dominante dell'immobilismo.

Il presupposto dell'educazione è la consapevolezza, la presa di coscienza del fatto che la *"vocazione specifica dell'essere umano è quella di essere di più. Dove c'è vita c'è incompiutezza. [Gli uomini vanno visti] come esseri che vanno oltre se stessi, come progetti, come esseri che guardano in avanti, verso l'umanizzazione."*

L'educazione è *problematizzante*; essa si oppone ad ogni forma di passività come provocazione che responsabilizza. In questo contesto le dimensioni esistenziali diventano la ricerca, la curiosità e la creatività.

L'educazione è *dialogante*. *"Il dialogo è questo incontro di uomini, attraverso la mediazione del mondo, per dargli un nome, e quindi non si esaurisce nel rapporto io-tu. [...] Non più educatore dell'educando; non più educando dell'educatore; ma educatore-educando con educando-educatore". [...] In tal modo l'educatore non è solo colui che educa, ma colui che mentre educa, è educato nel dialogo con l'educando, il quale a sua volta, mentre è educato, anche educa."*

La ricaduta che questa concezione dell'educazione viene ad avere sull'insegnamento-apprendimento è evidente; la disponibilità ad insegnare e a imparare diventano strettamente correlate, quasi interscambiabili. Le caratteristiche dell'educazione dialogica sono sintetizzate da Freire nelle seguenti parole: *"amore", "umiltà", "autorevolezza", "ascolto", "speranza", "coerenza", "creatività"*. Nella *Pedagogia degli oppressi* Freire parla di amore come di quella preconditione, caratterizzata da autenticità, flessibilità, responsabilità, coraggio e intelligenza, che è *generatrice di atti di libertà*. In una cornice siffatta, l'educatore con coerenza e autorevolezza, ma anche con umiltà e disposizione all'ascolto, entra in empatia con l'educando e, attraverso

il dialogo e il confronto, lo porta gradualmente alla (ri)scoperta di quelle potenzialità che consentono lo *sviluppo integrale* dell'individuo, consapevolmente collocato nel mondo; il tutto supportato da una *speranza radicale* che dischiude *un nuovo cielo e una nuova terra* (Apocalisse, 21, 2) che per essere percorsi necessitano da ogni parte di una *autentica creatività*.

Come si colloca la matematica nel quadro educativo finora delineato? Innanzitutto, è importante ribadire che il ruolo della matematica non si esaurisce nell'essere mero linguaggio con cui si esprime la natura, ricordando quanto riportato da Galileo ne *Il Saggiatore* (1623), o, più prosaicamente, nell'essere strumento di acquisizione di competenze per cittadini efficienti. Ciò è chiarito già dall'etimologia della parola Matematica.

Infatti, Matematica viene dal greco *mathematikè* che significa “che concerne il sapere, la scienza”. È legata alla parola *màthema*, disciplina, al verbo *manthàno*, imparo, a *mathetès*, discepolo, e a *màthesis*, cognizione, dottrina. Insomma, la matematica è la scienza per eccellenza, e i *mathematikòs* sono coloro che sono “inclinati ad imparare”, cioè ad “apprendere con l'intelletto”. L'azione liberatrice che l'educazione ha sull'individuo si collega in modo naturale alla matematica poiché, come disse Georg Cantor (1845-1918), “*la vera essenza della Matematica è nella sua libertà.*”

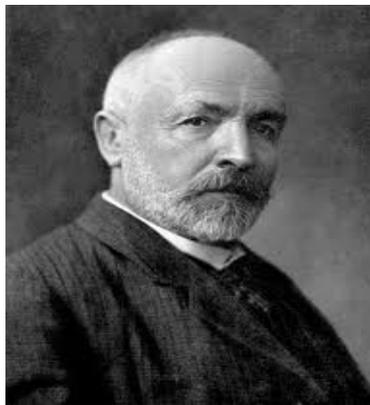


Figura 2 – Georg Cantor

L'intraprendenza mentale è una delle attitudini fondamentali del matematico; essa porta a immaginare una moltitudine di mondi possibili, ciascuno retto

dalla propria coerenza. Si pensi al mondo non euclideo della geometria, agli spazi con infinite dimensioni, a sofisticate strutture algebriche. O alla rivoluzione del pensiero inaugurata da Cantor alla fine dell'Ottocento con la scoperta (o creazione?) dell'*Aritmetica Transfinita*, che ha permesso, attraverso la sistematizzazione rigorosa del concetto di *infinito*, la nascita della Teoria degli Insiemi, il linguaggio fondamentale della matematica moderna. È la consapevolezza dell'incompiutezza, spesso inconscia perché connaturata all'uomo, che si fa teleologia dell'oltre. Parafrasando laicamente alcune parole di Agostino di Ippona scritte all'inizio delle Confessioni (398 d.C.): “*siamo fatti per l'infinito e per l'oltre, e il nostro cuore e la nostra mente non hanno pace finché non trovano riposo in quel luogo*”.

Quando la pratica di un'educazione liberatrice produce quella che Freire chiama la *coscientizzazione* delle forme di oppressione sociali, politiche e culturali, inevitabilmente, l'orizzonte si dischiude alla *bellezza* che è “*lo splendore del vero e del bene*” (Platone) o, escatologicamente, “*la promessa di felicità*” (Stendhal). Come è noto, molti matematici ritengono che la bellezza sia un requisito fondamentale che un concetto o un teorema debba possedere affinché possa avere degna cittadinanza nella matematica. Ad esempio, G. H. Hardy nella sua “*Apologia di un matematico*” ([8], 1940) collega la bellezza di un teorema alla sua *serietà*, cioè “*alla significatività delle idee matematiche che esso riesce a mettere in relazione in modo naturale e illuminante*”. Si tratta quindi di una bellezza che hegelianamente rimanda ad un'armonia delle forme in un contesto ordinato e razionale, una sorta di necessità ineluttabile a cui, non solo la realtà, ma ogni mondo possibile debba conformarsi. Un'idea che B. Russell nel 1902 descrisse plasticamente con le seguenti parole (cfr. [11], p. 58):

“La matematica, giustamente considerata, non contiene soltanto la verità, ma la bellezza suprema, una bellezza fredda e austera, come quella della scultura, senza fare appello ad alcuna parte della nostra debole natura, senza le attrattive sensuali della pittura o della musica, e tuttavia sublimemente pura, capace di quell'alta perfezione che soltanto la grandissima arte esprime.”

Ricorda molto lo spirito apollineo di cui parla F. Nietzsche nell'opera “*La nascita della tragedia*” ([10], 1872), dove però, accanto ad esso, c'è tutto il pathos e la vita dello spirito dionisiaco. La stessa tensione, lo stesso

combattimento, la stessa umanità si ritrova nella descrizione della ricerca matematica fatta da A.Weil in un saggio del 1960 (cfr. [15], p. 59)

“Come sanno tutti i matematici, nulla è più fecondo di queste oscure analogie, questi indistinti riflessi tra una teoria e l'altra, queste carezze furtive, queste indecifrabili foschie; e nulla dà maggiore piacere allo studioso. Poi, un giorno, l'illusione svanisce, il presentimento diventa certezza, le teorie gemelle rivelano la loro origine comune prima di svanire. Come insegna la Gita si giunge alla conoscenza e all'indifferenza nello stesso tempo. La metafisica è diventata matematica, pronta a formare la materia di un trattato la cui fredda bellezza non saprà più emozionarci.”

Sul significato della bellezza in matematica si veda anche [14].

Queste parole fanno pensare anche al *divino ondeggiamento di idee confuse e l'indefinito*, di cui parla Leopardi nello “Zibaldone” (1817-1832), come di condizioni essenziali alla vera poesia.

In tale ordine di idee, viene in mente una delle tracce proposte nel 1996 per il tema dell'esame di maturità del Liceo Scientifico. Si chiedeva agli studenti di commentare la seguente frase scritta da D. E. Smith nel 1947: *“La matematica è generalmente considerata proprio agli antipodi della poesia. Eppure la matematica e la poesia sono nella più stretta parentela, perché entrambe sono il frutto dell'immaginazione. La poesia è creazione, finzione; e la matematica, [...], è la più sublime delle finzioni.”*

In matematica la scelta e l'impostazione di un problema sono spesso più complicate, e per questo più affascinanti, della sua risoluzione. La capacità di porsi *buoni problemi* richiede esperienza, immaginazione e attitudine a pensare in modo non convenzionale. È il *pensare altrimenti* che crea le condizioni per il progresso scientifico e, sul piano educativo, per affrancarsi dalla passività ricettiva della realtà. In questo la matematica, come oggetto di ricerca, ma anche come soggetto di insegnamento-apprendimento, è uno strumento eccezionale.

L'educazione dialogante procede per posizioni di problemi. Le soluzioni non hanno come fine soltanto il superamento di un problema, ma gettano le basi per nuove ricerche. Essa costituisce anche il supporto teorico del cosiddetto metodo del *problem posing* che insieme a quello del *problem solving*

rappresentano il tentativo concreto di trasferire nella didattica della matematica la filosofia del “fare matematica”. Il dialogo, la comunità e lo stare insieme con pari dignità, sono aspetti imprescindibili della ricerca scientifica. Coloro che hanno maggiore esperienza, i maestri, guidano con pazienza e autorevolezza (non autorità) gli allievi, i quali, con umiltà e fiducia sempre più consapevole, si incamminano verso un orizzonte comune, i cui “colori” sono l’attenzione selettiva (soffermarsi solo su ciò che è essenziale e decisivo), il linguaggio pregno di significato, l’amore per il sistema e la capacità di individuare somiglianze e forme fra cose diverse.

Prima di concludere queste riflessioni, è opportuno spendere qualche parola sul rapporto che il concetto di *verità* ha con l’educazione e la matematica. Naturalmente, si tratta di considerazioni molto parziali e soggettive; questo per le notevoli difficoltà, legate alle innumerevoli implicazioni filosofiche, teologiche, scientifiche e sociali, che un tale argomento comporta. In ambito squisitamente educativo (nell’accezione freireiana, quella che è stata finora seguita), si potrebbe identificare la verità con la giustizia e il bene sociale conquistati con la “*lotta di liberazione*” seguita alla presa di coscienza di sé e del valore intrinseco e universale che l’uomo ha. In questo senso, si tratta di una verità a cui si accede gradualmente, passo dopo passo, e che spesso resta confinata in un orizzonte ideale verso cui si tende e che dà un significato alla propria esistenza.

D’altro canto, è ben noto che fino all’Ottocento la verità matematica ebbe una *valenza assoluta*, nel senso che la matematica, in quanto modello razionale della realtà, non poteva che essere investita di Verità, espressa attraverso un linguaggio rigoroso e ineccepibile. La nascita delle *geometrie non euclidee* diede vita ad un processo di relativizzazione del concetto di verità: si riconobbe che esse, in quanto coerenti (cioè, scevre da contraddizioni), erano *vere* al pari della *geometria euclidea*. Le diverse geometrie scoperte furono poi classificate da F. Klein mediante la grande forza unificatrice della nascente Teoria dei Gruppi, realizzando così il famoso *Programma di Erlangen* che egli annunciò nel 1872 durante il suo discorso di insediamento all’Università di Erlangen.

Il disvelamento di nuovi paesaggi matematici, retti dalla sola coerenza, diede grande entusiasmo ai matematici, i quali, affrancati dalle “catene” della realtà, si sentirono liberi di percorrere nuovi orizzonti. Col passare del tempo,

l'albero della matematica si ritrovò ad essere arricchito da numerosi rami che a un certo punto cominciarono a pesare sulle radici. Fu così, fuor di metafora, che in seno alla Teoria degli Insiemi, che si stava sviluppando (con la Logica Matematica) come linguaggio fondamentale con cui codificare le nuove teorie, spuntarono le *antinomie* che portarono all'inizio del secolo scorso alla cosiddetta *Crisi dei Fondamenti*. Un approdo della massima importanza di questo momento, per certi versi drammatico e affascinante della storia della matematica, che vide tra i protagonisti matematici di prima grandezza, come Russell, Frege, Hilbert, Peano, Gödel e altri, fu la dimostrazione dei famosi *teoremi di incompletezza* di Gödel.

Questi risultati evidenziarono, tra altre cose, il carattere sfuggente che in matematica ha la verità rispetto alla dimostrabilità, poiché è sempre possibile individuare in una teoria matematica “sufficientemente ricca”, proposizioni vere ma non dimostrabili. La crisi dei fondamenti, con la messa in discussione delle precedenti certezze, restituì un'immagine più umana della matematica, che da scrigno di verità assolute, diventò, per usare le parole paradossali di Russell, “*la sola scienza esatta in cui non si sa mai di cosa si sta parlando né se quello che si dice è vero*”. Oggi possiamo dire più sensatamente, in contrapposizione al noto luogo comune, che invece *la matematica è opinione* e che, ad esempio, l'affermazione “ $2+2=4$ ” è vera solo in senso relativo.

Il lettore desideroso di approfondire gli ultimi argomenti può far riferimento, tra altri, ai libri [1] e [2].

Dal discorso precedente emerge che il nucleo centrale del “fare matematica” è la *dimostrazione*, intesa non solo come raggiungimento di un risultato (il teorema), ma come il percorso che usa l'essenziale, che riduce al massimo le ridondanze, e spesso crea gli strumenti per altri risultati. In altre parole, la dimostrazione ha un valore non minore del risultato che intende provare, ma contribuisce insieme ad esso al valore estetico del tutto.

Anche nell'insegnamento-apprendimento della matematica si dovrebbe porre l'accento sul ruolo educativo della dimostrazione, su come individuare la strada migliore per raggiungere una tesi, congetturando, sbagliando e congetturando di nuovo. L'errore non ha mai una connotazione negativa. Per molti pedagogisti ed insegnanti l'errore è visto come qualcosa da evitare. Infatti spesso “*insegnanti e studenti non sono disposti ad assumere i rischi del*

comprendere e si accontentano dei più sicuri compromessi delle risposte corrette. In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia avuto successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte corrette” (H. Gardner, 1991). Invece, l'errore è una tappa fondamentale del percorso educativo dialogico perché mette l'allievo nelle condizioni di scoprire da solo le difficoltà insite in un determinato contesto e a individuare la strada giusta per superarle (cfr. [13] e [17]).

3 Conclusioni

Le precedenti riflessioni sono state un tentativo volto a rileggere alcune delle caratteristiche intrinseche della matematica nella cornice delle parole chiave della pedagogia di Freire. Tale approccio ha avuto come scopo principale quello di liberare la matematica dal ruolo meramente strumentale in cui viene spesso relegata, ponendo esclusivamente l'attenzione sulle competenze e i procedimenti che essa fornisce, con la speranza di contribuire a promuovere la sua funzione nella *Bildung*, cioè nella formazione integrale dell'individuo, che ha coscienza di sé, del proprio valore intrinseco e del suo ruolo come cittadino del mondo.

Negli ultimi decenni, il mercato globalizzato, dominato dal neoliberismo più sfrenato e dal *pensiero unico* (il cosiddetto *politically correct*), ha acuito le disuguaglianze sociali e ha imposto un modello educativo economicistico e autoritario. A scopo esemplificativo, si ricorda qualche tappa del processo perverso che ha portato a questa situazione.

Nel rapporto intitolato “*Educazione e competenza in Europa*”, pubblicato alla fine del 1989 dall'ERT, la *Tavola Rotonda Europea degli Industriali*, si sottolinea “*l'importanza strategica vitale della formazione e dell'educazione per la competitività europea*” per “*un rinnovamento accelerato dei sistemi d'insegnamento e dei loro programmi*”. In particolare, si legge che “*l'industria non ha che un'influenza molto debole sui programmi impartiti*”, che gli insegnanti hanno “*una comprensione insufficiente dell'ambiente economico, degli affari e della nozione di profitto*”, e che “*non comprendono i bisogni dell'industria*”. In un successivo documento si “*suggerisce*” di “*moltiplicare i partenariati tra le scuole e le imprese*”, si esortano gli industriali a “*prender parte attiva allo sforzo educativo*” e si chiede ai responsabili politici “*di coinvolgere le industrie nelle discussioni concernenti*

l'educazione". Nel *Trattato di Maastricht* (1992), all'articolo 192, si accordano per la prima volta alla *Commissione Europea* competenze relative all'insegnamento ratificate poi nel *summit di Lisbona* del 2000 ed in successivi documenti. La Commissione Europea pubblica, a fine gennaio 2001, il testo strategico "*I futuri obiettivi concreti dei sistemi di educazione*", in cui si propone come obiettivo principale per l'Europa quello di "*diventare l'economia della conoscenza più competitiva e dinamica del mondo, capace di una crescita economica duratura attraverso la diversificazione, la flessibilità e la deregolamentazione dei sistemi di istruzione e formazione*".

Nella cornice verticistica precedentemente descritta, si è assistito alla *reductio ad mercaturam* della Scuola e dell'Università; l'autonomia, le capacità e la libertà del docente hanno ceduto il passo alle cosiddette metodologie e alla burocratizzazione che, calate dall'alto, hanno svilito e umiliato il suo ruolo sociale e culturale. In tal modo, è stato stravolto anche l'articolo 33 della Costituzione secondo cui "*l'arte e la scienza sono libere e libero ne è l'insegnamento*". Il peso soffocante di questo nuovo ordine autoritario, regolato da un meccanismo valutativo impersonale e mostruoso (che ricorda un po' i Guardiani della società distopica del romanzo "Noi", citato in precedenza), si avverte anche nel linguaggio aziendalistico utilizzato, dove i risultati della ricerca si chiamano *prodotti*, la conoscenza acquisita è misurata in *crediti formativi* e "*gli insegnanti sono considerati risorse umane e vengono gestiti al pari di strumenti finanziari e strutturali con efficienza ed efficacia, in un'ottica di tipo aziendalista tesa a contenere i costi per massimizzare i profitti (nel senso degli esiti)*" (cfr. [3], p. 255).

All'inizio del quarto capitolo della Psicologia degli oppressi (cfr. [5], p. 121), Freire afferma che "*gli uomini sono esseri del 'che fare', perché il loro 'che fare' è azione e riflessione. È prassi. È trasformazione del mondo. Se il 'che fare' è prassi, il fare dell'uomo deve avere una teoria che necessariamente lo illumini. Il 'che fare' è teoria e pratica. È riflessione e azione.*

Queste parole mostrano chiaramente che se si vuole trasformare una certa realtà, l'azione va sostenuta dalla riflessione, dalla consapevolezza, dalla *coscientizzazione* del proprio stato e della propria *classe di appartenenza*, e dalla conoscenza di quell'angolo di mondo. In questo processo di trasformazione gioca un ruolo fondamentale una *educazione liberatrice*, come quella delineata nell'opera di Freire (per approfondire la quale, oltre ai già

citati volumi [4] e [5], si consigliano [6] e [7]), perché, come disse Goethe, *“non c’è peggior schiavo di chi non sa di esserlo, non c’è peggior servo di chi è stato abituato a chiamare libertà la schiavitù che gli è stata imposta”*.

In tale contesto, l’insegnamento della matematica, se riesce a fornire quell’autonomia mentale come scopo pedagogico che è di gran lunga superiore all’apprendimento delle capacità esecutive, anche se perfette, allora potrà contribuire alla formazione e allo sviluppo di un individuo che sarà padrone del proprio destino ed avrà la forza e l’intelligenza di saperlo realizzare.

Bibliografia

- [1] BOTTAZZINI U.: Il flauto di Hilbert, Utet, Torino, 1990.
- [2] BOYER K. B.: Storia della Matematica, Oscar Mondadori, Milano, 1990.
- [3] COLELLA S.: GENERALI D., MINAZZI F., La scuola dell’ignoranza, Mimesis, Milano, 2019.
- [4] FREIRE P.: L’educazione come pratica di libertà, Mondadori, Milano, 1975.
- [5] FREIRE P.: La pedagogia degli oppressi, Edizione Gruppo Abele, Torino, 2011.
- [6] FREIRE P.: Pedagogia dell’autonomia, Edizione Gruppo Abele, Torino, 2014.
- [7] FREIRE P.: Pedagogia della speranza, Edizione Gruppo Abele, Torino, 2014.
- [8] HARDY, G. H.: Apologia di un Matematico, Garzanti, Milano, 1989.
- [9] LOMBARDO RADICE L.: Istituzioni di Algebra Astratta, Feltrinelli, Milano, 1965.
- [10] NIETZSCHE, F.: La nascita della tragedia, Adelphi, Milano, 1978.

- [11] RUSSELL B.: *Misticismo e logica e altri saggi*, Tea, Milano, 2010.
- [12] RUSSO A.: *Il Piccolo Teorema di Fermat e la Crittografia*, *Periodico di Matematiche*, 2-3 (2007), 109-121.
- [13] SIETY A., *Matematica, mio terrore. Alla scoperta del lato umano della matematica*, Salani, Milano, 2001.
- [14] VITALE F., RUSSO A.: *Mathematics: revelation of forms: Overlappings of Mathematics and Humanities*, 13-31, *Quad. Mat.* 29, Dept. Math. Phys., Università della Campania 'L. Vanvitelli', 2017.
- [15] WEIL A.: *La fredda bellezza*, Castelvechi, Roma, 2014.
- [16] ZAMJATIN E.: *Noi*, Oscar Mondadori, Milano 2020.
- [17] ZAN R.: *Difficoltà in matematica*, Springer, 2007.

Brevi note sull'unificazione dei principali metodi di interpolazione statistica

Brief notes on the unification of the main methods of statistical interpolation

Antonino Onorato¹

Abstract: In this article an unification method on the main statistical interpolation procedures developed by the statistician Vittorio Amato is exposed.

Premessa

Quando si parla dei padri fondatori della statistica italiana ci si riferisce normalmente a Rodolfo Benini, Marcello Boldrini, Corrado Gini. Si tratta sicuramente dei nomi più noti. Ma se andiamo più indietro nel tempo è doveroso menzionare anche Luca de Samuele Cagnazzi, Angelo Messedaglia, Antonio Gabaglio e Luigi Bodio [1]. Queste autorevoli personalità - veri e propri giganti della scienza statistica- hanno ampiamente sviluppato e introdotto in Italia la statistica descrittiva. Tuttavia accanto ad essi diversi studiosi - meno noti di quelli citati - hanno nondimeno svolto un'intensa attività di ricerca nell'ambito della statistica metodologica e fra questi credo meriti una menzione particolare il matematico e statistico Vittorio Amato. Assistente di statistica ed economia politica fin dall'inizio degli anni '40 del secolo scorso, Amato divenne successivamente professore di statistica,

¹ Socio dell'Unione Matematica Italiana. Responsabile di Sezione Consiglio di Stato-TAR, Via Flaminia, 189 00196 ROMA.
Comunicato da F. de Giovanni

statistica metodologica ed economica e statistica matematica presso la facoltà di economia e commercio dell'Università degli studi di Catania.

Per brevi periodi insegnò anche nelle Università di Napoli e Messina [2]. Nel 1947 Amato pubblica sul giornale degli economisti una memoria [3] nella quale espone un originale metodo di unificazione matematica di quei principali metodi di interpolazione statistica - di cui si parlerà nel paragrafo successivo - che fino ad allora, e anche oggi, venivano e vengono trattati con procedure matematiche differenti e separate. Se sfogliamo gli odierni trattati di statistica, nei capitoli dedicati all'interpolazione e regressione, non si fa minimamente cenno al metodo di Amato. Credo invece che meriti di essere conosciuto non solo perché si tratta di un metodo matematico elegante, semplice e potente, ma anche perché rientra nei cosiddetti metodi di unificazione, i quali, dalla fisica teorica alla matematica pura e applicata, hanno sempre affascinato la mente umana e rappresentato il punto di arrivo delle principali ricerche scientifiche.

Queste note hanno lo scopo di far conoscere tale metodo, la cui esposizione presuppone, però, una breve introduzione ai principali metodi di interpolazione statistica.

1 L'interpolazione statistica e i suoi principali metodi

Dati gli n punti di coordinate $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, la finalità dell'interpolazione statistica [4] non è quella di imporre il passaggio di una curva teorica per gli n punti empirici, ma quella di determinare una curva - tra le infinite curve passanti fra gli n punti - che soddisfi opportune relazioni matematiche di uguaglianza tra i valori empirici y_1, y_2, \dots, y_n e quelli teorici espressi da una funzione matematica $y = f(x)$. Così, ad esempio, nel metodo dei minimi quadrati [5] la condizione da imporre è quella di minimizzare la funzione

$$\psi(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_k)]^2 \quad (1.1)$$

formata dai valori empirici y_i e da quelli teorici espressi dalla funzione $y = f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_k)$.

Uguagliando a zero le derivate parziali della funzione ψ rispetto ai parametri a_0, a_1, \dots, a_k si perviene ad un sistema di equazioni dette normali che ci permette di determinare i parametri incogniti della funzione interpolatrice. Nel metodo delle somme [6] invece i valori empirici y_1, y_2, \dots, y_n vengono suddivisi e sommati in tanti gruppi quanti sono i parametri incogniti della funzione teorica. Il sistema risolvete sarà quindi formato da un numero di equazioni pari al numero dei parametri incogniti. Ogni equazione del sistema esprime una relazione di uguaglianza tra il relativo gruppo – formato dalla somma di un numero variabile di valori empirici $y_1, y_2, \dots, y_{k < n}$ - e la corrispondente somma delle ordinate teoriche con le quali si rappresenta la funzione interpolatrice. La risoluzione del sistema ci consente di determinare i parametri incogniti della funzione scelta a rappresentare l'andamento del fenomeno studiato. Nel metodo dei momenti – le cui origini risalgono a Gauss, ma ampiamente utilizzato da Karl Pearson sin dal 1894 [7] - le equazioni del sistema risolvete esprimono invece l'uguaglianza di altrettanti momenti, empirici e teorici, a partire da quelli di ordine zero. Tale uguaglianza viene espressa simbolicamente dalla relazione :

$$A m_k = \sum_{i=1}^n (x_i - A)^k y_i =_A \mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - A)^k f(x_i) \quad (1.2)$$

nella quale troviamo, oltre a valori empirici y_i e teorici $f(x_i)$, il parametro A di riferimento per il calcolo dei momenti ed il parametro k che ne rappresenta l'ordine a partire da zero fino a $k = R - 1$ dove R indica il numero dei parametri incogniti della funzione teorica. Rispetto al metodo dei minimi quadrati quello dei momenti consente la trattazione analitica di funzioni non lineari rispetto ai parametri.

Il metodo delle differenze, sviluppato dallo statistico Felice Vinci nel 1924 [8], si basa sulla nozione di differenza finita, ossia $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, con k numero intero, e impone come condizione di accostamento della funzione teorica a quella empirica l'uguaglianza delle differenze successive, di ordine variabile in relazione al numero dei parametri incogniti, tra i valori teorici e quelli empirici. Nel metodo delle aree – proposto dal matematico Francesco Paolo Cantelli nel 1905 [9] - i valori osservati $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ non si riferiscono a valori singoli ma ad intervalli di valori della variabile statistica e vengono rappresentati graficamente mediante un istogramma.

Prescelta una funzione interpolatrice di un numero k di parametri, il sistema che ci consente di determinare i parametri incogniti sarà formato da k

equazioni ognuna delle quali esprime la condizione di uguaglianza tra la relativa area sottesa da un tratto della curva teorica e l'asse delle ascisse e la corrispondente area di una parte dell'istogramma dei valori empirici.

Prima di concludere questo breve panorama sui metodi interpolatori è opportuno esporre brevemente anche il metodo delle Sintesi. Tale metodo, formulato dallo statistico Roberto Mogno [10], è meno noto dei precedenti ma altrettanto importante e si basa sulla nozione di Sintesi K^{ma} media degli n valori empirici $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ espressa dalle relazioni

$$\frac{\sum_{i=1}^h S_{1,i}}{\binom{n}{k}}, \frac{\sum_{i=1}^h S_{2,i}}{\binom{n}{k}}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^h S_{k,i}}{\binom{n}{k}} \quad (1.3)$$

dove k indica il numero degli intervalli di suddivisione del campo di variabilità della variabile indipendente e h tutte le diverse modalità relative a tale suddivisione. Premesso che k è pari al numero dei parametri incogniti della funzione interpolatrice, l'impianto teorico di tale metodo è costituito da un sistema di k equazioni matematiche ognuna delle quali esprime una relazione di uguaglianza tra le Sintesi teoriche e quelle empiriche. Inoltre è importante aggiungere, ai fini del nostro studio, che quando i valori della variabile indipendente sono pari e coincidono con i primi n numeri naturali, l'interpolazione di una funzione razionale intera di grado k con il metodo delle Sintesi fornisce gli stessi valori dei parametri che si otterrebbero con il metodo dei minimi quadrati.

2 Analisi dettagliata di alcuni dei principali metodi di interpolazione statistica quando la funzione interpolatrice è una funzione razionale intera

Esponiamo più diffusamente, in dettaglio, alcuni dei principali metodi di interpolazione statistica, brevemente descritti nel paragrafo precedente, per i quali Vittorio Amato ha definito la matrice caratteristica, quando la funzione da adattare ai dati empirici è una funzione razionale intera.

2.1 Metodo dei minimi quadrati

Abbiamo visto che nel metodo dei minimi quadrati la condizione da imporre è quella di minimizzare la funzione

$$\psi(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_k)]^2 \quad (2.1.1)$$

formata dai valori empirici y_i e da quelli teorici espressi dalla funzione $y = f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_k)$. Vediamo lo sviluppo analitico di tale metodo quando la funzione da adattare ai dati empirici è una funzione razionale intera

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k \quad (2.1.2)$$

si ha così l'uguaglianza

$$f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_k) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k \quad (2.1.3)$$

e la (2.1.1) diventa

$$\psi(a_0, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k)]^2 = \textit{minimo} \quad (2.1.4)$$

che ci consente, risolvendolo, di determinare i valori dei parametri incogniti.

Il metodo delle somme presenta l'inconveniente dell'arbitrarietà nella scelta degli intervalli dei termini che costituiscono le sottodistribuzioni. Comunque in alcuni casi, soprattutto quando si ha la sensazione che i valori empirici y_i siano rudimentali ed imprecisi, la libertà di scelta è un vantaggio, in quanto rende possibile la compensazione degli errori all'interno dei singoli gruppi considerati.

2.3 Metodo delle differenze

Il metodo delle differenze, come abbiamo già accennato, si basa sulla nozione di differenza finita, ossia $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, con k numero intero.

Se i valori di ascissa variano in progressione aritmetica, la condizione di adattamento tra valori empirici e valori teorici $f(x_i; a_0, a_1, a_2, \dots, a_k)$ può essere espressa dal seguente sistema costituito da $k + 1$ relazioni di uguaglianza, ossia

$$\sum_{i=1}^n \Delta^r [f(x_i; a_0, a_1, a_2, \dots, a_k)] = \sum_{i=1}^n \Delta^r y \quad (2.3.1)$$

con $(r = 0, 1, \dots, k)$.

Inoltre, se i valori di ascissa x_i formano una progressione aritmetica, si ha sempre $\Delta^{r+1} x_i^r = 0$.

Se nel sistema (2.3.1) poniamo

$$f(x_i; a_0, a_1, a_2, \dots, a_k) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

si ha

$$\begin{cases} y_1 = \bar{y}_1 \\ y_2 = \bar{y}_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_k = \bar{y}_k \end{cases} \quad (2.4.2)$$

dove le y_1, y_2, \dots, y_k sono le Sintesi (2.4.1) .

Se la funzione interpolatrice è una funzione razionale intera espressa dall'Autore del Metodo delle Sintesi – Roberto Mogno [10] - nel seguente modo

$$y = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_kx^{k-1} \quad (2.4.3)$$

il sistema (2.4.2) diventa

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1^3 + \dots + a_kx_1^{k-1} \\ y_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 + a_4x_2^3 + \dots + a_kx_2^{k-1} \\ \dots\dots\dots \\ y_k = a_1 + a_2x_k + a_3x_k^2 + a_4x_k^3 + \dots + a_kx_k^{k-1} \end{cases} \quad (2.4.4)$$

nel quale le y_1, y_2, \dots, y_k , sono le Sintesi K^{me} medie dei valori empirici, mentre le $x_1, x_2, \dots, x_k; x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2; x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_k^{k-1}$ sono, rispettivamente, le Sintesi K^{me} medie dei valori della variabile, quelle dei quadrati dei valori della variabile ed infine quelle delle potenze $(K-1)^{me}$ dei valori della variabile.

Come esempio di applicazione consideriamo la retta di equazione

$$y = a_1 + a_2x \quad (2.4.5)$$

con la quale interpoliamo i seguenti valori empirici

$$y_1, y_2, \dots, y_n \quad (2.4.6)$$

in questo caso $K = 2$ ed i numeratori delle Sintesi, $\sum_{i=1}^{i=h} S_{1,i}, \sum_{i=1}^{i=h} S_{2,i}$, esprimono la somma di $h = n - 1$ valori di S , nel seguente modo

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_{1,i}}{\binom{n}{2}} = \frac{y_1 + (y_1 + y_2) + \dots + (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})}{\binom{n}{2}}$$

e

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_{2,i}}{\binom{n}{2}} = \frac{y_n + (y_n + y_{n-1}) + \dots + (y_n + y_{n-1} + \dots + y_2)}{\binom{n}{2}}$$

(2.4.7)

Analogamente possiamo determinare i valori delle Sintesi K^{me} medie dei valori della variabile x .

Ora se gli n valori della x corrispondono ai primi n numeri naturali i valori delle Sintesi possono essere calcolati rapidamente con le formule definite da Mogno ed espresse dalle relazioni

$$x_1 = \frac{n+1}{3}, \quad x_2 = \frac{2(n+1)}{3}$$

in tal modo il sistema risolutivo diventa

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + \frac{n+1}{3}a_2 \\ y_2 = a_1 + \frac{2(n+1)}{3}a_2 \end{cases}$$

che ci consente di determinare i parametri incogniti a_1, a_2 .

Adesso vediamo come Vittorio Amato sia riuscito ad unificare matematicamente questi diversi procedimenti interpolatori nell'adattamento ai dati empirici di una funzione razionale intera di grado k , ossia

$$y = \sum_{i=0}^k a_i x^i .$$

3 Vittorio Amato e l'unificazione dei principali metodi di interpolazione statistica

Nel 1947 Vittorio Amato pubblica sul "Giornale degli Economisti" una memoria dal titolo "Sulle matrici caratteristiche di alcuni metodi di interpolazione statistica". Si tratta di uno studio teorico estremamente innovativo e originale non solo per l'argomento trattato - l'unificazione dei principali procedimenti interpolatori - ma anche perché l'Autore fa ricorso ad uno strumento matematico - le matrici - fino ad allora del tutto ignorato nell'ambito della statistica metodologica. Dunque vediamo in che modo Amato unifica i vari metodi di interpolazione statistica quando la funzione da interpolare è una funzione razionale intera di grado k definita dall'espressione:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$$

consideriamo i valori $x_j, y_j (j = 1, 2, \dots, n)$ e definiamo le due matrici M ed M_i

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^k & x_2^k & x_n^k \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^k & x_2^k & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \begin{matrix} (0 \\ (1 \\ \dots \\ (i \\ \dots \end{matrix} \quad (3.2)$$

le due matrici sono rettangolari poiché in tema di interpolazione statistica, il numero delle colonne (n) è diverso da quello delle righe $(k + 1)$. Pertanto le matrici M ed $M_i (i = 0, 1, 2, \dots, k)$ sono del tipo $(k + 1, n)$. Solo nell'ipotesi di interpolazione matematica - ossia quando si impone alla curva teorica di passare per gli n punti - le due matrici diventano quadrate e il numero delle righe $(k + 1)$ coincide con quello delle colonne (n) . In questo caso, nelle matrici M e M_i , basterà sostituire $n - 1$ al posto di k .

La matrice M_i differisce da quella M per il fatto di contenere anche le y_i e precisamente queste prendono il posto degli elementi della riga $(i + 1)$, ma della matrice M . Ora dalla teoria delle matrici sappiamo che se una matrice A compatibile con una matrice B contiene più righe che colonne, ed il loro prodotto è una matrice quadrata C , il determinante di questa è sempre uguale a zero. Pertanto, poiché in tema di interpolazione statistica il numero (n) dei valori empirici è sempre maggiore del numero dei parametri incogniti $(k + 1)$, la matrice M ha sempre più colonne che righe e di conseguenza se la moltiplichiamo per una matrice compatibile qualsiasi m troviamo una nuova matrice il cui determinante è diverso da zero. Più precisamente, se M è di ordine $(k + 1, n)$, la matrice m non può che essere di ordine $(n, k + 1)$ e si avrà $|M \cdot m| \neq 0$.

Prima di vedere il significato della matrice m , è necessario premettere che le matrici M_i sono $(k + 1)$, ossia pari al numero dei parametri incogniti. La

matrice m - che nel metodo dei minimi quadrati non è altro che la trasposta di M - viene chiamata da Amato matrice caratteristica del metodo interpolatorio considerato. Pertanto, possiamo dire che la matrice m rappresenta l'elemento matematico che consente l'unificazione dei diversi procedimenti interpolatori. Ad ogni procedimento corrisponde una matrice m di numeri ben definita. Così, ad esempio, nel metodo dei minimi quadrati la matrice caratteristica è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^k \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

la quale - come già osservato - non è altro che la trasposta della matrice M e possiamo indicarla con M' . In generale, la stima dei $(k+1)$ parametri della

funzione razionale intera $y = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ in cui $k < n-1$, è data dall'espressione:

$$a_i = \frac{|M_i \cdot m|}{|M \cdot m|} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (3.4)$$

dove m è la matrice caratteristica del metodo interpolatorio considerato tale che il determinante $|M \cdot m|$ sia diverso da zero, M è la matrice seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^k & x_2^k & \cdots & x_n^k \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

di ordine $(k+1, n)$, ed infine M_i sono le matrici - pure di ordine $(k+1, n)$ - che si ottengono dalla matrice M sostituendo le quantità y_1, y_2, \dots, y_n al posto degli elementi della riga $(i+1)$. Vediamo l'applicazione del metodo di Amato nel caso particolare dell'interpolazione statistica di una retta ($k=1$) con il metodo dei minimi quadrati. In tal caso la matrice caratteristica risulta essere

$$m = M' = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

e si avrà

$$M_0 \cdot m = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

$$M_0 \cdot m = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$|M_0 \cdot m| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$(3.8)$$

determiniamo ora $M_1 \cdot m$

Si ha

$$M_1 \cdot m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$|M_1 \cdot m| = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(3.10)$$

Le espressioni ottenute rappresentano i numeratori delle frazioni con le quali vengono espressi i parametri incogniti a_0 e a_1 . Per la loro determinazione è necessario infine calcolare il determinante $|M \cdot m|$, il quale costituisce il denominatore comune delle due frazioni considerate.

Pertanto si ha

$$M \cdot m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$M \cdot m = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$|M \cdot m| = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (3.13)$$

Ora abbiamo tutti gli elementi necessari per la stima dei parametri. Si ha

$$a_0 = \frac{|M_0 \cdot m|}{|M \cdot m|} = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (3.14)$$

$$a_1 = \frac{|M_1 \cdot m|}{|M \cdot m|} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (3.15)$$

Analogamente, con la stessa tecnica matriciale possiamo agevolmente ricavare i parametri dei minimi quadrati relativi alle funzioni razionali intere di grado $k = 2, 3, \dots$, etc. Più precisamente, per $k = 2$ - ossia

nell'adattamento di una parabola ordinaria – si avranno tre matrici del tipo $M_i : M_0, M_1, M_2$, così definite

$$M_0 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

mentre le matrici M e m saranno, rispettivamente, le seguenti

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

e

$$m = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

come nel caso precedente, i parametri della funzione $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ saranno forniti dalle formule

$$a_0 = \frac{|M_0 \cdot m|}{|M \cdot m|}, \quad a_1 = \frac{|M_1 \cdot m|}{|M \cdot m|}, \quad a_2 = \frac{|M_2 \cdot m|}{|M \cdot m|}$$

con $|M \cdot m| \neq 0$.

3.1 Metodo delle Sintesi

Nel metodo delle Sintesi la condizione di accostamento si può dedurre dalla matrice caratteristica m del metodo dei minimi quadrati ponendo $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Se infatti consideriamo la matrice m

$$m = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

con la sostituzione indicata, si avrà la matrice caratteristica del metodo delle Sintesi o Metodo di Mogno così definita

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & \cdots & n^k \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

Per la determinazione dei parametri della funzione razionale intera di grado k basterà sostituire nelle formule indicate il valore della matrice caratteristica.

Pertanto si avrà

$$a_i = \frac{|M_i \cdot m|}{|M \cdot m|} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (3.1.3)$$

con $|M \cdot m| \neq 0$

sostituendo m con S avremo i parametri cercati:

$$a_i = \frac{|M_i \cdot S|}{|M \cdot S|} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (3.1.4)$$

con $|M \cdot S| \neq 0$.

3.2 Metodo delle somme

Nel metodo delle somme la matrice caratteristica è una matrice del tipo

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

Questa matrice deve avere necessariamente n righe e $k + 1$ colonne; inoltre, poiché n è maggiore di $k + 1$, supponiamo che esso sia un multiplo esatto di $k + 1$, ossia

$$n = r \cdot (k + 1) \text{ con } r \text{ positivo intero}$$

nell'interpolazione statistica $r > 1$, la matrice T è rettangolare e contiene $k + 1$ vettori colonna unitari diagonali essendo r il numero degli elementi unitari di ciascun vettore.

Per esempio, per $n = 6$ e $k = 2$ - interpolazione di un polinomio di secondo grado - i parametri incogniti sono 3 e quindi

$$r = \frac{n}{k + 1} = \frac{6}{3} = 2$$

la matrice T in questo caso sarà

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

come nei casi precedenti, il valore dei parametri della funzione razionale intera

$$y = \sum_{i=0}^k a_i x^i \quad \text{sarà dato dalla formula}$$

$$a_i = \frac{|M_i \cdot T|}{|M \cdot T|} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (3.2.3)$$

dove T è la matrice caratteristica del metodo delle somme, la quale deve essere tale che il determinante $|M \cdot T|$ sia diverso da zero.

3.3 Metodo dei momenti

Per il metodo dei momenti Amato non definisce nessun tipo di matrice caratteristica, in quanto nel caso dell'interpolazione di un polinomio di grado k completo in tutti i suoi termini, tale metodo conduce agli stessi risultati matematici del metodo dei minimi quadrati anche se concettualmente si tratta di metodi profondamente diversi.

3.4 Metodo delle differenze

La matrice caratteristica del metodo delle differenze di Vinci è la seguente

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

La matrice V del metodo delle differenze ha l'interessante caratteristica di contenere i numeri del triangolo di Tartaglia - Pascal, disposti simmetricamente, ma con i segni cambiati nella parte inferiore e superiore della matrice stessa. La matrice V ha in generale n righe e $k + 1$ colonne e consente di stimare i parametri del metodo delle differenze secondo

l'interpolante $y = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ mediante l'espressione

$$a_i = \frac{|M_i \cdot V|}{|M \cdot V|} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (3.4.2)$$

con $|M \cdot V| \neq 0$.

4 Osservazioni conclusive

Nonostante i limiti applicativi – d'altra parte propri di ogni modello teorico – il metodo di Amato merita queste note non solo per l'assoluta originalità, per l'epoca, di un metodo che unificava le distinte e separate tecniche interpolatorie, ma anche perché l'Autore introduce e fa ampio ricorso nella formulazione della sua teoria ad uno strumento matematico - le matrici - fino ad allora del tutto ignorato negli studi di statistica metodologica.

Riferimenti bibliografici

[1] Per maggiori informazioni sulla nascita e lo sviluppo della statistica italiana si veda : A. CORSINI (a cura di), *Da osservazione sperimentale a spiegazione razionale – Per una storia della statistica in Italia*, Pacini editore, 1989;

[2] Le informazioni sul Prof Vittorio Amato - tratte dal suo fascicolo personale – sono state gentilmente comunicate a chi scrive dal Dr. Salvatore Consoli responsabile dell'Archivio Centrale e Storico dell'Università degli Studi di Catania;

[3] V. AMATO, *Sulle matrici caratteristiche di alcuni metodi di interpolazione statistica* in "Giornale degli Economisti", 1947;

[4] L'interpolazione statistica viene trattata in maniera più o meno vasta in tutti i manuali di statistica. Specifiche monografie nelle quali l'argomento viene sviluppato notevolmente sono quelle di M. BOLDRINI , A. UGGE': "*L'interpolazione statistica*, Giuffrè, Milano, 1950" e T. SALVEMINI, "*Lezioni sulla rappresentazione analitica delle variabili statistiche*, De Santis, Roma, 1960" ;

[5] K. F. GAUSS, *Theoria combinationis observationis erroribus minimis obnoxiae*, Comment SOC. GOTTINGEN, VOL V, 1819-20. Questo lavoro fu

preceduto dalla “*Theoria motus corporum celestium*, 1809”, che venne alla luce tre anni dopo “*Le Nouvelles, methodes pour la détermination des orbites des cometes*” di A. M. LEGENDRE, dove già si parlava di un metodo dei minimi quadrati. Nel lavoro di LEGENDRE si considerava anche il metodo dei minimi scarti, che sette anni prima, LAPLACE aveva discusso nella “*Mécanique céleste*”;

[6] Sembra che tale metodo sia stato proposto per la prima volta da TOBIA MAYER nel 1748; (si veda F. VINCI. *Manuale di Statistica*, vol I, Zanichelli, 1936, p. 211). Nonostante questa eventuale anticipazione - acutamente rilevata da VINCI - la paternità del metodo delle somme è comunque ufficialmente attribuita allo statistico GEORGE KING, il quale lo introdusse nel 1902 nell’articolo “*A text-book of the principles of interest, life annuities and assurances*. London, Layton, 1902”;

[7] Sulle origini del metodo dei momenti si veda L. VAJANI, “*Statistica descrittiva*, Etas, 1990, pag 431”; K. PEARSON, espose tale metodo nell’articolo “*Sken variations in homogeneous material*, in *Phil. Trans. Of the Royal Society*, 1895” ;

[8] F. VINCI, *Un nuovo metodo di interpolazione: il metodo delle differenze*, Bari, Cressati, 1924 ;

[9] F. P. CANTELLI, *Sull’adattamento di curve ad una serie di misure o di osservazioni*, Roma, Bolognesi, 1905;

[10] R. MOGNO, *Un metodo di interpolazione statistica* in “*Metron*”, Vol XII, n. 2, 1935.

L'aritmetica con il Liber Abaci di Fibonacci

Arithmetic with the Liber Abaci of Fibonacci

Silvia Cerasaro¹

In questo articolo mostrerò alcune attività didattiche che ho ideato a seguito della lettura della traduzione in italiano del Liber Abaci di Leonardo Pisano Fibonacci [1], in corso di realizzazione da parte di un gruppo interdisciplinare di docenti. Questi hanno fondato un progetto che porta il nome del matematico pisano utilizzando un sito internet (www.progettofibonacci.it) per diffondere questa importante parte della cultura storico-matematica. Nel sito sono presenti temi di ricerca, pubblicazioni, articoli riguardanti la storia, la matematica, l'arte, la letteratura, che concorrono a delineare la cultura medioevale nella quale si colloca, rivoluzionandola, il Liber abaci di cui in pochi conoscono il contenuto. Partecipando come collaboratore a questo progetto, cominciai un'attenta lettura interdisciplinare che mi portò a sperimentare in classe quei temi con passione e tenacia, mettendomi in discussione come insegnante, impegnandomi in attività differenti da quelle che solitamente svolgono i docenti.

Abstract.

In this article, I will show some teaching activities that I thought after the read of translation of Liber Abaci of Leonardo Pisano Fibonacci [1], made by a team of founder teachers who created a project called the great mathematician. (www.progettofibonacci.it).

¹ docente di Matematica e Scienze del corso C della scuola secondaria di primo grado dell'IC Secondo di Anagni (FR), silvia.cerasaro@gmail.com
Comunicato da F. Ghione

I will show how my students use roman abacus to add or to multiply two numbers; I will describe, also, how they count to base 5 with indian alternative figures. The most complex activity is about fractions, that Fibonacci called “broken numbers”.

With my lessons I try to disseminate historical and mathematical culture and I try to easy my students' learning using materials to be handled.

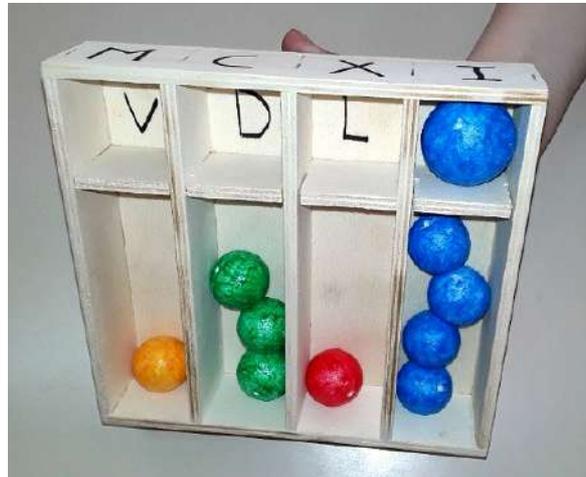
Introduzione.

Le attività didattiche che seguono sono state presentate nella classe Prima sez. C dell'a.s. 2018/2019, divenuta poi Seconda nell'anno 2019/2020, dell'Istituto Comprensivo Secondo di Anagni (FR). La classe è formata da soli 12 alunni, provenienti nella maggioranza dalla scuola primaria del nostro Istituto. Il corso in cui insegno si trova in un plesso succursale della sede centrale, in una frazione del paese, raccoglie un'utenza prevalentemente di livello socio-culturale medio basso. I ragazzi sono volenterosi, amano la scuola ma inizialmente non avevano una buona opinione della matematica, benché si applicassero nello studio.

Nella sezione *Fibonacci in classe* del sito www.progettofibonacci.com sono riportate, spesso con animazioni e brevi filmati, le descrizioni delle attività laboratoriali svolte.

Rappresentazione dei numeri con il sistema di numerazione romano.

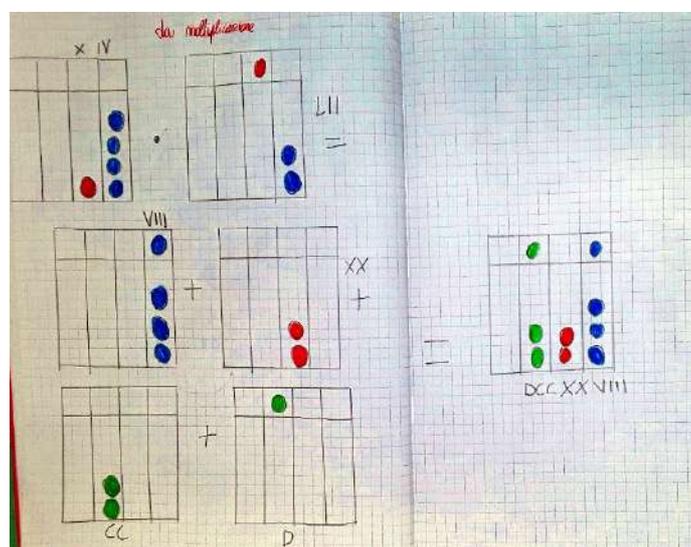
Immersi nel periodo storico di riferimento, durante il fiorente periodo della Repubblica Pisana, immaginiamo di essere dei mercanti, di contare le merci da vendere o da acquistare: si utilizzano i numeri romani, si parla latino per farsi capire in tutto il mondo Mediterraneo. Per favorire la comprensione della modalità di raffigurazione dei numeri e delle relative procedure di calcolo, decido di realizzare un modellino dell'abaco romano.



Modellino di Abaco Romano usato per le attività didattiche.

La comprensione del sistema di numerazione romano, di tipo additivo, è avvenuta con la manipolazione di tale strumento, e solo dopo aver compreso il corretto procedimento per scrivere un numero, gli alunni hanno cominciato a fare le addizioni. Hanno utilizzato più abachi, uno per ciascun addendo ed uno per la somma, procedendo con i riporti e modificando il valore delle palline dopo 4 valori ripetuti in ciascuna colonna.

E' stata trattata anche la moltiplicazione, solo dopo aver capito come svolgerla in linea, come mostrato da Catastini, Ghione, Rashed in Algebra [2], cioè, solo dopo aver scomposto ogni addendo in forma polinomiale mediante la proprietà dissociativa dell'addizione e la distributiva del prodotto rispetto la somma, come descritta da Fibonacci nel cap. II.7. del Liber Abaci. Così facendo, gli alunni hanno compreso quanto fosse elaborato e lungo il procedimento della moltiplicazione con il sistema romano, ed hanno dedotto che l'introduzione di un nuovo sistema di numerazione è stata sicuramente di grande aiuto a chi ogni giorno doveva svolgere molti conti.



La moltiplicazione romana sul quaderno di un'alunna.

Le figure indiane ed il nuovo sistema numerico.

Gli alunni si sono proiettati nel 1200, hanno provato quanto fosse difficile pensare ed attuare alcuni di quegli algoritmi dell'aritmetica romana che non usano abitualmente e si sono sentiti fortunati ad aver appreso dalla scuola primaria il sistema decimale posizionale. Prima di questa esperienza, ritenevano che il nostro sistema numerico fosse sempre esistito, non avevano mai pensato all'esistenza di altro; mostrare quindi che nel passato, ce n'era uno meno pratico e che necessitava di strumenti per fare i conti, ha permesso loro di apprezzare l'aver imparato a contare e a fare le operazioni con il sistema indo-arabico.

Per far comprendere l'innovazione di tale sistema, contrastato inizialmente come tutte le novità⁶, è stato presentato il seguente passo tratto dal Cap. I.5

⁶ Il Comune di Firenze emanò nel 1299 lo statuto dell'arte del cambio che vietava l'uso delle figure indiane ed impose quello delle figure romane nella contabilità (Ambrosetti 2008, p.247).

del Liber Abaci, in cui si descrivono le figure indiane e la scrittura posizionale dei numeri :

“Le nove figure degli indiani sono queste

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 1.

Pertanto, con queste nove figure, e con questo segno 0, che gli Arabi chiamano zefiro, si scrive qualunque numero....”

Così abbiamo approfondito l’aspetto storico delle figure indiane, considerando una scheda didattica presente nel sito, sull’Abaco di Gerberto D’Aurillac, della prof.ssa Mariarene Guagnini⁷. Sull’abaco di Gerberto, le figure indiane erano trascritte su gettoni, che potevano ruotare, per cui i nostri simboli sembrerebbero essere il risultato di un errore di trascrizione. Questa ricerca ha dato un senso storico e civico ai ragazzi su quello che oggi usiamo, poiché si sono resi ulteriormente conto dell’evoluzione delle conoscenze.

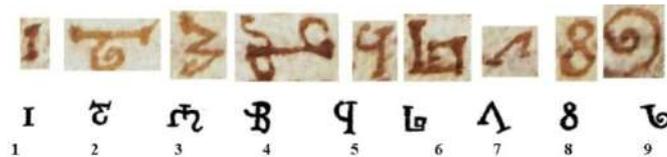


Immagine tratta dalla scheda didattica sull’Abaco di Gerberto della prof.ssa Mariarene Guagnini presente sul sito di Progetto Fibonacci.

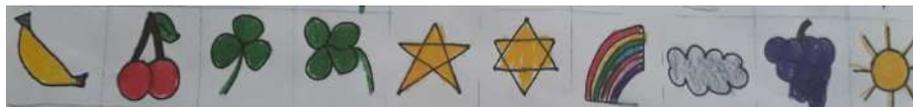
In questo modo gli alunni sono venuti a conoscenza che i simboli che usano per indicare delle quantità sono stati introdotti quando è stato scritto questo testo da Leonardo Pisano Fibonacci.

Le figure primacciane e lo studio della base 5.

Per misurare l’efficacia degli algoritmi del sistema numerico ideato dagli Arabi e diffuso da Fibonacci in Europa, ho pianificato un’attività laboratoriale basata sulle operazioni aritmetiche da svolgere con delle figure alternative a

⁷ <https://www.progettofibonacci.it/xFR/fiboschede-frS.html>

quelle indiane, ideate dagli alunni della classe 1 sez. C, chiamate, per l'appunto, *figure primacciane*: dalla banana, equivalente al numero 1, si arriva all'uva, cioè il 9, ed al sole, lo zero, passando per figure che ricordano le quantità associate.



Le figure primacciane realizzate dagli alunni.

Per rinforzare il concetto di riporto nelle operazioni di addizione e moltiplicazione, e di conseguenza del prestito per la differenza, ho realizzato un laboratorio sullo studio della base 5, cioè con l'uso di sole 5 figure. Sono state prese in considerazione solo la banana, le ciliegie, il trifoglio, il quadrifoglio ed il sole e, con l'uso dell'abaco, disegnato sui quaderni, ciascun alunno ha imparato a contare in base 5, passando poi a realizzare le tavole della somma e del prodotto, procedendo, infine, a fare le operazioni in colonna con l'uso delle figure primacciane. Gli alunni hanno ben compreso il meccanismo di un sistema a base 5, riuscendo anche a pensarlo con un numero di figure differente, riflessione che non avevano avuto in passato in quanto hanno imparato a contare e a fare le operazioni sulla retta dei numeri, senza passare per l'abaco.

Gli alunni, ultimate queste attività inserite all'interno di un contesto storico ben definito, hanno compreso come i nostri antenati hanno vissuto l'aritmetica nella storia ed hanno apprezzato il sistema di numerazione che ancora oggi adottiamo; si sono resi conto della semplicità e della praticità di un sistema decimale che non necessita di un abaco per fare i conti e che ha portato, con la nascita dell'aritmetica moderna, il graduale progresso dell'umanità.

I numeri rotti.

A partire dal libro quinto del Liber Abaci, Fibonacci introduce la divisione tra due numeri interi. Egli ritiene che prima di insegnare come si svolgono le divisioni "...si insegni come scrivere in modo perfetto tutti i numeri rotti."

Nella descrizione delle operazioni con i numeri interi, il matematico pisano ritiene opportuno parlare dei *numeri rotti*, cioè di quei numeri che si ottengono

dividendo in n parti uguali l'intero, cioè considerando m volte l'ennesima parte dell'unità ($m < n$, con n e m numeri naturali). Sono i numeri che oggi chiamiamo "frazioni proprie".

Fibonacci parla di *denominante* scritto sopra una *lineetta*, sotto la quale c'è il *denominato*: gli alunni capiscono che si parla delle frazioni, che loro conoscono dalla scuola primaria, e che sanno usare come un operatore, non come numero. Quindi, il mio scopo è stato quello di impostare delle attività didattiche a favore dell'apprendimento della frazione come numero che ha una determinata posizione sulla retta dei numeri. Con tale finalità, ho ideato e realizzato del materiale, ispirato a quello montessoriano: delle aste di legno intere e le frazioni $\frac{1}{n}$ che si ottengono da esso, dividendolo in n parti uguali, per n che va da 2 a 10.



Materiale didattico ideato per lo studio dei numeri rotti.

Con questo materiale gli alunni hanno operato per tentativi ed errori, verificando la validità o meno delle loro supposizioni in merito a procedure, giungendo a deduzioni con la mente, senza imparare in modo meccanico nessuna regola.

Gli alunni hanno richiesto di poter avere il proprio materiale: dov'era possibile, ho mostrato loro come dividere un segmento in n parti uguali sfruttando una costruzione geometrica basata sul teorema di Talete, come illustrata da L. Catastini in *Quale scuola?* [3]. Invece, per chi aveva delle

difficoltà, ho messo a disposizione il mio materiale o delle fotocopie dei numeri rotti, da realizzare, quindi, con la carta.

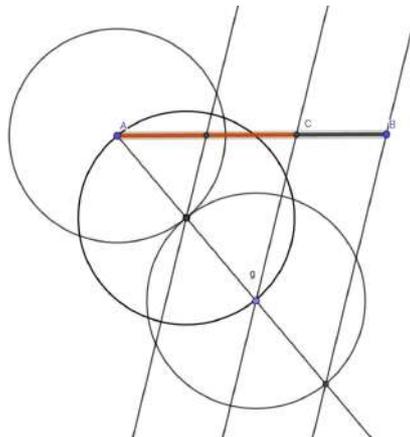
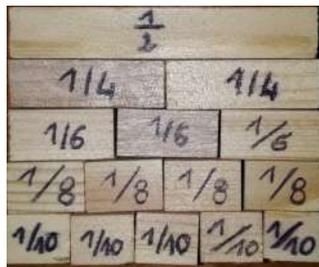


Immagine realizzata con Geogebra sulla costruzione geometrica che usa il teorema di Talete per dividere un segmento in n parti uguali.

Abbiamo cominciato il nostro studio andando a cercare la riduzione di un numero roto ai rotti più piccoli (ricerca delle frazioni equivalenti) dapprima in modo empirico, costruendo il muro del numero roto da ridurre, deducendo poi la regola dalla semplice osservazione del materiale.



Il muro di $\frac{1}{2}$.

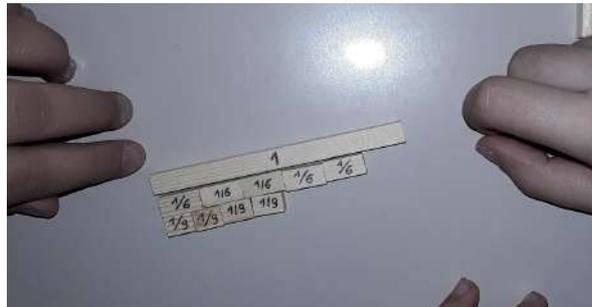
A questo punto, è stato richiesto di confrontare i numeri rotti. Questa operazione è possibile poiché la costruzione dei numeri rotti con il nostro materiale avviene per lunghezza, come su di una retta. Per cui, dall'immagine

che segue è facile comprendere che $\frac{5}{6}$ è maggiore di $\frac{4}{9}$. Da diverse prove effettuate, i ragazzi hanno avuto l’esigenza di schematizzare delle regole per il confronto, fondamentali per lo svolgimento delle operazioni di somma e differenza in futuro.

Hanno analizzato il caso più semplice, ovvero due numeri multipli diversi dello stesso numero rotto: è maggiore quello con il denominante maggiore, cioè avendo i numeri rotti $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{n}$, ovvero $a \times \frac{1}{n}$ e $b \times \frac{1}{n}$, per decidere il maggiore si confrontano gli interi a ed b .

Nel caso le frazioni da confrontare non abbiano lo stesso denominatore, utilizzando il linguaggio antico, si scrivono entrambi i numeri rotti in numeri *simiglianti*.

Dati i numeri $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{m}$, $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{m}$ possono essere scritti entrambi in numeri rotti più piccoli trovando un multiplo comune s ai due denominatori . Se $s=kn$ e $s=hm$, allora si ha $\frac{a}{n} = \frac{ka}{s}$ e $\frac{b}{m} = \frac{hb}{s}$, e si confrontano i denominatori.



Confronto tra numeri rotti.

Sui nostri libri di testo, solitamente le frazioni vengono classificate in proprie, improprie ed apparenti in base al valore del “rapporto” a loro associato. Questa classificazione non è semplice da apprendere e spesso si confondono i nomi. Nel Liber Abaci [3], Fibonacci non fa riferimento affatto ad essa, parla di numeri rotti, come appena definiti, e di *numeri misti*, cioè quei numeri che si ottengono sommando un rotto ad un numero intero. Per cui, con linguaggio moderno, un numero misto altro non è che una frazione impropria, che però è più facilmente collocabile sulla retta dei numeri.

Con l'uso dei numeri misti, gli alunni hanno compreso che il risultato di una divisione si può scrivere in modo preciso, poiché se $m=q \times n+r$, allora $\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$. In merito a questo, sono stati svolti molti esercizi, soprattutto di passaggio dalla frazione impropria a numero misto e viceversa.

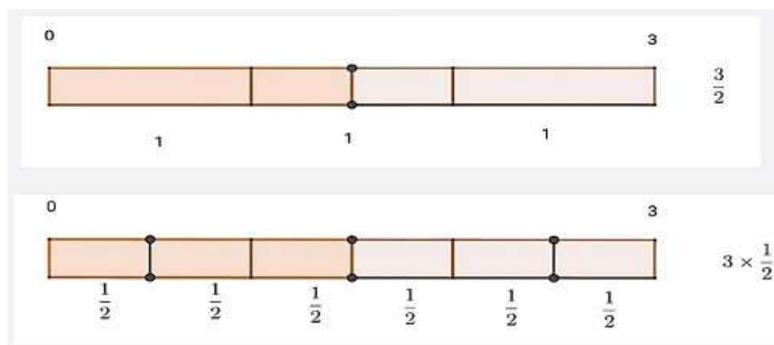
Lo studio dell'operazione della somma tra frazioni solitamente si affronta con molte difficoltà, soprattutto se i ragazzi non hanno ben compreso il minimo comune multiplo. Con il metodo ispirato al Liber Abaci, la somma tra numeri rotti si può effettuare riducendo in numeri rotti più piccoli tutti i denominatori, cioè cercando un numero rotto che divida entrambi i denominatori. Per cui, se si deve eseguire $\frac{7}{12}+\frac{5}{8}$ si può ridurre in numeri rotti più piccoli, usando, ad esempio, i 96-simi ed avere quindi $\frac{56}{96}+\frac{60}{96}=\frac{116}{96}$ che *schisato*, termine antico per esprimere la semplificazione di una frazione, fa $\frac{29}{24}$, cioè $1\frac{5}{24}$, scritto in misti. Gli alunni hanno cominciato in questo modo, solo alcuni hanno compreso che, facendo con il mcm dei denominatori, si arrivava con meno semplificazioni alla stessa soluzione, incitando gli altri a fare lo stesso. Non sono state assegnate le espressioni che solitamente riempiono le pagine dei nostri testi scolastici, ma un consistente gruppo di operazioni finalizzate alla realizzazione di un cartellone, ispirato a quello visto insieme sul Liber Abaci. Questo cartellone è stato realizzato con il contributo di ciascun alunno, solo dopo aver compreso cosa scrive Fibonacci in questa tabella. L'osservazione iniziale dei ragazzi riguardava l'aspetto, in particolare l'uso delle figure: non corrispondevano a quelle indiane usate oggi.

Inoltre, nel controllare la tabella, gli alunni hanno notato delle operazioni in cui i risultati erano o errati o trascritti in modo differente, per cui hanno preferito personalizzarla seguendo quanto avevano appreso.

l'operazione $\frac{7}{10} - \frac{1}{5}$, il problema veniva presentato ponendo la seguente domanda: *qual è quel numero che sommato a $\frac{1}{5}$ dà $\frac{7}{10}$?* Nella risoluzione pratica, invece, bastava ridurre in numeri rotti più piccoli ed effettuare la differenza, che è $\frac{5}{10}$, che, schisato, dà $\frac{1}{2}$. Quindi sono stati impostati problemi sulla differenza, guardando il cartellone, per dedurre l'inversa di ogni somma.

Per quanto riguarda la somma e la differenza in cui compaiono i numeri misti, gli alunni hanno usato il metodo che ritenevano più opportuno tra i due di seguito elencati: il primo consiste nel portare i numeri misti in frazioni improprie e passare poi alla riduzione in numeri rotti più piccoli; il secondo, invece, consiste nel raggruppare gli interi con gli interi ed i rotti con i rotti, e svolgere quindi le operazioni date.

Siamo, dunque, passati a trattare la moltiplicazione, ribadendo il forte legame esistente tra la frazione, la moltiplicazione e la divisione. Ogni frazione del tipo $\frac{m}{n}$ è il multiplo di $\frac{1}{n}$ secondo m , ma è anche il risultato della divisione di m in n parti, come ho mostrato nella seguente figura, relativamente a $\frac{3}{2}$.



Solo dopo aver sottolineato quanto detto, sono state presentate agli alunni delle tabelle simili alle tavole pitagoriche, che avevano per riga i numeri da 1 ad n , ed in colonna le frazioni unitarie $\frac{1}{k}$, per k che va da 1 a n : si moltiplica ogni elemento di una riga per ciascun elemento di una colonna.

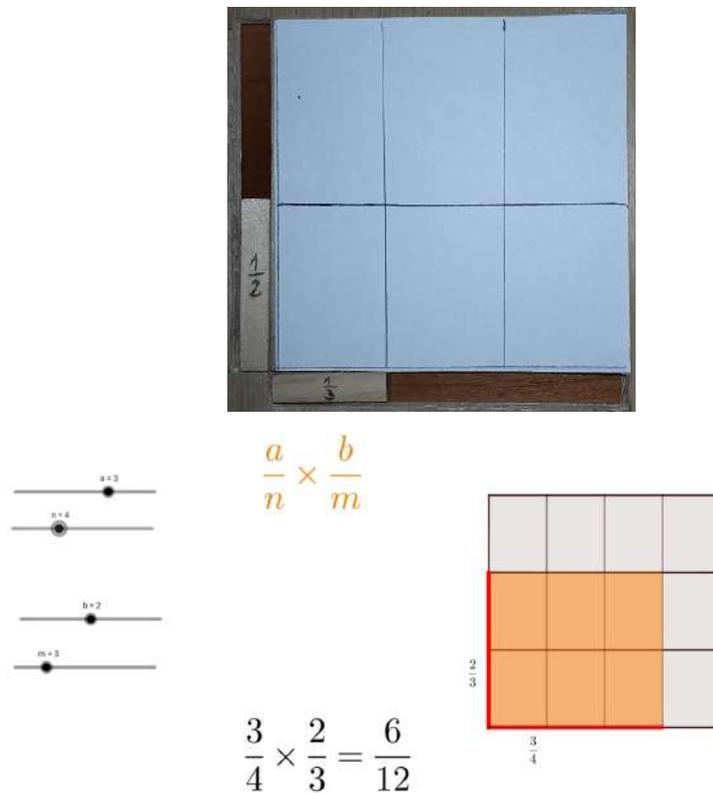
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1/2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
1/3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$
1/4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{10}{4}$	$\frac{11}{4}$
1/5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{10}{5}$	2
1/6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{11}{6}$
1/7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{11}{7}$
1/8	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$
1/9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	1	$\frac{10}{9}$
1/10	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	1

Cosa noti?

Tavola delle moltiplicazioni dal quaderno di un'alunna.

Gli alunni sapevano, per definizione di numero rotto, che $\frac{1}{n} \times n = 1$, ed hanno ritrovato l'intero lungo una diagonale. Ciò che li ha sorpresi è stata la presenza di frazioni simmetriche rispetto la diagonale in cui il numeratore si scambiava con il denominatore. Abbiamo chiamato *inverse* queste frazioni e le abbiamo moltiplicate tra loro, secondo quanto specificato poco prima. Per cui, $\frac{n}{m} \times \frac{m}{n} = n \times \frac{1}{m} \times m \times \frac{1}{n}$; $\frac{1}{m} \times m = 1$, quindi si ha $n \times \frac{1}{n} = 1$. Allora si deduce che il prodotto di due frazioni inverse è 1, risultato importante per lo studio della divisione.

Dopo aver considerato questi casi semplici, ma non banali, si passa a moltiplicare due numeri rotti. Per poterlo fare si utilizza uno strumento costruito appositamente, basato su un quadrato unitario, di lato l'asta unitaria da cui sono state definiti tutti i numeri rotti. Il quadrato unitario ha lungo due lati perpendicolari, due guide, all'interno delle quali vanno posizionate le aste rappresentanti i numeri rotti da moltiplicare.

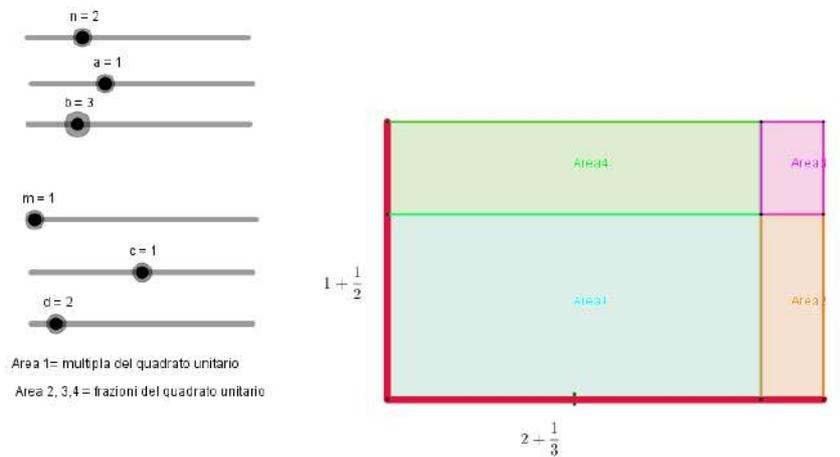


La moltiplicazione tra rotti con il quadrato unitario e con il software Geogebra

Il prodotto di due numeri rotti equivale all'area del rettangolo che ha per dimensioni le aste dei numeri rotti, che si esprimerà come frazione del quadrato unitario: esso sarà suddiviso in $n \times m$ parti equiestese, del quale si considera un rettangolo interno individuato da $a \times b$ parti, se si svolge il prodotto $\frac{a}{n} \times \frac{b}{m}$. Gli alunni hanno anche utilizzato un programma realizzato con geogebra per svolgere il prodotto con i numeri rotti, che funziona con la stessa metodologia dello strumento ideato. Questo metodo permette di capire che il prodotto tra rotti è un numero roto che ha per numeratore il prodotto dei numeratori, e come denominatore il prodotto dei denominatori. Non è stata insegnata la regola della semplificazione a croce in quanto ho preferito che

deducessero la formula risolutiva dall'applicazione pratica, per poi schisare come già sapevano fare.

Il materiale utilizzato permette agli alunni di comprendere che la regola per svolgere il prodotto tra numeri rotti si può estendere anche alla moltiplicazione tra rotti e misti e tra numeri misti: il prodotto è dato dall'area di un rettangolo scomposto in più rettangoli, dai quali gli alunni hanno compreso l'utilizzo della proprietà distributiva del prodotto rispetto la somma. Anche per il prodotto tra misti, è stato utilizzato il software geogebra per vedere geometricamente l'applicazione della proprietà distributiva.

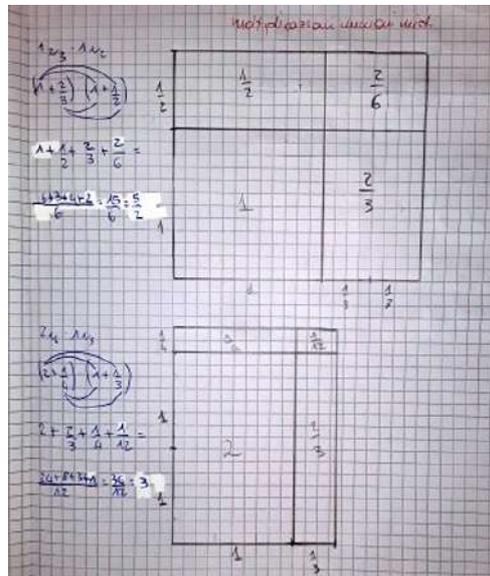


Area 1= multipla del quadrato unitario
Area 2, 3, 4 = frazioni del quadrato unitario

$$\text{Area1} = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{Area2} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \quad \text{Area3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \text{Area4} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\left(2 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{2} \quad \text{equivalente ad applicare la proprietà distributiva}$$

Prodotto tra misti con il software Geogebra.



Prodotto tra misti da un quaderno degli alunni.

Infine, è stata trattata la divisione tra numeri rotti, con molta semplicità, contrariamente a quanto ho riscontrato in passato. L'operazione di divisione è insita nel concetto di frazione. Per dividere un numero rotto per un altro, gli alunni li hanno resi simiglianti, ovvero con lo stesso denominatore; solo a questo punto sono passati a dividere tra loro i numeratori.

In questo modo, c'è stata continuità tra la metodologia utilizzata per la somma e differenza.

Gli alunni che solitamente osservano e riflettono si sono resi conto che, in realtà, è possibile effettuare la divisione considerando l'inverso, cioè, se $\frac{a}{b} \div \frac{n}{m} = \frac{a}{b} \times 1 \div \frac{n}{m} = \frac{a}{b} \times (1 \div \frac{n}{m}) = \frac{a}{b} \times \frac{m}{n}$, deducendo, così la formula che compare sui libri. I ragazzi sono stati liberi di utilizzare il metodo che più preferivano, non solo per la divisione, ma per tutte le altre tipologie di esercizi presentate.

Come già anticipato, non sono state svolte le tradizionali espressioni con le frazioni, ma esercizi che miravano al consolidamento delle procedure apprese, di valenza comunque rilevante. Ad esempio, svolgere una moltiplicazione tra numeri misti significa svolgere delle operazioni in base ad un ordine logico,

conoscendo le proprietà aritmetiche delle operazioni, ponendo le basi anche per l'algebra, con le moltiplicazioni tra polinomi che gli alunni svolgeranno nell'anno conclusivo della scuola secondaria di primo grado. Per la divisione, sono stati presentati esercizi che, ad esempio, rispondevano alla domanda *quanti mezzi ci sono in $\frac{3}{5}$?*, oppure, *quanti decimi ci sono in $\frac{7}{8}$?*, per cui i ragazzi svolgevano $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$ o $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{10}$.

Lo studio dei numeri rotti con questa metodologia si è svolto con tempi differenti rispetto la metodologia che utilizzavo in passato. E' stato dedicato molto tempo alla fase iniziale, ovvero, quello della presentazione del materiale e della relativa manipolazione, soprattutto per la riduzione ai numeri rotti più piccoli e alla somma tra rotti e tra rotti e misti. Gli esercizi basati sulla comprensione delle procedure e l'allenamento della mente per passare da una relazione diretta a quella inversa sono stati fondamentali e facilitatori per la comprensione di tutte le operazioni. Confrontandomi con i colleghi dell'istituto ho notato quanto fossimo "indietro" inizialmente con la trattazione degli argomenti con questa didattica nuova ispirata a Fibonacci, ma con il rinforzo delle procedure siamo arrivati con lo stesso tempo al termine della trattazione dell'argomento, avendo recuperato nella moltiplicazione e nella divisione.

Conclusioni

Lavorare con i ragazzi intrecciando la matematica con la storia, o con l'arte e l'informatica, produce in loro un senso di autonomia e spirito di iniziativa di non poco spessore, e, soprattutto dona loro quel senso di consapevolezza che il sapere non si divide in blocchi isolati e separati che, anzi, si completano per arrivare alla conoscenza unica, che lascia un sapore profondo di cultura. L'uso dei materiali facilita ed agevola la comprensione, sostituendosi allo studio mnemonico di regole: non tutti gli alunni lo hanno accettato da subito, in quanto veniva identificato come materiale ludico, per cui non idoneo allo studio, ma guardare i compagni usarlo ed avere piccoli successi grazie al loro uso, li ha spinti a provare per poi ricredersi. Inoltre, è stato adottato un linguaggio differente da quello solitamente usato nello studio delle frazioni; i vocaboli usati da Fibonacci e Tartaglia [4] hanno catturato attenzione tanto da essere ricordati ed utilizzati durante le lezioni, diventate una drammatizzazione della matematica nella storia, proiettando gli alunni nel passato rendendoli consapevoli dell'evoluzione della lingua e della

matematica stessa. Il *denominante* e *denominato* hanno sostituito il “numeratore” ed il “denominatore”; i *numeri rotti* hanno sostituito la “frazione propria”, il *numero misto* la “frazione impropria”. Parlare di *riduzione ai numeri rotti più piccoli* ha significato “cercare una frazione equivalente”, mentre *ridurre in numeri simiglianti* ha indicato “la riduzione al minimo comun denominatore”; in ultimo lo *schisare*, riconducibile all’azione della matita che lascia un segno leggero, ha sostituito il termine “semplificare”. Questo linguaggio è stato usato nella fase della manipolazione del materiale e dei primi esercizi assegnati, ma gli alunni hanno preferito usarlo anche dopo aver appreso e ricordato la terminologia usata oggi, solo perché definito più “semplice”.

Nell’anno scolastico 2019/2020, ho svolto anche un’altra sperimentazione con l’uso di materiale didattico da manipolare, nella mia classe prima: ho ideato un percorso sull’uso dei Bastoncini di Nepero per fare i conti, di cui ho già parlato, oltre che sul sito www.progettofibonacci.it, anche in un articolo pubblicato sulla rivista Progetto Alice [5]

Ringraziamenti

Ideare e realizzare delle attività didattiche ispirate ad un testo storico-matematico come il Liber Abaci comporta studio e confronto continui, dai quali consegue sempre un arricchimento culturale. Per questo, intendo ringraziare il prof. Franco Ghione per i pareri e i consigli forniti in questo periodo di collaborazione con Progetto Fibonacci. Estendo i ringraziamenti a tutto il gruppo dei docenti fondatori per l’opportunità che mi è stata data e che mi vede coinvolta ancora nella ricerca; ringrazio anche la prof.ssa Laura Tomassi, collaboratrice del progetto, con la quale ci siamo scambiati suggerimenti ed informazioni. In ultimo, ma non per importanza, intendo ringraziare i miei alunni della classe 2C a.s. 2019/2020 dell’IC Secondo di Anagni (FR), senza i quali non avrei potuto sperimentare le mie idee e che hanno mostrato sempre entusiasmo nelle attività proposte.

Bibliografia

- [1] traduzione del Liber Abaci dal sito www.progettofibonacci.it
- [2] Algebra, di L. Catastini, F. Ghione, R. Rasched, Carrocci editore, pag. 39
- [3] Tra parole, matematica e musica di L. Catastini, dal testo Quale scuola? a cura di F. Clementi e L. Serianni. Carrocci editore, pag.120
- [4] Tartaglia, General trattato Parte Prima, Libro VII, c. 110v
- [5] Progetto Alice. n. 61, vol.XXI 2020, pag. 125
- [6] GHIONE F., Le origini dell'aritmetica moderna in Fibonacci. Quali indicazioni didattiche?, Periodico di Matematiche, Vol. 11, Serie XIV, 2019, disponibile sul sito <http://www.mathesisnazionale.it/wp-content/uploads/2020/04/Le-origini-dell-Aritmetica-moderna-in-Fibonacci.pdf>

La funzione di Hilbert e sue applicazioni geometriche

Hilbert function and its geometric applications

Alfio Ragusa¹

Abstract.

This is an elementary survey on Hilbert function and some of its geometric applications. The idea starts from some geometric properties which are familiar to the students since school period, like the conics through 5 points or Pappos' theorems, and use the Hilbert function both to prove these properties and to generalize them to more general situations. Here we restrict our attention to varieties of points in a plane, but most of the properties hold for varieties in a larger dimension.

Scopo di questo articolo è quello di dare un piccolo contributo su come recenti ricerche in campo algebrico-geometrico possano permettere di ritrovare e generalizzare alcuni classici risultati della geometria euclidea. Naturalmente quello che si espone è un piccolissimo spaccato del vastissimo campo delle applicazioni dell'algebra alla geometria ed ha un fine puramente divulgativo. Proprio per questo il tono è volutamente discorsivo ed elementare, limitando la teoria all'essenziale utilizzandola nella situazione più

¹ Professore Ordinario di Algebra Università di Catania (in pensione)
Comunicato da F. de Giovanni

semplice per renderla quanto più comprensibile, restando tuttavia sempre nel rigore dovuto.

Alcuni classici risultati

Cominciamo col ricordare che sin da ragazzi veniamo a conoscenza di un elementare, ma a prima vista sorprendente, risultato di geometria (piana).

Teorema 1. *Per 3 punti comunque assegnati nel piano, non allineati, passa una ed una sola circonferenza.*

La dimostrazione, puramente geometrica, ricordo era piuttosto semplice e naturale. Poi, quando siamo cresciuti e siamo andati all'Università, abbiamo visto che la circonferenza è una particolare conica (ovvero una curva algebrica di grado 2) ed abbiamo conosciuto una generalizzazione di quel risultato elementare. Precisamente

Teorema 2. *Per 5 punti comunque assegnati nel piano passa almeno una conica. Se per essi passa più di una conica almeno 4 dei 5 punti sono allineati.*

Questo risultato ci pone due tipi di problemi che val la pena di essere indagati.

Problema 1. *Dato un insieme X di punti del piano “quante” sono le curve di un dato grado d che vi passano?*

Problema 2. *Sapendo “quante” sono le curve di grado d che passano per l'insieme X trovare informazioni sulla geometria di X .*

Naturalmente il “quante” va precisato ed in effetti tale termine va inteso nel senso della dimensione dello spazio vettoriale che esse formano

(come vedremo più avanti). Questo è il preludio a ciò che seguirà in cui metteremo in evidenza come uno strumento prettamente algebrico, come la funzione di Hilbert, possa venire in aiuto per la soluzione dei problemi geometrici appena proposti.

Terminologia.

Prima di addentrarci nei dettagli abbiamo bisogno di un po' di terminologia. Intanto $R = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ indicherà l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo k (possibilmente algebricamente chiuso o più semplicemente $k=\mathbb{C}$, il campo dei numeri complessi).

Ricordiamo che R si può decomporre nella somma diretta dei suoi polinomi omogenei (o forme), precisamente $R=R_0 \oplus R_1 \oplus \dots \oplus R_i \oplus \dots$ dove ogni R_i indica l'insieme delle forme di grado i (ovvero i polinomi omogenei di grado i) in R .

Osserviamo che, con le usuali operazioni tra polinomi, ogni R_d è un k -spazio vettoriale e che si ha $\dim_k R_d = \binom{d+n}{n}$ (basta contare i monomi di grado d nelle $n+1$ indeterminate $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$).

Sia $X \subset \mathbf{P}^n$ (\mathbf{P}^n denota lo spazio proiettivo n -dimensionale sul campo k) si indica con

$$I(X)_d = \{f \in R_d \mid f(P) = 0 \forall P \in X\}$$

l'insieme delle forme di grado d che si annullano su tutti i punti di X .

Osserviamo che $I(X)_d$ è un sottospazio di R_d e che $I(X) = \bigoplus_{i \geq 0} I(X)_i$ è un ideale dell'anello R .

Viceversa, se I è un ideale (omogeneo) di R si indica con $X = V(I) = \{P \in \mathbf{P}^n \mid f(P) = 0 \forall f \in I\}$ l'insieme dei punti di \mathbf{P}^n che annullano tutte le forme di I e si dirà, semplificando un po', che $V(I)$ è la "varietà" definita da I . L'anello $R/I(X)$ si chiama l'anello delle coordinate della "varietà" X . Osserviamo inoltre che, con le usuali operazioni, anche $R/I(X)$ è un k -spazio vettoriale.

Con questa terminologia possiamo definire

Definizione 3. Sia $X \subset \mathbf{P}^n$ si chiama funzione di Hilbert di X la funzione $HF(X, \cdot) : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definita da

$$HF(X, d) = \dim_k (R/I(X))_d = \dim_k R_d - \dim_k I(X)_d.$$

Il primo sorprendente risultato relativo a questa funzione (numerica) è dovuto, in varie forme, a diversi matematici del secolo scorso (Hilbert, Serre, Samuel, Poincaré) oggi noto come

Teorema 4. (Hilbert-Samuel) Sia $X \subset \mathbf{P}^n$ una qualunque varietà algebrica, esiste un intero $m > 0$ tale che la funzione di Hilbert $HF(X, i)$ è un polinomio per ogni $i > m$. Tale polinomio $P(X, i)$ è detto il polinomio di Hilbert della varietà X .

Anche il polinomio di Hilbert (sebbene in misura minore) contiene informazioni geometriche della varietà. Ad esempio, vale il seguente semplice risultato “Il grado del polinomio di Hilbert di una varietà algebrica è uguale alla dimensione della varietà”.

Una conseguenza del precedente risultato è

Corollario 5. Se $X \subset \mathbf{P}^n$ è un insieme finito di punti il suo polinomio di Hilbert è una costante che vale la cardinalità di X , ovvero esiste un intero m per cui $HF(X, i) = |X|$ per ogni $i > m$.

Proprietà della funzione di Hilbert.

Per studiare alcune proprietà numeriche della funzione di Hilbert abbiamo bisogno di alcune posizioni, di tipo combinatorico.

Per i, h interi, la i -espansione binomiale di h è la seguente decomposizione

$$h = \binom{c_i}{i} + \binom{c_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{c_j}{j}$$

dove $c_i > c_{i-1} > \dots > c_j \geq 1$.

Notiamo che una tale decomposizione è unica; infatti, per determinarla basta scegliere come c_i il massimo intero z tale che $\binom{z}{i} \leq h$, come c_{i-1} il massimo intero z tale che $\binom{z}{i-1} \leq h - \binom{c_i}{i}$, e così via.

Inoltre, si pone

$$h^{<i>} = \binom{c_i + 1}{i+1} + \binom{c_{i-1} + 1}{i} + \dots + \binom{c_j + 1}{j+1}$$

A titolo di esempio, la 4-espansione binomiale di 78 è

$$78 = \binom{8}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1}$$

$$78^{<4>} = \binom{9}{5} + \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{2}{2} = 136.$$

Definizione 6. Una successione di interi $H = \{h_i\}_{i \geq 0}$ è detta una *O-sequenza* se $h_0 = 1$ e per ogni $i > 0$ si ha $h_{i+1} \leq h_i^{<i>}$.

Notiamo che in una O-sequenza il termine h_1 non è soggetto ad alcuna condizione.

Ed ancora, se $H = \{h_i\}_{i \geq 0}$ è una successione di interi ΔH denota la successione $\Delta H = \{h_i - h_{i-1}\}_{i \geq 0}$ ($h_{-1} = 0$ per convenzione) e viene detta la differenza (prima) di H . Naturalmente, iterando quanto detto, si potranno definire le differenze n -esime di H , denotate $\Delta^n H$. Precisamente, $\Delta^n H = \Delta(\Delta^{n-1} H)$.

Siamo quindi in grado di enunciare alcune proprietà di cui gode la funzione di Hilbert di una varietà.

1. $HF(X)$ è una funzione non decrescente.
2. Se per qualche i si ha $HF(X, i) = HF(X, i + 1)$ allora $HF(X, j) = HF(X, i)$ per ogni $j \geq i$ ed in tal caso X sarà un insieme finito di punti e $HF(X, i) = |X|$.

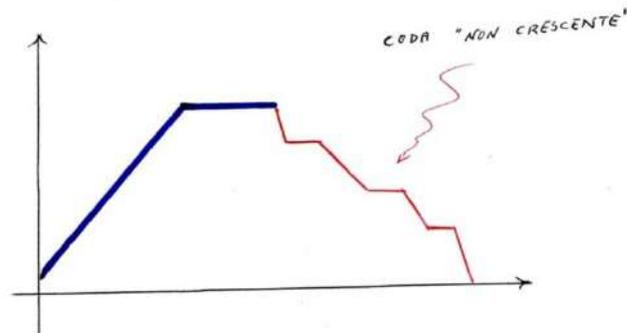
3. Struttura della funzione di Hilbert. Nel 1978 Stanley provò che le funzioni di Hilbert delle varietà algebriche sono delle O-sequenze. Negli anni successivi Geramita studiò il caso particolare di insiemi finiti di punti provando in particolare che: “Una successione di interi H è la funzione di Hilbert per un insieme finito di punti se e solo se H e ΔH sono O-sequenze”.

4. Nel caso di \mathbf{P}^2 il risultato di Stanley-Geramita si traduce così: esistono due interi $a \leq b$ tali che

$$\Delta H(X, i) = \begin{cases} i + 1 & \text{per } 0 \leq i < a \\ a & \text{per } a \leq i < b \\ c_i & \text{per } i \geq b \end{cases}$$

dove $c_i \geq c_{i+1}$.

Il corrispondente grafico è il seguente



Esempio 7. Attenzione! Consideriamo la successione H

$$1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 11 \ 13 \ 13 \rightarrow$$

(dove la freccia \rightarrow indica che la funzione prosegue in modo costante, nel nostro caso continua con 13). Questa non è la funzione di Hilbert di alcun insieme di 13 punti (del piano) in quanto essa è una O-sequenza (non decrescente) ma la sua differenza prima ΔH

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \rightarrow$$

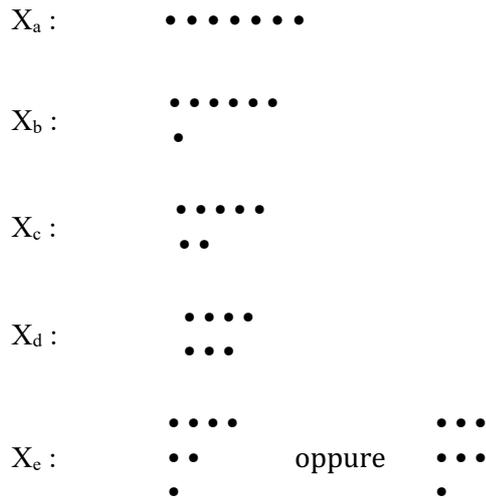
non è una O-sequenza.

Esempio 8. Quali sono tutte le possibili funzioni di Hilbert H di 7 punti del piano? Ecco tutti le possibilità:

- a. 1 2 3 4 5 6 7 \rightarrow ;
- b. 1 3 4 5 6 7 \rightarrow ;
- c. 1 3 5 6 7 \rightarrow ;
- d. 1 3 5 7 \rightarrow ;
- e. 1 3 6 7 \rightarrow .

(dove, come detto, la freccia indica che la funzione resta costante da quel posto in poi). Naturalmente, esistono varietà (insiemi di punti del piano nel nostro caso) con tali funzioni di Hilbert.

Esempi di varietà con dette funzioni di Hilbert.



Se ΔH è la differenza prima di una possibile funzione di Hilbert H di un insieme di punti del piano vi è un metodo elegante ed elementare per trovare un insieme di punti con tale funzione di Hilbert. Ad esempio, se

$$H : 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 15 \ 20 \ 23 \ 24 \rightarrow \quad \text{e quindi}$$

$$\Delta H : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 3 \ 1 \ 0 \rightarrow$$

basta considerare i punti che rappresentano tale funzione in un sistema di coordinate $i, \Delta H$. Nel nostro caso si ha

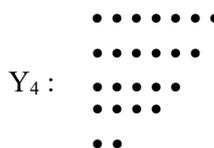
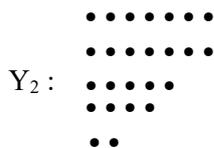


Esempio 9. Notiamo che possono esserci più insiemi, geometricamente molto differenti, che hanno la stessa funzione di Hilbert, ad esempio se consideriamo la seguente funzione di Hilbert di 25 punti del piano

$$H : 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 15 \ 20 \ 24 \ 25 \rightarrow$$

$$\Delta H : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 4 \ 1 \ 0 \rightarrow$$

i seguenti 4 insiemi hanno quella funzione di Hilbert:



Generalizzazioni.

Una prima generalizzazione del Teorema delle coniche per 5 punti è il seguente

Teorema 10. *Per n punti qualsiasi del piano passano almeno $\binom{d+2}{2} - n$ curve di grado d .*

Osserviamo che se $n \geq \binom{d+2}{2}$, per n punti potrebbe non passare alcuna curva di grado d . Inoltre, se $n < \binom{d+2}{2}$, quando affermiamo che vi sono $\binom{d+2}{2} - n$ curve di grado d che vi passano si intende che esistono $\binom{d+2}{2} - n$ curve “indipendenti” che vi passano, cioè curve tali che ognuna non è combinazione lineare delle altre.

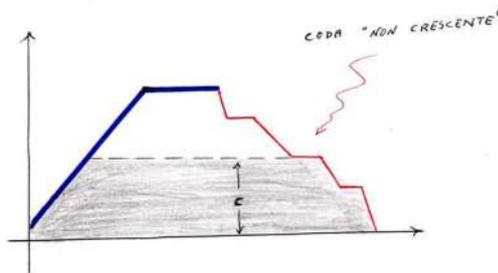
Una generalizzazione della seconda parte del Teorema delle coniche per 5 punti è il seguente

Teorema 11. (Davis, Maggioni-Ragusa 1984) *Sia X un insieme di punti di P^2 per cui $\Delta HF(X, i) = \Delta HF(X, i + 1) = c > 0$, per qualche i . Allora posto*

$$z = \frac{c(2i + 5 - c)}{2} + \sum_{j>i+1} HF(X, j)$$

si ha che z punti di X giacciono su una curva di grado c .

Il numero z della formula precedente indica il numero di punti che vi sono nel “trapezoide” definito da ΔH ed al di sotto di $y = c$ (zona ombreggiata nella figura sotto).



Applicazione 1.

Come prima applicazione dei precedenti risultati facciamo vedere come il Teorema delle coniche per 5 punti rientri in queste generalizzazioni.

Prima parte.

Presi 5 punti X del piano la sua funzione di Hilbert può essere $1\ 2\ 3\ 4\ 5 \rightarrow$, oppure $1\ 3\ 4\ 5 \rightarrow$, oppure $1\ 3\ 5 \rightarrow$, quindi $\dim_k I(X)_2 = \binom{d+2}{2} - \text{HF}(X, 2) \geq 1$, cioè per X passa almeno una conica.

Seconda parte.

Se per 5 punti X del piano passano più coniche, cioè $\dim_k I(X)_2 \geq 2$, per cui $\text{HF}(X, 2) \leq 4$, la funzione di Hilbert può essere solo $H = 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \rightarrow$, oppure $H = 1\ 3\ 4\ 5 \rightarrow$, quindi $\Delta H = 1\ 1\ 1\ 1\ 1$ oppure $1\ 2\ 1\ 1$. Nel primo caso $\Delta \text{HF}(X, 3) = \Delta \text{HF}(X, 4) = 1$ per cui dalla precedente formula si ha che almeno 5 punti di X (cioè tutti) stanno su una retta. Nel secondo caso $\Delta \text{HF}(X, 2) = \Delta \text{HF}(X, 3) = 1$ per cui dalla precedente formula si ha che almeno 4 punti di X stanno su una retta.

Applicazione 2.

Cosa possiamo dire di 10 punti del piano che non stanno su una conica (ovvero per cui non passa alcuna conica) ma per cui passano due cubiche (distinte)? La risposta è che si hanno due possibilità:

- a) 9 dei 10 punti stanno su una conica;
- b) 6 dei 10 punti stanno su una retta.

Infatti, basta osservare che le possibili funzioni di Hilbert di siffatti 10 punti possono essere:

$$H_1 = 1\ 3\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10 \rightarrow, H_2 = 1\ 3\ 6\ 8\ 10 \rightarrow, H_3 = 1\ 3\ 6\ 8\ 9\ 10 \rightarrow,$$

da cui

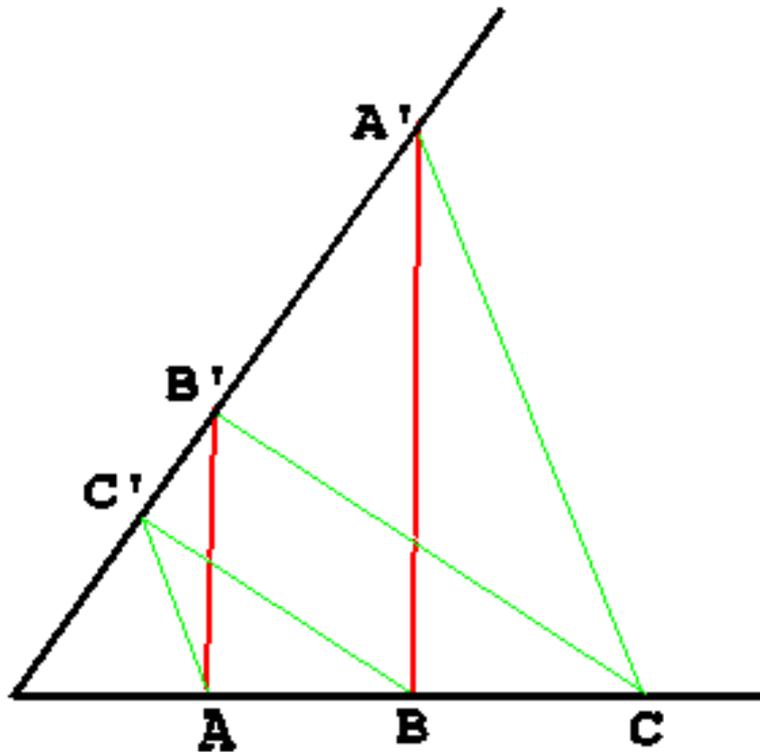
$$\Delta H_1 = 1\ 2\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1, \Delta H_2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 2, \Delta H_3 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1\ 1.$$

Nel caso H_1 applicando la formula precedente, 7 dei 10 punti stanno su una retta (quindi 9 su una conica); nel caso H_2 9 dei 10 punti stanno su una conica; nel caso H_3 invece 6 dei 10 punti stanno su una retta.

Applicazione 3.

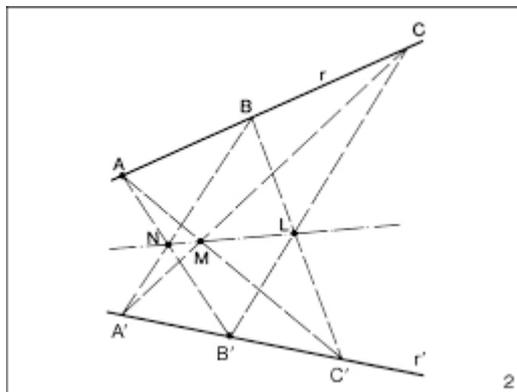
Come terza applicazione generalizzeremo due classici teoremi di Pappo. Il primo asseriva

Teorema 12. (Pappo-Pascal) *Siano A, B, C tre punti di una retta r e A', B', C' tre punti di un'altra retta r' . Se le rette BC' e CB' sono parallele e le rette AC' e CA' sono parallele, allora anche le rette AB' e BA' sono parallele. (vedi figura)*



Il secondo, che generalizzava quello appena enunciato e denominato anche “teorema dell’esagono”, asseriva

Teorema 13. (dell’esagono di Pappo) Siano A, B, C tre punti di una retta r e A', B', C' tre punti di un'altra retta r' . Detti $N = AB' \cap BA'$, $M = AC' \cap CA'$, $L = BC' \cap CB'$ allora i punti L, M, N sono allineati. (vedi figura)



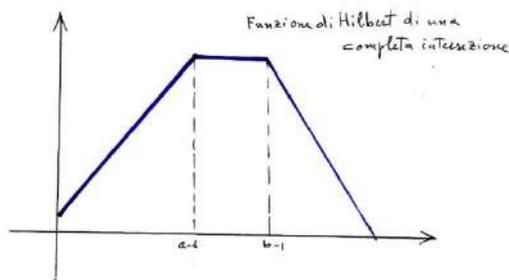
Per generalizzare questi teoremi con l'utilizzo della funzione di Hilbert occorre rifarsi alla ben nota “teoria della liaison” di Peskine e Szpiro. Questa teoria, molto generale e valida in qualunque dimensione, viene qui riportata, per semplicità, nel caso di una varietà costituita da un numero finito di punti del piano. In tal caso la teoria della liaison afferma che se X è un insieme di punti del piano con funzione di Hilbert H_X ed Y è una completa intersezione di due curve C_a e C_b contenenti X , di gradi a e b , rispettivamente, (cioè $Y = C_a \cap C_b$), allora il residuo di X in Y ovvero $Z = Y \setminus X$ ha la seguente funzione di Hilbert

$$\Delta H_Z(n) = \Delta H_Y(a + b - 2 - n) - \Delta H_X(a + b - 2 - n)$$

Ora, la funzione di Hilbert delle complete intersezioni è nota, a partire dai gradi dei generatori (ovvero nel nostro caso i gradi delle due curve), precisamente si ha per ΔH_Y

$$\Delta H(Y, i) = \begin{cases} i + 1 & \text{per } 0 \leq i < a \\ a & \text{per } a \leq i < b \\ a + b - 1 - i & \text{per } b \leq i \leq a + b - 2 \\ 0 & \text{per } i \geq a + b - 1 \end{cases}$$

il cui grafico è



Pertanto la funzione di Hilbert del residuo Z si può calcolare conoscendo quella di X .

Vediamo allora come, nel caso specifico, la teoria della liaison permette di dedurre il teorema di Pappo: osserviamo che i 6 punti $X = \{A, B, C, A', B', C'\}$ stanno sulla conica formata dalle due rette r, r' e stanno sulle due cubiche $C_3 = AB' \cdot CA' \cdot BC'$ e $C'_3 = A'B \cdot AC' \cdot B'C$ e che la completa intersezione delle due cubiche è $Y = \{A, B, C, A', B', C', L, M, N\}$ (vedi figura relativa al Teorema di Pappo), per cui il residuo sarà $Z = Y \setminus X = \{L, M, N\}$.

Ora la funzione di Hilbert H_Y della completa intersezione fra due cubiche ha: $\Delta H_Y : 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

La funzione di Hilbert dei 6 punti X su una conica ha: $\Delta H_X : 1\ 2\ 2\ 1$

Quindi la funzione di Hilbert dei residui 3 punti ha: $\Delta H_Z : 1\ 1\ 1$ ovvero i 3 punti stanno su una retta.

Generalizzazione del Teorema di Pappo.

Tutto quanto detto in precedenza conduce ad una importante generalizzazione del Teorema di Pappo che possiamo enunciare così

Corollario 14. *Sia X un insieme di punti del piano di cardinalità $|X| = \binom{d+2}{2}$ che giace su una (unica) curva di grado d , sia $Y = C_{d+1} \cap C'_{d+1}$ la completa intersezione di due curve di grado $d+1$ contenenti X e sia $Z = Y \setminus X$ il residuo di X in Y . Allora Z è un insieme di $\binom{d+1}{2}$ punti che giacciono su una curva di grado $d-1$.*

Per esempio, se prendiamo 10 punti X su una (unica) cubica, e consideriamo i 16 punti Y che sono la completa intersezione di due quartiche contenenti X , allora i 6 punti $Z = Y \setminus X$, residui di X in Y , stanno su una conica!

Ulteriori sviluppi

Osservazione. Abbiamo visto che ci sono insiemi (di punti) che pur avendo una diversa “geometria” hanno la stessa funzione di Hilbert. Facciamo l’esempio più elementare. Sia X un insieme di 4 punti, 3 a 3 non allineati ed Y un insieme di 4 punti di cui 3 (e solo 3) su una retta. Entrambi hanno come funzione di Hilbert $H : 1 \ 3 \ 4 \rightarrow \cdot$. Cosa allora li differenzia algebricamente?

Se f e g sono due coniche distinte per X , il luogo base del fascio di coniche da esse individuate è proprio X , allora per il ben noto Teorema $AF+BG$ di Noether ogni curva h passante per X sarà del tipo $af + bg$, in altri termini l’ideale $I(X)$ è generato da f e g , cioè $I(X) = (f, g)$.

Se f e g sono due coniche distinte per Y , il luogo base del fascio di coniche da esse individuate consiste in una retta (quella contenente i 3 punti allineati) ed un punto (il rimanente), sicché $(f, g) \subset I(Y)$. Non è difficile provare che esiste una cubica h per cui $I(Y)$ è generato da f, g, h , cioè $I(Y) = (f, g, h)$. Da quanto illustrato sopra si deduce che il numero di generatori di $I(X)$ ed i loro gradi sono un ulteriore strumento algebrico che caratterizza proprietà geometriche dell’insieme X . Sorge allora in maniera naturale il seguente

Problema 3. *Se X ha funzione di Hilbert H qual è il numero minimo $v(I(X))$ di generatori di $I(X)$, e quali sono i loro gradi?*

Un primo risultato, ormai diventato classico, è il seguente

Teorema 15. (Dubreil) *Se s è il più piccolo grado di una curva passante per un insieme X di punti del piano, allora $v(I(X)) \leq s + 1$*

Notiamo che se H è la funzione di Hilbert di X allora il più piccolo grado di una curva passante per X è $s = \min \{i \mid H(i) < \binom{i+2}{2}\}$.

Una risposta generale al problema precedente e che porta ad una generalizzazione del Teorema di Dubreil è il seguente

Teorema 16. (Maggioni-Ragusa 1987) *Sia X un insieme di punti del piano con funzione di Hilbert H allora il numero di generatori, α_i , di grado i per $I(X)$ soddisfa le condizioni*

$$-\Delta^3 H(X, i) \leq \alpha_i \leq -\Delta^2 H(X, i)$$

per ogni $i > s$ e $\alpha_s = -\Delta^3 H(X, s) = -\Delta^2 H(X, s) + 1$

(s il grado minimo tra gli elementi di $I(X)$ ovvero il grado minimo di una curva contenente X).

Inoltre, tutte le possibilità sono realizzabili.

In particolare, osservato che

$v(I(X)) = \sum_{i \geq s} \alpha_i$ e $\sum_{i \geq s} -\Delta^2 H(X, i) = s$, si vede come il suddetto teorema generalizzi il teorema di Dubreil.

Esempio 17. Per la HF $H : 1 \ 3 \ 4 \rightarrow$ si ha

$$\Delta^2 H : 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0, \quad \Delta^3 H : 1 \ 0 \ -2 \ 0 \ 1$$

Sicché $\alpha_2 = 2$ e $0 \leq \alpha_3 \leq 1$. Ovvero 4 punti del piano, non tutti su una retta, o sono generati da 2 coniche o sono generati da due coniche e una cubica, come avevamo detto.

Esempio 18. Riprendiamo i 25 punti dell'Esempio 9 in cui la HF era

$$H : 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 15 \ 20 \ 24 \ 25 \rightarrow .$$

Per tale HF si ha

$$\Delta^2 H : 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 - 1 - 3 - 1 \ 0$$

$$\Delta^3 H : 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 - 1 - 1 - 2 \ 2 \ 1 \ 0$$

sicché $\alpha_5 = 1$, $1 \leq \alpha_6 \leq 1$, $2 \leq \alpha_7 \leq 3$, $0 \leq \alpha_8 \leq 1$.

Vi sono così 4 possibilità (vedi i casi indicati nell'Esempio 9):

- i gradi dei generatori sono 5 6 7 7 7 8 caso realizzato da Y_4 ;
- i gradi dei generatori sono 5 6 7 7 8 caso realizzato da Y_3 ;
- i gradi dei generatori sono 5 6 7 7 7 caso realizzato da Y_2 ;
- i gradi dei generatori sono 5 6 7 7 caso realizzato da Y_1 .

Nota che la differente geometria degli oggetti geometrici quindi dipende non solo dalla funzione di Hilbert ma anche dal numero di generatori se non addirittura dai gradi dei generatori di $I(X)$. Infatti, nel caso in questione, tutti e 4 gli oggetti geometrici Y_1 , Y_2 , Y_3 e Y_4 hanno stessa funzione di Hilbert, ma Y_4 ha 6 generatori, Y_3 e Y_2 hanno 5 generatori mentre Y_1 ne ha solo 4. Inoltre, Y_3 e Y_2 pur avendo lo stesso numero di generatori hanno tuttavia diversi i gradi dei loro generatori.

Bibliografia

- [1] DUBREIL P. *Sur quelques propriétés des systèmes de points dans le plan et des courbes gauches algébriques* Bull. Soc. Math. France 61 (1933) 258-283.
- [2] GERAMITA A., HARIMA T., Y. S. SHIN Y.S. *An alternative to the Hilbert function for the ideal of a finite set of points in \mathbf{P}^n* Illinois J. Math. Volume 45, Number 1 (2001), 1-23.

[3] MAGGIONI R. - RAGUSA A. *Construction of smooth curves of \mathbf{P}^3 with assigned Hilbert function and generators' degrees* - *Le Matematiche* 42 (1987), no. 1-2, 195–209 (1989).

[4] MAGGIONI R. – RAGUSA A. *Hilbert functions of generic plane sections of curves of \mathbf{P}^3* - *Invent. Math.* 91 (1988), no. 2, 253–258.

[5] PESKINE C. – SZPIRO L. *Liaison des variétés algébriques. I*, *Inventiones Math.*, 26 (1974), pp. 271302.

[6] STANLEY R. *Hilbert Functions of Graded Algebras* *Adv. in Math.* 1978, 28, 57-83.

ISTRUZIONI PER GLI AUTORI

Il *Periodico di Matematiche* pubblica articoli di Matematica e di Fisica che abbiano carattere scientifico, storico e didattico, previa valutazione di contenuti ed originalità. Ciascun lavoro presentato è giudicato da esperti anonimi che riferiscono al Direttore, cui compete il giudizio finale.

Guida per gli autori

Formattazione del testo

- L'articolo deve essere in formato .doc. Può essere scritto in italiano o in inglese, su libera scelta degli autori, ad eccezione del sunto (abstract) da scrivere in sola lingua inglese.
-
- Il testo deve essere redatto in Times New Roman, con dimensione del carattere di 11 pt, interlinea 1 e testo giustificato su ambo i lati.
- I margini di scrittura sono: 5,7 cm superiore; 6,2 cm inferiore; 4,5 cm destra e sinistra.
- Il titolo dell'articolo deve essere in grassetto, centrato e non completamente maiuscolo, con dimensione del carattere di 15 pt. Devono essere lasciati 36 pt di spazio prima di quest'ultimo. Qualora il titolo sia in italiano, va riportato anche in inglese.
- Il nome degli autori deve essere in grassetto e centrato, con dimensione del carattere di 12 pt. Devono essere lasciati 20 pt di spazio prima e 40 pt di spazio dopo.
- Gli autori devono inserire una nota a piè della prima pagina, fornendo gli indirizzi mail e le rispettive afferenze/occupazioni, con dimensione del carattere di 10 pt e rientro di 5mm.
- Il nome del sunto, Abstract, deve essere giustificato a sinistra, grassetto e con dimensione del carattere di 12 pt. Il testo dell'abstract non deve superare le 10 righe, con dimensione del carattere di 10 pt.
- I titoli dei paragrafi devono essere in grassetto e giustificati a sinistra, con dimensione del carattere di 14 pt. A conclusione di ogni paragrafo, gli autori devono lasciare uno spazio verticale di 11 pt.
- L'articolo non può superare le 12 pagine, salvo dirette autorizzazioni della Direzione e/o dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.
- A conclusione del testo e prima della bibliografia, gli autori possono inserire il paragrafo Ringraziamenti (con titolo in grassetto, giustificato a sinistra e con dimensione del carattere di 14 pt.). In suddetto paragrafo, gli autori possono inserire opportuni ringraziamenti a persone, progetti o funding, questi ultimi esplicitamente indicati.

Bibliografia

- Gli autori devono lasciare due spazi verticali di 11 pt a conclusione dell'ultimo paragrafo (i ringraziamenti, qualora siano inseriti) che precede la bibliografia, per la quale deve essere usata la seguente formattazione:

Riferimenti Bibliografici (12 pt)

[1] CARBONARO B., VITALE F., L'assiomatica di Kolmogorof e l'insegnamento della matematica nelle scuole superiori, *Periodico di Matematiche* **1** (serie XI), 3, 61-68, 2009. (11 pt)

[2] CARBONARO B., MENALE M., *Fondamenti di Meccanica*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2019. (11 pt)

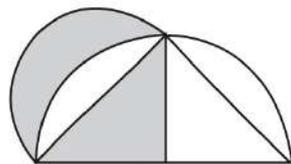
- I riferimenti bibliografici devono essere in ordine di citazione.
- Tutti i riferimenti bibliografici devono essere numerati fra parentesi quadre ([1,2]) nel corpo del testo, seguendo la rispettiva numerazione.

Copyright

Gli autori possono corredare il corpo del testo con immagini in formato .jpeg .jpg con una risoluzione minima di 300 dpi. Ad ogni immagine va associata un'apposita didascalia. Per ogni immagine che non sia di autoproduzione va indicata la fonte, con un eventuale URL. Qualora l'immagine sia di proprietà degli autori sarebbe opportuno indicare il software con il quale la si è realizzata.

Invio dei lavori

Gli articoli vanno inviati a mezzo posta elettronica al Direttore e a ciascuno dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.



Mathesis

Presidente

Elisabetta Lorenzetti

È presidente dal 18 febbraio 2019, ventitreesima dal 1895, anno della fondazione.

presidente@mathesisnazionale.it

Consiglio Nazionale

Francesco de Giovanni *vice presidente*, Massimo Fioroni *segretario*, Roberto Franzina *tesoriere*, Angela Balestra, Tiziana Bindo, Antonietta Carbone, Atalia Del Bene, Marcello Pedone, Alessio Russo, Annalisa Santini.

Sezioni

Abruzzo – Avellino – Bari – Bergamo – Brescia – Caserta – Castellamare di Stabia – Catania – Crotone – Ferrara – Firenze – Foggia – Grottaglie – Lanciano Ortona – Latina – Lecce – Mantova – Messina – Milano – Mondragone – Napoli – Napoli Flegrea – Olbia – Pavia – Roma – Rovigo – Salerno – Serra San Bruno – Spoleto – Terni – Udine – Varese – Venezia – Verona – Vicenza.

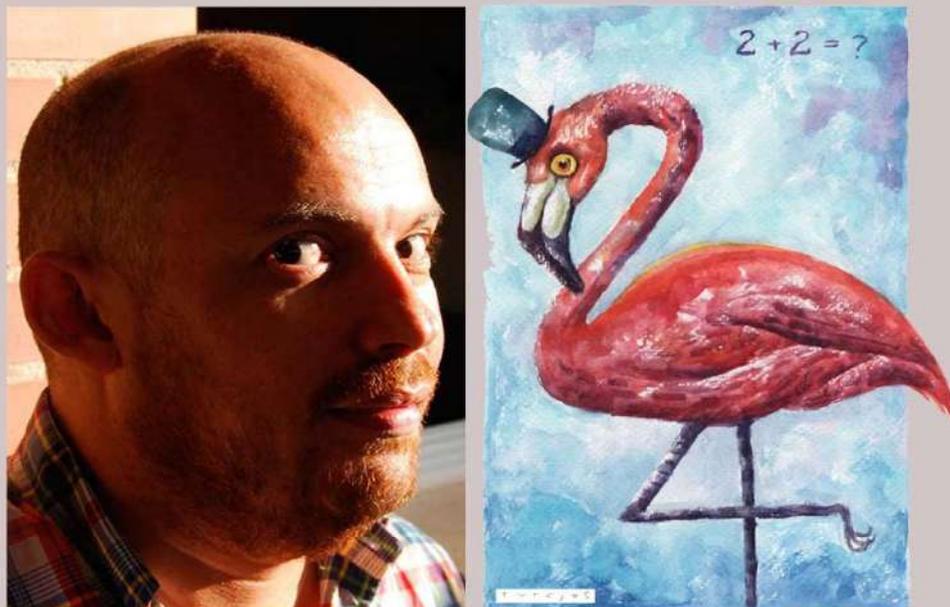
Rivista

Periodico di Matematiche

Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 “di Matematiche”. La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell’Editore Zanichelli.

Sito web

www.mathesisnazionale.it



L'illustrazione in copertina è dell'artista colombiano **Omar Figueroa Turcios**, che vive e lavora in Spagna. Omar Turcios ha ricevuto numerosi premi e riconoscimenti internazionali, tra cui il premio “Luigi Mari 2019” alla XXX Biennale dell'Umore di Tolentino per il suo ritratto di Frida Kahlo. Ha già collaborato con matematici italiani, realizzando in particolare i loghi originali dell'associazione “AGTA – Advances in Group Theory and Applications” e del convegno internazionale “Ordered Statistical Data 2020”.

MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

c/o Accademia dei Concordi
Piazza Vittorio Emanuele 14 - 45100 Rovigo
www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it