

# Periodico di Matematiche



**Organo della  
MATHESIS**

Società italiana di scienze  
matematiche e fisiche  
fondata nel 1895

**Numero** 1-2 (Gen-Ago 2021)

**Volume** 13 **Serie** XIV

**Anno** CXXXI

## **Direttore**

Francesco de Giovanni

degiovan@unina.it

## **Comitato di Redazione**

Maria Coccozza

mariacoccozza@iscortese.com

Atalia Del Bene

atalia.delbene@istruzione.it

Umberto Dello Iacono

umberto.delloiacono@unicampania.it

Massimo Fioroni

fionimassimo@gmail.com

Paola Gario

paola.gario@unimi.it

Franco Ghione

ghione@axp.mat.uniroma2.it

Vincenzo Iorfida

vincenzo.iorfida@unical.it

Elisabetta Lorenzetti

elisabetta.lorenzetti@unife.it

Marcello Pedone

marcellopedone@tin.it

Alessio Russo

alessio.russo@unicampania.it

Annalisa Santini

annalisasantini66@gmail.com

Luigi Verolino

verolino@unina.it

## **Staff editoriale**

Giuseppe Arnone

giuseppe.arnone@unina.it

Marco Trombetti

marco.trombetti@unina.it

Autorizzazioni e supporti Autorizzazioni Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Il Periodico di Matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su [www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it)

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia €60,00 - Per l'Estero €70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati: [segreteria@mathesisnazionale.it](mailto:segreteria@mathesisnazionale.it)

c/c postale, Codice IBAN:

**IT0510760104000000048597470**

intestato a:

**Mathesis Nazionale** c/o Dipartimento di Matematica e Fisica

Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"

Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)

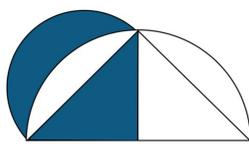
[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it) • [info@mathesisnazionale.it](mailto:info@mathesisnazionale.it)

Numero 1-2 (Gen-Ago 2021) Volume 13 Serie XIV Anno CXXXI

# Periodico di Matematiche

**Organo della MATHESIS**

*Società italiana di scienze  
fisiche e matematiche  
fondata nel 1895*



**Mathesis**

## Indice

|   |    |
|---|----|
| Annalisa Santini  |    |
| <b>In memoria di Antonio Salmeri</b> .....  | 1  |
| Laura Tomassi   |    |
| <b>Laboratori didattici tra storia e matematica ispirati al Liber Abaci</b> ..... | 5  |
| Laura Catastini e Franco Ghione   |    |
| <b>Fibonacci e il peso specifico</b> .....  | 25 |
| Giuseppe Basile   |    |
| <b>Dinamica delle popolazioni</b> .....   | 43 |
| Ilaria Ceravolo   |    |
| <b>La vendetta del falsario</b> .....   | 55 |
| Margherita Barile   |    |
| <b>Astrattismo, simbolismo, costruttivismo e matematica</b> .....                 | 61 |
| Antonio Salmeri   |    |
| <b>Una dettagliata ricostruzione della storia della Mathesis</b> .....            | 77 |
| Luca Granieri   |    |
| <b>Problemi a dominio variabile</b> .....   | 81 |

## In memoria di Antonio Salmeri

(Augusta, 29 aprile 1933 - Roma, 28 maggio 2021)



Ci hai lasciato il 28 maggio 2021, improvvisamente.

Ci siamo conosciuti a Lucera, nel 2010, durante una consulta dei presidenti delle sezioni Mathesis e, a marzo di questo anno, mi hai rammentato l'episodio, la piacevolezza del confronto avvenuto durante la cena di quel 30 ottobre, che tu avevi offerto! Strizzando l'occhio, mi hai ripreso: come potevo aver dimenticato contesto e data! Da quel momento ci ha legato un'amicizia fatta di gesti dal sapore antico: gli auguri per l'onomastico e il compleanno che mi giungevano sempre prima di tutti gli altri, persino dei miei familiari. . . i file di documenti che mi inviavi e che solo tu riuscivi a recuperare per aiutarmi in alcuni approfondimenti storici delle mie lezioni; la lunga corrispondenza, più o meno fitta negli anni, fatta di scambi di opinione attenti, sinceri e sempre rivolti al nostro reciproco interesse per la storia della matematica, per la storia della Mathesis, per la vita dell'associazione e il suo futuro.

Il dispiacere per alcuni ultimi avvenimenti ti aveva condotto ad un ripensamento riguardo all'associazione e alle persone che avevi conosciuto e stimato, ma la lettura della realtà, che tu avevi dapprima intuito e di cui poi ti eri definitivamente convinto attraverso il tuo indagare discreto ma concreto, ti ha spinto a non abbandonare la Ma-

thesis e tutti gli amici che ne sono parte.

E in questo contesto di amicizia e di autentico valore dell'essere socio, la tua fiducia e stima nei miei confronti si sono tradotti, in due grandi e ultimi gesti: l'iscrizione alla sezione di Brescia per l'anno 2021 e la donazione della tua biblioteca matematica all'Ateneo di Brescia (Società di scienze, lettere ed arti). Due segni, emblemi di intenzionalità e progettualità, come solo un giovane di 22 anni 'per arto', come ti eri definito ultimamente, può desiderare di portare avanti.

La distanza non ci ha impedito di vederci e di conversare anche negli ultimi mesi. La tecnologia e qualche piccolo aiuto familiare per un rapido apprendimento, questione non da poco, ma che non ti ha mai spaventato, ti hanno consentito di essere a Roma e virtualmente in presenza anche a Brescia. Nella tua ultima e-mail esprimevi il desiderio di conoscere tutti i soci della sezione, per cominciare a collaborare fattivamente.

Due, tre, ... quante e-mail mi scrivevi in un giorno? Io ero sempre un passo indietro caro ingegnere! L'ultima nostra telefonata è stata domenica 23 maggio 2021, per comunicarmi che te ne stavi andando. L'ultimo sms il 24.

Ed ora è riservato a me, tua ultima presidente di sezione, esprimere attraverso le pagine del "Periodico di Matematiche" questo ultimo saluto e tributo alla tua memoria.

—

Raccontare la vita dell'ingegnere Antonio Salmeri non è semplice e forse non sono in grado di farlo con la dovizia di particolari che meritano gli aspetti del suo carattere, quelli che lo hanno reso mecenate e motore trainante di iniziative rivolte ai docenti e a numerosi giovani studenti italiani. Lui stesso ci ha però permesso di conoscerlo, oltre che attraverso i suoi aneddoti, i suoi spaccati di esperienze vissute e raccontate oralmente agli amici, con la spensieratezza di chi ha ormai superato le montagne, anche attraverso le sue pubblicazioni biografiche: "La mia giovinezza" e "Memorie di scuola".

Come amava ricordare: la sua vita non è stata semplice, ma variamente articolata, durante e dopo gli studi. Dirigente e Responsabile della progettazione meccanica della Snamprogetti di Roma del gruppo ENI, è stato l'autore di una sessantina di pubblicazioni nel campo dell'ingegneria e relatore in seminari e congressi.

La passione per la matematica, coltivata sin dall'infanzia e durante gli studi secondari, lo ha accompagnato, latente, durante gli anni precedenti il pensionamento e lo ha spinto, pur dedicandosi alla libera professione, a partecipare alle attività della sezione Mathesis di Roma, di cui è stato socio dal 2000 al 2020 (nel Consiglio Direttivo fino al 2013). Rimando al sito della sezione romana (<https://mathesisroma.wordpress.com/>) per i dettagli delle numerose attività da lui organizzate, seguite e sponsorizzate in prima persona.

Questo interesse per la matematica e la fisica ha avuto un primo riconoscimento ufficiale nella vittoria del primo premio (macchina da scrivere Olivetti Lettera 22) della prima gara di matematica e fisica fra studenti di tutta Italia, promossa dalla rivista “La Scienza e i Giovani” (Le Monnier). Dopo aver ricevuto la lettera di congratulazioni dallo stesso Adriano Olivetti, la Direzione della rivista, nel congratularsi, lo aveva invitato a scrivere un articolo. E così ha fatto, scrivendo l’articolo a cui sarebbero seguite tutte le numerose altre pubblicazioni per le riviste: Il Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Il Giornale di Matematiche di Battaglini, Il Bollettino della Società Matematica Calabrese.

Amava definirsi: “l’autore più longevo della Mathesis”, dove intendeva riferire l’aggettivo longevo all’arco di tempo che separa l’anno della prima pubblicazione a quello della più recente. Il suo primo articolo per l’organo ufficiale della Mathesis risale al 1956: “*Risoluzione in numeri interi di una particolare equazione fratta con numero indeterminato di variabili*” (ottobre 1956), il più recente, ma non l’ultimo, è del 2019: “*Sistema Internazionale di Unità di Misura: note applicative e cenni storici*”, coautore il figlio Marcello Salmeri.

Da quella cena nel 2010 e dalle riflessioni sulle potenzialità matematiche dei giovani studenti, nonché dal bisogno di motivazione di cui necessitano nei loro processi di apprendimento, è nata quell’idea che lo ha visto principalmente impegnato negli anni a seguire e che lo ha reso universalmente noto: “EUCLIDE - Giornale di matematica per i giovani” (EGMG) e “EUCLIDE - Giornale dei giovani” (EGG). La rivista online di cui era direttore responsabile, oltre che fondatore, ospita i numeri dal 2014 al 2017 della rivista “Angolo acuto”, brani di storia della matematica, biografie di grandi matematici e fisici, al fine di far conoscere ai giovani la storia e le finalità della Mathesis. Ma è solo navigando nel sito di “Euclide” (<https://euclide-scuola.org/>) che possiamo rintracciare tutti i suoi numerosi contributi, la ricostruzione della storia della Mathesis e, senza dubbio alcuno, la testimonianza della ferrea volontà di recuperare la documentazione, che riteneva avrebbe potuto diventare fondamentale per gli studi dei futuri matematici in erba.

La scomparsa dell’Ing. Antonio Salmeri, amico e socio Mathesis, lascia un profondo dolore nell’animo di quanti hanno avuto la fortuna di conoscere da vicino le sue elevate doti di cuore e di mente, e costituisce una perdita considerevole per tutta la comunità matematica.

Annalisa Santini



## **Laboratori didattici tra storia e matematica ispirati al Liber Abaci**

### **Educational workshops between history and mathematics inspired by Liber Abaci**

**Laura Tomassi<sup>1</sup>**

#### **Abstract**

In this paper, I'm going to show some activities based on two different sides of the work: the first one is based on the reading of Fibonacci's Liber Abaci, the most important Fibonacci's book, the second one is an experiment made in class with my students about this topic, in fact in this period they applied the knowledge of fraction's calculate in lab activities related to rapports, proportions. Everything was inspired by translation and suggestion found in the website <https://www.progettofibonacci.it/>, result of a work done by a group of italian experts: mathematicians, linguists, historians, who are translating Fibonacci's Liber Abaci and are proposing various insights into various topics, such as art, history, economic science, numismatics. This work has allowed a multi-disciplinary study improving on the interest and the attitude of my students to mathematics.

## **Introduzione**

Seguire il filo della storia, ed in particolare della storia della matematica e del pensiero scientifico, costituisce, per parlare come Maria Montessori [1], un modo per ritornare "all'origine delle cose": capire come e perché alcuni concetti matematici sono nati, quali problemi risolvono, è la maniera più chiara, semplice e diretta per spiegare e motivare verso l'apprendimento della matematica. È con questa idea che le classi prime della scuola secondaria di primo grado dove insegno, l'IC A.M. Ricci di Rieti, nell'anno scolastico 2018/2019 hanno appreso importanti concetti matematici, come l'introduzione delle figure indiane, ossia del sistema di numerazione decimale

---

<sup>1</sup>[laura.tomassi1@gmail.com](mailto:laura.tomassi1@gmail.com)

posizionale e dello zero, da un maestro illustre, Leonardo Fibonacci, attraverso la sua opera più importante: il Liber Abaci. Le attività di cui riferisco nel presente scritto sono ad esso ispirate e sono rese possibili dall'imponente lavoro di traduzione e riflessione condotto da un gruppo di intellettuali italiani che riporta i propri studi sul sito <https://www.progettofibonacci.it/> [2]: i fondatori sono i professori Laura Catastini, Franco Ghione, Marcello Ciccarelli, Sandro Moriggi, Sabrina Rossi. In particolare, le attività riportate in questo articolo sono riferite al lavoro proseguito dalle stesse classi nell'anno scolastico 2019/2020 e sono la naturale prosecuzione del lavoro iniziato in classe prima: per questi ragazzi il Liber Abaci è stato "il libro di testo" prevalente per due anni. Il modello pedagogico adottato è di tipo laboratoriale, pienamente rispettoso del bisogno di un approccio alla matematica costruttivo, multidisciplinare e creativo, in grado di scardinare i preconcetti che portano gli studenti ad un'idea diffusa della matematica come disciplina meccanica, noiosa e difficile. Un elemento fortemente motivante per me in questa scelta sono le indicazioni delle neuroscienze, che indirizzano verso un apprendimento della matematica che coinvolga l'attività prassica e motoria, come veicolo di conoscenze [3].

## Un breve ritratto del nostro maestro

Il pensiero e l'opera di Leonardo Pisano, detto Fibonacci perché figlio di Guglielmo Bonacci, possono essere distillate in una sua frase posta come introduzione di un'opera che egli scrisse nel 1226, il "*Flos*": "ho voluto questo libretto avesse ...per titolo, il Fiore, perché [vi sono] alcuni problemi, fiorenti seppur pieni di nodi utili non solo per produrre fiori ma anche per essere radici di altri fiori ...". La vita e lo studio di Fibonacci hanno avuto proprio questo senso: non solo hanno prodotto dei risultati importanti in ambito matematico ma sono stati il punto di partenza per l'evoluzione del pensiero matematico nel mondo occidentale cristiano nei secoli successivi al XIII. Inoltre l'immagine poetica dei fiori, per identificare i pensieri matematici, rende l'idea di come egli fosse pervaso da una forte passione nell'apprendere ed elaborare la matematica imparata dagli Arabi direttamente sul campo nei suoi soggiorni, cominciati, si crede, a 14 anni, nelle città e nei porti sulle più importanti rotte commerciali dell'Europa del 1200: egli fu a tutti gli effetti un moderno ricercatore, che apprendeva ed elaborava la cultura araba, a sua volta figlia di quella greca ed indiana, e la trasferiva nel suo mondo, di cui dava un'affascinante ritratto, attraverso una miriade di problemi matematici per lo più realistici. La ricerca di metodi risolutivi rigorosi, generali, ma funzionali ha trovato il suo ambiente di sviluppo nelle scuole d'abaco, mentre le accademie del tempo studiavano una matematica che in quanto a ricerca di nuovi approcci culturali lasciava molto a desiderare, ferma com'era agli studi di intellettuali come Boezio ed Isidoro ed Siviglia. L'approccio applicativo di Fibonacci, il suo grande rigore, la preoccupazione didattica lo rendono un maestro perfetto per le tematiche affrontate nella scuola secondaria di primo grado e per un modo di fare scuola vivace, interessante e che preveda come cemento delle discipline la storia. Quando il percorso evolutivo della matematica viene considerato nel contesto più ampio della storia, le motivazioni

delle scelte di pensiero, non sono aride ma sono dettate da esigenze vere ed umane, illustrando un aspetto antropologico della matematica che le fa inevitabilmente perdere l'aura di scienza asettica ed avulsa che la circonda nell'immaginario collettivo di molti studenti.

## Il calcolo con i rotti con metodo costruttivo e problematico

Fondamento di tutto il lavoro svolto sono i numeri razionali, che non possono essere considerati solamente "un argomento", ma a ragione una struttura portante di tutto ciò che viene affrontato a partire dal secondo anno di scuola secondaria di primo grado: i rapporti, le proporzioni, le percentuali, le similitudini, ma anche la formazione di prerequisiti dell'algebra, che caratterizzeranno tutto il percorso matematico dei ragazzi negli anni successivi. L'approccio con le frazioni nelle classi è stato di tipo percettivo, con un grande utilizzo di materiale e seguendo l'impostazione concettuale di Fibonacci [4], che ben identifica *i rotti* come numeri e fa superare nella mente degli studenti la sola identificazione della frazione con un operatore. Nel nostro percorso abbiamo letto passi del Liber Abaci e fatto uso di terminologia medioevale: un'utile riflessione sull'etimologia di termini che ha cercato di riportare l'interesse sul loro significato e sull'origine. Molto abbiamo lavorato sulla deduzione e comprensione degli algoritmi di calcolo e sulle necessità storiche che hanno portato a determinarli, come approccio generale alla matematica. In Figura 1 un esempio di calcolo del prodotto di due numeri rotti sviluppato con l'uso del materiale. Sono stati evitati esercizi di calcolo in senso classico, fatti di molte ripetizioni, mentre sono state privilegiate tutte quelle attività che portano ad un esercizio ragionato e alla realizzazione di un prodotto intellettuale, scegliendo un percorso, un tema da realizzare a carattere trasversale tra discipline umanistiche e matematica, come per l'argomento del prossimo paragrafo.

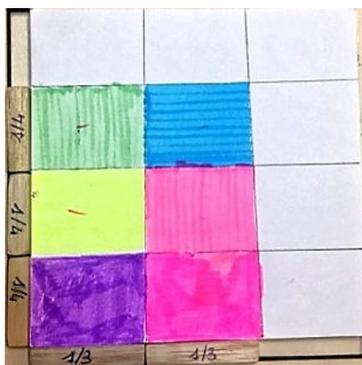


Figura 1: Prodotto tra due numeri rotti

## La disgregazione

Nel Liber Abaci Fibonacci dedica l'intera sesta parte del capitolo 7 alla decomposizione di una frazione propria in una somma di frazioni unitarie diverse tra loro, indicando vari metodi con cui realizzare questa operazione che lui chiama "in singulas partes disgregare".

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}$$

La motivazione che egli adduce, squisitamente didattica, "affinché tu sia capace di riconoscere meglio a proposito di un rotto di una qualunque linea [ frazione ], che parte o parti sia di un intero", effettivamente conferma la mia scelta d'insegnante, volta a formulare attività esplicite attraverso problemi pratici ma non banali, che ricalchino uno schema logico di soluzione comune rispondente a richieste eterogenee. La fonte d'ispirazione del percorso didattico è stata una scheda del professore Franco Ghione "La disgregazione: scomposizione di una frazione (propria) in frazioni unitarie", presente sul sito <https://www.progettofibonacci.it/>. La prima attività è fatta "con le mani" assegnando la consegna seguente ai miei studenti: dividere cinque quadrati (realizzati da loro con costruzione riga e compasso e ritagliati) per sei di loro, in maniera da avere sei parti uguali. Siamo arrivati a dire che si può risolvere il problema in diversi modi, e ne abbiamo individuati due. Come riportato nell'immagine che segue, che mostra gli elaborati dei ragazzi, in entrambi i casi la frazione totale è  $\frac{5}{6}$ , però nel primo caso ( $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ ) ad una somma di cinque frazioni con numeratore 1; mentre nel secondo caso corrisponde alla somma di due frazioni con numeratore 1 ( $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ). I tagli da effettuare per risolvere il problema sono 7 nel secondo caso, contro 25 nel primo caso: i miei studenti hanno giudicato una disgregazione "migliore" la seconda, perché dicono che concettualmente è più difficile ma nella pratica è più semplice. Questa affermazione è importante perché rivela una scelta, una non passività nel calcolo. In queste immagini i loro quadrati ritagliati ed attaccati su un foglio rappresentano i termini della disgregazione.

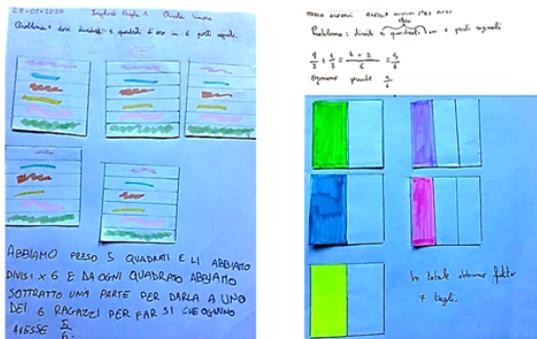


Figura 2: Dividere 5 quadrati in 6 parti uguali

Questo problema è stata simulato in diverse maniere, per esempio con la divisione in parti uguali di 5 mele per 6 ragazzi. La seconda parte dell'attività è consistita nella rielaborazione "con la mente". Abbiamo riflettuto sul fatto che il problema di dividere i quadrati in questa maniera corrisponde al problema di scrivere una frazione come somma di frazioni unitarie (come possono notare se vanno a considerare la parte data ad ognuno) e spiegato che si tratta di un problema egiziano trattato nel papiro di Rhind e ripreso nel Liber Abaci da Fibonacci: risolverlo significa scrivere le frazioni egizie. Il valore principale di questo lavoro è proprio far capire che problemi molto diversi nella realtà corrispondono ad uno schema logico unico e definito cui associare una strategia risolutiva. Inoltre la cosa interessante è stato andare a notare che le frazioni possono essere classificate in base alla struttura, ad una formula. Fibonacci le classifica in "septem distinctiones", sette tipologie. Ne abbiamo analizzato alcune, quelle che l'età e la capacità di analisi dei miei studenti hanno permesso. A titolo di esempio ne riporto un tipo, corrispondente alla formula  $\frac{a}{b}$  con  $b + 1 = na$ ,  $a = 2$ . Chiaramente agli studenti non viene proposta alcuna formula iniziale ma viene

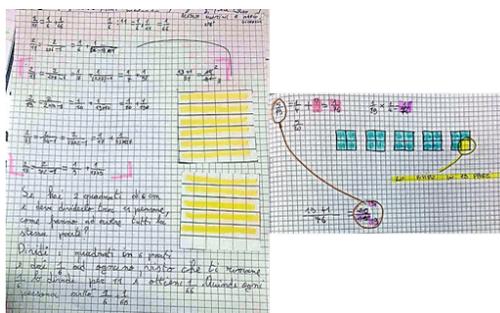


Figura 3: Disgregazione nel caso  $\frac{a}{b}$ ,  $b + 1 = na$

posto il problema, per esempio, di scrivere  $\frac{2}{11}$  come somma di frazioni unitarie cioè di dividere ad esempio 2 quadrati in 11 parti uguali, facendo prima la porzione più grande possibile. Hanno diviso ogni quadrato in sei parti e dato ogni sesto ad 11 di loro; poi il rimanente sesto è stato suddiviso in 11 parti, quindi  $\frac{1}{66}$  di ogni quadrato. Si è posto l'accento sul fatto che fare  $\frac{1}{11}$  di  $\frac{1}{6}$  vuol dire fare una moltiplicazione tra le due frazioni sul foglio. Ancora una volta il problema di scrivere la nostra frazione come somma di frazioni unitarie può essere rappresentato con il quesito della divisione dei quadrati. Si è fatto questo ragionamento per  $\frac{2}{11}$ ,  $\frac{2}{19}$ ,  $\frac{2}{5}$ . I ragazzi si sono convinti che queste frazioni hanno una struttura, corrispondente alla formula dove un numero qualsiasi è rappresentabile, con un fiore. La formula, scritta con il fiore al posto delle lettere, illustra proprio i tentativi di astrazione e sintesi che a dodici anni non sono affatto scontati. Testando la costruzione con  $\frac{5}{19}$  ci si è convinti che il discorso è valido anche per  $a$  diverso da 2, come si vede nella seconda immagine di Figura 3, dove 5 quadrati sono divisi in 4 parti uguali ciascuno ( $\frac{1}{4}$ ), ma dovendo fare 19 parti uguali,  $\frac{1}{4}$  è ulteriormente suddiviso in 19 parti, cosicché la disgregazione può essere eseguita

in maniera analoga a quelle precedenti.

$$\frac{2}{2 \times \spadesuit - 1} = \frac{1}{\spadesuit} + \frac{1}{\spadesuit(2 \times \spadesuit - 1)}$$

## L'occhio di Horus

Il percorso sulle frazioni egizie si è arricchito di temi storici e leggendari, andando a raccontare il mito di Horus [6], trasmettendo ai ragazzi il senso di sacralità che la matematica aveva presso gli Egiziani: è un modo per far capire loro, non solo la storia ma anche il valore della disciplina che studiamo.

*“Un pastore e la sua avvenente promessa sposa, sorvegliavano ciascuno il proprio gregge, distanti, quando un non ben precisato dio egizio, invaghitosi di lei, le apparve al tramonto chiedendole di passare la notte insieme; infuriatosi per l’inatteso rifiuto, il dio volò dal pastore e lo punì, strappandogli l’occhio e disperdendone nel deserto prima la metà, poi la metà della metà rimasta e così via per sei volte. Nel frattempo la fanciulla era corsa a cercare di salvare l’amato dalla vendetta del dio; giunse e, vista la scena, accettò di appartarsi la notte con il dio, pur di salvare il giovane. La mattina dopo, la promessa sposa tornò e, con amore infinito, ricompose l’occhio del malcapitato futuro sposo, rimettendo a posto prima la metà poi il quarto, poi l’ottavo, il sedicesimo, il trentaduesimo, il sessantaquattresimo dell’occhio. Il pastore riprese la vista e...”*

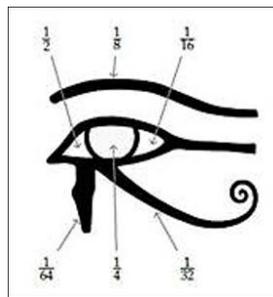


Figura 4: Il racconto del mito di Horus e le frazioni egizie

Nel mito si parla di frazioni unitarie con denominatore uguale a potenze di 2 e della ricostruzione dell'unità sommando tali frazioni. Abbiamo preso spunto per andare a studiare la somma della serie  $(\frac{1}{2})^n$  con n che cresce ad infinito, naturalmente con un metodo adatto a ragazzi di dodici anni. Si è utilizzato un metodo geometrico percettivo, basato sull'utilizzo di un materiale ispirato dal testo Psicogeometria di Maria Montessori [7] e costituito da quadrati di cartoncino tagliati al laser, progressivamente inscrittibili l'uno nell'altro, dentro una cornice. La classe che ha sperimentato questo percorso nello stesso anno scolastico ha lavorato sulle aree, con un metodo basato su "Geometria e percezione"[8]: la prima osservazione è stata quella di stabilire che le a-

ree sono progressivamente la metà, un quarto, un sedicesimo e così via dell'area iniziale, assunta come unitaria, rappresentata dalla cornice. Ho chiesto ai miei giovani studenti che valore assume l'area della figura ottenuta sommando frazioni che hanno via via denominatore più grande e quindi diventano infinitamente piccole. La loro osservazione è stata che è normale che se aggiungo infiniti pezzetti, ricomporrò l'intero perché "il buco centrale alla fine si ridurrà ad un punto" (facendo riferimento alla figura successiva), quindi per  $n$  infinitamente grande la somma di tutte le frazioni prese in considerazione coprirà tutta l'area unitaria. Sicuramente non è una dimostrazione in senso rigoroso ma prepara la mente e l'occhio a molte domande.



Figura 5: La somma di  $(\frac{1}{2})^n$  per  $n$  che tende a infinito è uguale all'unità

Ho deciso di mettere in crisi la loro osservazione "che è scontato che la somma di infiniti pezzetti pure se piccolissimi alla fine darà l'unità" andando ad "osservare" un'altra serie:  $(\frac{1}{4})^n$ .



Figura 6: La somma di  $(\frac{1}{4})^n$  per  $n$  che tende a infinito è uguale a  $\frac{1}{3}$  con il materiale e nell'elaborazione dei ragazzi

L'elaborazione personale dei ragazzi è la parte più importante di questo tipo di lavoro: riesce a guidarmi verso la fiducia nelle loro capacità ed evidenzia dei dubbi e delle certezze sbagliate, da mettere in crisi. Su suggerimento del referee, nel riproporre questo argomento negli anni successivi sarà molto interessante parlare anche della serie armonica dove, pur essendo i singoli termini tutti minori di 1 e sempre più piccoli, la loro somma è più grande di un qualsiasi numero. Il lavoro sulla somma delle frazioni unitarie ha introdotto il discorso del rapporto tra aree di figure i cui lati hanno un determinato rapporto, stabilendo continuità tra l'insegnamento di aritmetica e geometria: un esempio del carattere di ampio respiro di tutto ciò che è stato studiato all'interno di questo "progetto" e della sua estrema fluidità.

## Problemi sulla proporzionalità

In Fibonacci si trovano molte relazioni lineari che permettono di risolvere una grande quantità di problemi, anche apparentemente diversi tra loro. Egli descrive una sorta di algoritmo visivo che, una volta compresa e verificata l'ipotesi di proporzionalità diretta, ossia di linearità, esistente tra le grandezze che compaiono in un problema, serve ad aiutare la memoria fissando i dati del problema e indicando la procedura per trovare la soluzione. Se  $P$  è una relazione di proporzionalità diretta tra una grandezza  $a$  e la grandezza corrispondente  $P(a)$ , come al esempio il prezzo  $P(a)$  di una data merce  $a$ , allora:

$$\frac{a}{b} = \frac{P(a)}{P(b)}$$

o anche:

$$a \times P(b) = b \times P(a)$$

e quest'ultima relazione, noti 3 dei 4 numeri proporzionali, permette di calcolare il quarto numero eseguendo l'operazione inversa della moltiplicazione. Scritti i dati in una tabella come nella figura 7, in rosso i dati noti, l'algoritmo consiste nel moltiplicare i numeri sulla diagonale (B per C) e dividere per il numero restante A.

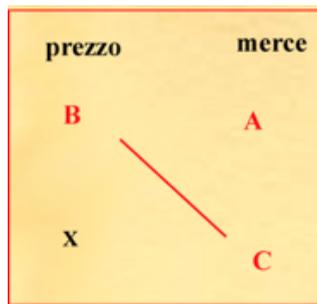


Figura 7: La regola del tre:  $A$  = quantità di una merce  $B$  = prezzo di  $A$ ,  $C$  = una seconda quantità della stessa merce;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono noti,  $X = BC / A$  è il prezzo della quantità  $C$

Le grandezze cui lavora Fibonacci sono di tipo diverso, ma molto frequenti sono i problemi in cui egli si occupa di prezzi della merce che variano in funzione delle unità di misura, problema molto importante per l'economia del tempo, quando vi erano molte unità di misura diverse in regioni anche contigue. Altro tipo di problema affrontato è quello del cambio delle monete di diverso valore, per una ragione evidentemente analoga alla precedente; non ultimo quello relativo alla quantità di metallo prezioso presente nelle monete, una volta che se ne conosca la concentrazione. Si tenga presente, nella lettura di quanto segue, che per Fibonacci non esistono frazioni improprie ed egli scrive solo "rotti" e "sani", quindi le frazioni improprie vengono rappresentate con dei numeri misti. Nel testo io scriverò nel numero misto prima la parte intera e poi la rotta, al contrario di ciò che faceva Fibonacci che scriveva i numeri alla maniera

araba, da destra a sinistra, prima la rotta seguita dalla mista senza segno di addizione, come usiamo far oggi. Così  $\frac{5}{8}5$  di Fibonacci sta per  $5 + \frac{5}{8} = \frac{45}{8}$ .

Il problema riportato nella Figura 7 è relativo al cambio tra soldi imperiali e denari pisanini e corrisponde al seguente:

*Se 1 soldo imperiale, cioè 12 denari, o qualunque altra moneta si vende per 31 denari pisanini, o per qualunque altra moneta; e si chiede quanti denari pisanini qualcuno può avere per 11 imperiali: scrivi il problema, ovviamente dapprima la vendita, cioè i 12 imperiali, poi nella stessa linea scrivi dietro il loro prezzo, cioè 31 denari pisanini; e poni gli 11 imperiali sotto i 12 imperiali, come qui si mostra: e moltiplica i numeri che sono di traverso, cioè 11 per 31, farà 341; dividili per 12, farà 28 + 5/12 denari pisanini.*

<https://www.progettofibonacci.it/liber/BONCOMPAGNI/trad/trad08B.html>

Agli studenti viene fatto leggere il testo del problema dall'originale e viene proposto di realizzare lo schema dell'algorithmo di Fibonacci, di cui viene data la soluzione in seguito.

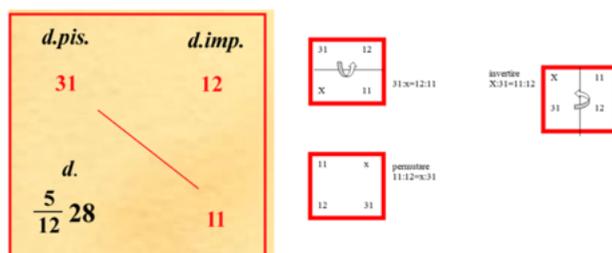


Figura 8: Esempio di problema risolto con l'algorithmo di Fibonacci e rotazioni dello schema che permettono di "visualizzare" le proprietà delle proporzioni

Sulla carta abbiamo risolto problemi analoghi al precedente, andando a notare come questa schematizzazione permette di farlo in maniera diretta senza uno studio sistematico e mnemonico delle proporzioni e delle loro proprietà, anzi costruendo dei primordiali prerequisiti del calcolo matriciale.

Inspirandosi a tale attività, inoltre la classe 2 B2 ha studiato le proporzioni nell'ambiente del laboratorio scientifico attraverso la preparazione di diverse quantità di soluzioni acquose e colorante alimentare che presentino tutte la stessa intensità di colorazione quindi la stessa concentrazione in colorante, ed in seguito in sale. La realizzazione di una soluzione a concentrazione costante di un soluto ad alta solubilità sotto la soglia di saturazione è un esempio di linearità tra grammi di soluto e volume di soluzione.

## Fibonacci varca la porta del laboratorio di scienze

Il mondo pisano del 1200, con le sue monete, i suoi commerci, i rapporti con l'imperatore Federico II, con i suoi artigiani, è passato davanti agli occhi dei miei ragazzi, attraverso la lettura di una scheda del professore Franco Ghione e la spiegazione di un passo della professoressa Monica Baldassarre [9,10], riguardante le monete pisane. Insieme agli studenti si è fatta la riflessione che le monete sono un' importante fonte per la ricostruzione storica, ma anche un elemento in cui le tecnologie e la matematica si mettono al lavoro per costruire un prodotto estremamente raffinato da un punto di vista scientifico. Le monete antiche sono state percepite come una piccola opera d'arte dai ragazzi. Dopo avere ragionato su problemi pratici di concentrazione molto semplici come quelli riportati nel paragrafo precedente, insieme con la classe ci siamo impegnati nella realizzazione di un modello didattico che simulasse la purificazione e determinazione del titolo dell'argento nelle monete, ispirato ad un problema di Fibonacci riportato nel capitolo VIII paragrafo II del Liber Abaci. Si tratta di calcolare la quantità di argento contenuta in una libbra di una data lega di argento e metallo povero, per fare questo si suppone che la quantità di argento  $P(a)$  contenuta in una parte  $a$  di quella lega è proporzionale ad  $a$ , in questo modo sapendo quanto argento si trova in un pezzettino di quella lega (un *granulo*) e sapendo il peso di quel granulo si poteva calcolare la quantità di argento contenuta in una intera libbra senza doverla fondere.

<https://www.progettofibonacci.it/liber/BONCOMPAGNI/trad/trad08B.html>

*Problema VIII.2.36. Qualcuno volle comprare argento misto con stagno, volgarmente chiamato falso argento. Poiché non sapeva quanto argento puro ci fosse nelle libbre di quella lega d'argento, prese di esso un granulo, il cui peso era 5 carrube e  $\frac{1}{2}$  grani, cioè  $\frac{5}{8}$ 5 carrube; e lo pose sopra il fuoco, per ripulire l'argento dallo stagno: e essendo stato fatto ciò, trovò di lì 2 carrube di argento puro, e  $\frac{1}{2}$ 2 grani, cioè  $\frac{5}{8}$ 5 carrube; si chiede quanto argento puro era nelle libbre di quella lega d'argento.*

Abbiamo analizzato dapprima le unità di misura di peso in vigore a Pisa nel 1200, comprendendo i rapporti tra di esse e cercando di spiegare l'etimologia delle parole, che sicuramente è sembrata legata ai prodotti e al commercio: i ragazzi hanno osservato come in alcuni casi le unità di peso e le unità relative al valore dei soldi si confondano le une con le altre. Le misure di peso al tempo di Fibonacci erano essenzialmente le seguenti: 1 *libbra* (circa mezzo chilo) equivalente a 12 *once*; 1 *uncia* equivalente a 25 *denari di cantare*; 1 *denaro di cantare* = equivalente a 6 *carrubbe*; 1 *carrubba* equivalente a 4 *grani*. Le monete erano ricavate da una lega che conteneva una parte di argento puro e una parte di metallo povero. Da una *libbra* (490 gr. circa) di tale lega venivano ricavati 240 monetine dette *denari*; 12 denari formavano un soldo e 20 *soldi una libbra*. La parola *libbra* (tradotta a volte con *lira*) viene utilizzata sia come misura di un peso, sia come una unità di conto per indicare 20 soldi. Abbiamo scoperto che *cantaro* [dall'arabo *qintār*] ha lo stesso etimo di *quintale*; che libbra in latino vuol dire «bilancia». *Carrubba* fa riferimento al fatto che nei mercati arabi si utilizzassero i semi di carrube per pesare le gemme preziose, grazie al loro peso e for-

ma costanti; mentre il grano è una misura di peso, per piccole quantità, largamente usata specialmente nei paesi anglosassoni. Il nome sembra derivare dal fatto che tale unità di misura è basata sul peso medio d'un grano di frumento. Come si vede nell'immagine riportata sotto abbiamo ricostruito l'equivalenza approssimativa tra le antiche unità di misura con il sistema decimale dei grammi.

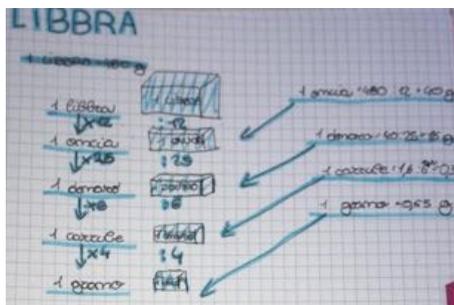


Figura 9: Le unità di misura di peso in vigore a Pisa nel 1200

La nostra intenzione era quella di riprodurre le unità di peso con della plastilina fatta da noi, ma ci siamo resi conto che i grani erano davvero troppo difficili da realizzare e da pesare con la nostra bilancia a due bracci, rudimentale ma sicuramente molto più rappresentativa dei problemi di pesata che si potevano incontrare nel Medioevo, rispetto ad una bilancia tecnica elettronica. Così ci si sono posti problemi davvero sostanziali che si possono affrontare in un laboratorio vero: la sensibilità degli strumenti, gli errori, le approssimazioni sulle cifre decimali. Anche se la trattazione rimane quella appropriata ad una seconda secondaria di primo grado, l'occasione di riflessione è stata davvero importante e realistica. Dopo aver compreso quali siano le caratteristiche di uno standard, ho pensato di far utilizzare i blocchi BAM per tale scopo. I ragazzi li conoscono, li abbiamo a disposizione e per i problemi con piccole unità di misura come i grani, i denari ed i carrubi vanno benissimo.



Figura 10: Le unità di misura di peso in uso a Pisa nel '200 ricostruite con i BAM

Il pomeriggio prima dell'esercitazione in laboratorio, ho prelevato 12,5 g equivalenti a  $2\frac{5}{8}$  di carrube di limatura di ferro colorata con glitter e li ho mescolati alla cera di una candela sciolta fino ad avere 27,2 g che equivalgono a  $5\frac{5}{8}$  di carrube; (naturalmente le equivalenze sono stabilite sulla bilancia tecnica con gli standard fatti con i BAM). Li ho messi a solidificare per il giorno dopo: sono il mio modello sperimentale. Il giorno successivo propongo di pesare il campione di cera e metallo, che io chiamo come nella scheda "bolzone". Alla pesata i ragazzi si accorgono che pesa un po' meno di 6 carrubi, quindi meno di un denaro per la precisione con un numero misto, pesa  $5\frac{5}{8}$  di carrube. Propongo di analizzarlo: di dire cioè qual è il rapporto tra "l'argento" e d il "bolzone". Loro sanno che in passato si doveva fare coppellazione per purificare l'argento, ci chiariamo sul fatto che noi non possiamo realizzare delle reazioni chimiche ad alta temperatura e che la nostra cera è solo un esempio di minerale proveniente dalla miniera, ma che ci dobbiamo porre il problema di separare i componenti, proprio come in un metodo di purificazione qualsiasi. L'idea è di sciogliere filtrare nelle nostre "coppelle" (i recipienti di alluminio sono comunque delle scodelle e questa è l'etimologia). Il nostro modello ha fatto sorridere i ragazzi, a me non interessava che fosse di alto livello tecnico, piuttosto che fosse "problematico e rappresentativo". Per l'illustrazione di quanto segue si veda la Figura 12. Nello sciogliere si sono separati i glitter, di densità minore, hanno simulato le impurezze metalliche minori. La successiva separazione è stata fatta per filtrazione: attraverso un colino la limatura di ferro, il nostro argento, è stata separata dalla cera. Il risultato è venuto dalla divisione tra  $21/8$  e  $45/8$ , quindi tra  $21:45=21/45=7/15$ , che i ragazzi hanno stimato facendo un calcolo approssimato 0,47 come un po' meno del 50%.

Poiché, fissata una data lega di argento e rame, la quantità di argento  $P(a)$  contenuta in una parte  $a$  di quella lega è proporzionale ad  $a$ , se in  $5\frac{5}{8}$  carrube di lega vi sono  $2\frac{5}{8}$  carrube di argento, in  $5\frac{5}{8}$  onces di quella lega vi saranno  $2\frac{5}{8}$  onces d'argento e quindi in 12 onces di quella lega cioè in una libbra vi saranno  $(21 \times 12)/45$  onces d'argento cioè 5 onces e  $\frac{3}{5}$ .

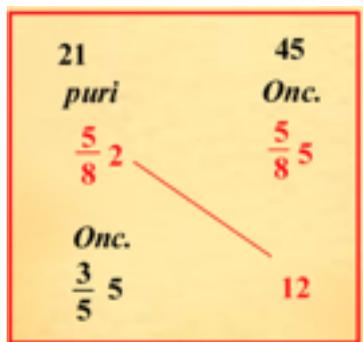


Figura 11: Algoritmo risolutivo problema dell'argento

Dato che si tratta di argento cioè di un materiale prezioso, la precisione della frazione, in problemi di questo tipo è essenziale. Tornando alla nostra esperienza, se in 27,2 grammi della nostra lega vi sono 12,5 grammi di argento in un chilo di quella lega vi saranno  $(12,5 \times 1000)/27,2 = 451,2$  circa grammi di argento. Un esempio molto chiaro di come la frazione fosse un valore preciso mentre il numero decimale un valore approssimato, ma anche di come questo concetto sia molto utile nella pratica. Di qui la riflessione sul “valore” e “l’aspetto” dei numeri nelle scienze applicate e nella matematica.

## Musica tra emozioni e matematica

Molto spesso ho cercato di far capire come la bellezza e l’armonia siano due concetti fortemente legati alla matematica: cerco di far capire ai ragazzi come i numeri possano essere considerati un elemento su cui mettersi davvero tutti d’accordo in armonia. La classe che ha sperimentato il percorso che illustrerò ha davvero bisogno di questo messaggio ed ha bisogno che sia detto con semplicità ed operosità: abbiamo intrapreso un laboratorio centrato sul tema del rapporto in campo musicale. La classe fa parte di una sezione ad indirizzo musicale. Sono ragazzi da trattare con estrema attenzione: particolari situazioni richiedono una didattica che coinvolga in gruppo e valorizzi le peculiarità di ognuno; questa classe ha bisogno davvero di armonia. Si è preso spunto dal testo della professoressa Catastini [11]. Sono stati portati in classe dei tubi musicali, i tubing, uno strumento a percussione fatto di tubi di plastica che i ragazzi hanno già suonato in passato: ogni tubo rappresenta una nota musicale e l’esecuzione prevede la partecipazione in gruppo. Li ho invitati a riflettere su cosa secondo loro differenziasse un tubo e quindi una nota dall’altra. Hanno notato che ad eccezione del colore e della lunghezza per tutto il resto i tubi sono identici, compresa la sezione. Quindi la motivazione del loro diverso suono deve risiedere nella diversa lunghezza. L’attività preliminare a questa è stata quella di rapportare i segmenti uno rispetto all’altro con il compasso. Su questa attività, che io ho chiamato **divisione** e che loro hanno chiamato **confronto**, abbiamo discusso un pò: siamo arrivati all’idea che **confrontare**, **dividere**, **rapportare** sono tre parole che servono per esprimere quante volte una grandezza è contenuta in un’altra e che la prima grandezza diventa un termine di paragone, una **ratio**. Lavorando a piccoli gruppi, 2 massimo 3 studenti, i ragazzi hanno riportato in scala 1:10 le lunghezze dei tubi misurate direttamente da loro, dopo aver riflettuto che la scala 1:10 è in realtà un particolare tipo di rapporto. Una delle prime impressioni è che l’operazione di misura è complessa e richiede a volte delle approssimazioni ed “il parere” di diversi operatori: il concetto di errore nella misura ha fatto capolino nei nostri lavori. In classe si è fatta l’attività di misura ed il rapporto tra le lunghezze dei diversi segmenti in scala che rappresentavano i tubi è stata eseguita con il compasso, seguendo il metodo illustrato in Figura 13. A casa i ragazzi hanno fatto una rielaborazione e riflessione personale su quanto visto in classe ed hanno ripreso in mano i numeri: all’inizio dell’attività il mio scopo era di farli riflettere sul rapporto e non sulle operazioni di divisione tra numeri. Eseguendo poi le divisioni hanno affermato, che la divisione con il compasso era molto semplice e che

ricalcava esattamente ciò che avviene nell'algoritmo della divisione, dove il confronto sta prima tra dividendo e divisore e poi tra resto e divisore. Si sono accorti che alcuni rapporti (dopo poco hanno cominciato a chiamarli così) sono numeri interi, altri numeri decimali limitati, altri ancora numeri periodici. Hanno così ricostruito tutti i rapporti dell'ottava diatonica in due modi complementari. Alcuni rapporti sono stati ricavati sperimentalmente, come visto sopra. Poi l'attività si è in qualche modo invertita: ad essere onesti, un paio di tubi erano rovinati sul bordo e la lunghezza si indovinava male, abbiamo deciso di fare tesoro di questo problema. Partendo dal rapporto noto delle note musicali da essi suonate, abbiamo deciso di indovinare la lunghezza dei tubi rimanenti: hanno ritrovato una delle attività fatte all'inizio di questo percorso, cioè costruire un segmento che sia in un certo rapporto con il segmento dato. Per questo hanno utilizzato il teorema di Talete per dividere il segmento dato in un certo numero di parti uguali ad esempio 4, per poi riportare su una retta un certo numero di quelle parti. Una volta ottenuta la lunghezza ipotetica è stato verificato se potesse essere compatibile con la lunghezza del tubo corrispondente alla nota. Lo studio dei rapporti applicati alla musica ci ha portato a studiare anche le note suonate con la chitarra. Dal lavoro combinato eseguito nell'ora di matematica e di strumento musicale abbiamo tratto le seguenti informazioni, con riferimento alla Figura 15:

- 1- DO1 si trova sul primo tasto della seconda corda e DO2 si trova sul tredicesimo tasto della seconda corda, esattamente alla metà. Tra le due note c'è un intervallo di ottava e sono separate da undici tasti.
- 2- Tra le note MI e LA c'è un intervallo di quarta. Il MI è la prima corda a vuoto e il LA si trova sul quinto tasto della prima corda. Tra di loro c'è un rapporto di  $3/4$ . Le due note sono separate da quattro tasti.
- 3- Quest'immagine mostra il rapporto tra le note MI e SI, che è di  $2/3$ , come quello che c'è tra RE e LA. Anche tra queste due note c'è un intervallo di quinta e sono separate da sei tasti. Il MI è la prima corda a vuoto e il SI si trova sul settimo tasto.
- 4- Questo rapporto vale per molti casi, SOL-LA, RE-MI e LA-SI. Il SOL, il RE e il LA sono la terza, la quarta e la quinta corda a vuoto e su i loro secondi tasti ci sono le note LA, MI e SI. Tutti gli intervalli sono di seconda e possono essere rappresentati con la frazione  $8/9$ , tutti sono separati da 2 tasti.
- 5- La foto rappresenta l'intervallo di terza che intercorre tra la nota SOL (terza corda a vuoto) e la nota SI (sul quarto tasto della terza corda), esse sono separate da 4 tasti.
- 6- Nell'immagine possiamo notare l'intervallo presente tra le note SOL e MI, di sesta. Il SOL è la terza corda a vuoto mentre il MI si trova sul nono tasto della terza corda. Le due note sono separate da 9 tasti. Avendo ora ricostruito i rapporti tra le lunghezze delle diverse note la nostra aspirazione è di costruire uno strumento musicale vero e proprio. Vorremmo realizzare ora uno strumento sulla base delle nostre conoscenze matematiche e dimostrare che l'emozione

della musica può essere costruita con il messaggio semplice, scarno e potente dei numeri.

## Conclusioni

Il lavoro che insieme ai miei studenti abbiamo fatto con il Liber Abaci come guida ha dato un carattere profondamente innovativo al mio modo di fare scuola, in maniera forse paradossale, dimostrando che la modernità in ambito della didattica della matematica non necessariamente coincide con l'utilizzo di strumenti all'avanguardia. Il punto è proprio questo: gli strumenti tecnologici possono essere un mezzo, d'altra parte utilizzato nella realizzazione di questo progetto, ma il contenuto e l'essenza non possono prescindere dalla storia della matematica e dell'uomo in generale. Riportare i miei studenti all'origine delle cose li ha incuriositi, ha dato loro il senso della pienezza e complessità del sapere; lavorare con le mani in maniera cooperativa li ha divertiti; scoprire insieme a me un modo ed un mondo nuovo ci ha resi compagni di un viaggio, dove l'insegnante apre la strada ed ha solo il privilegio di ricercare ed ammirare per prima paesaggi nuovi. Non posso dire che ci sia molto lavoro da fare ancora: credo semplicemente che questo lavoro non abbia una fine, per la fortuna della scuola.

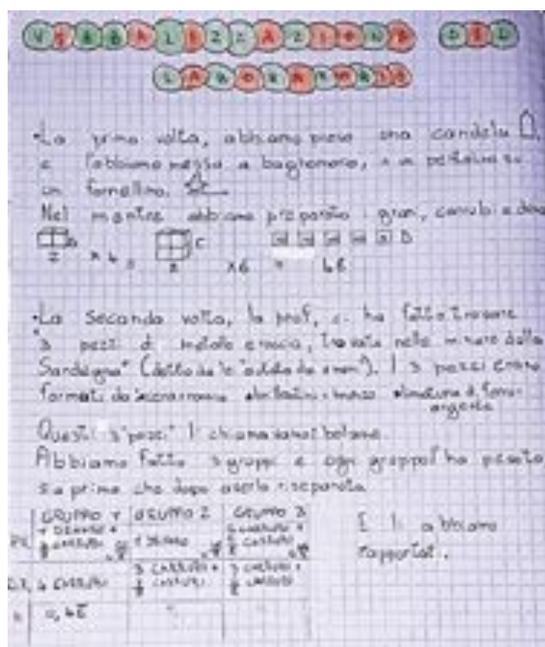


Figura 12: Verbalizzazione dell'esperienza di "coppellazione"



Figura 13: Momenti della simulazione della coppedazione

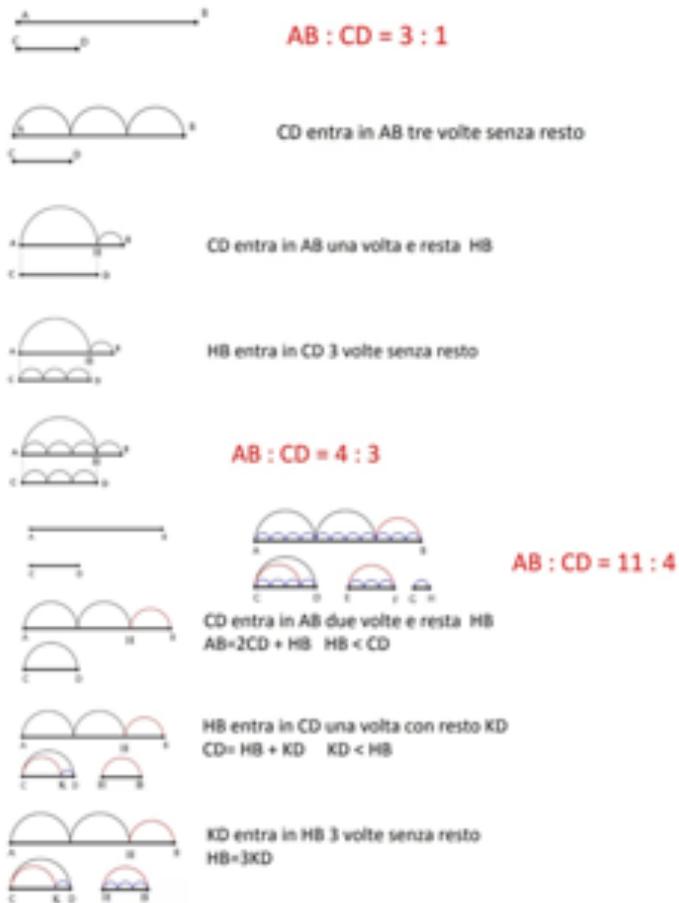


Figura 14: Laboratorio sui rapporti tra segmenti con il compasso: le figure sono tratte dall'articolo del professore Franco Ghione "Le origini dell'Aritmetica moderna in Fibonacci. Quali indicazioni didattiche". (5)

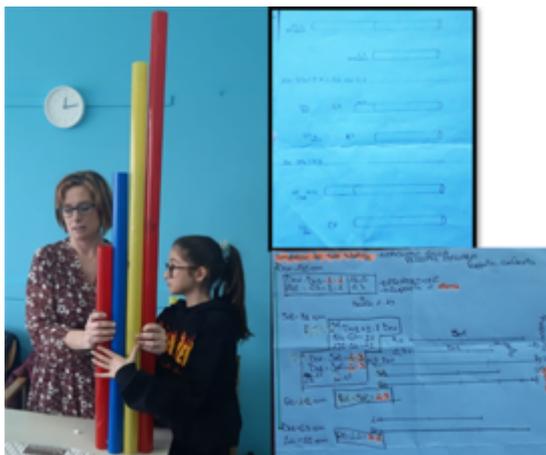


Figura 15: I tubi musicali



Figura 16: I rapporti nella chitarra

## Ringraziamenti

Il percorso descritto ha il suo fondamento sulle idee, gli insegnamenti, il supporto ed il consiglio del professore Franco Ghione, che ringrazio infinitamente. Fondamentale è stato il confronto della mia amica e collega Silvia Cerasaro, che sebbene lontana dal posto dove vivo e lavoro, è per me una compagna di lavoro insostituibile. Un grazie particolare va al dottore Daniele Pasquazi, che molto mi ha insegnato e mi insegna per quanto riguarda la motivazione e l'impostazione delle attività di didattica laboratoriale, che in questo lavoro ho messo in pratica.

## Bibliografia

- [1] MONTESSORI M., *Lezione del 5 maggio*, Roma. 1931.
- [2] AA.VV., traduzione del Liber Abaci dal sito [www.progettofibonacci.it](http://www.progettofibonacci.it)
- [3] DEHAENE S., *Il pallino della matematica*, Raffaello Cortina editore, Milano, 2010.
- [4] GHIONE F., CATASTINI, R. RASCHED, *Algebra*, Carrocci editore, Roma, 2016.
- [5] GHIONE F., *Le origini dell'Aritmetica moderna in Fibonacci. Quali indicazioni didattiche*, Periodico di Matematiche, Vol. 11, Serie XIV, 2019.
- [6] D'AMORE B., *La matematica dappertutto*, Pitagora Editore, Bologna, 2007.
- [7] MONTESSORI M., *Psicogeometria*, Opera Nazionale Montessori, Roma, 2012.
- [8] PASQUAZI D., *Capacità sensoriali e approccio intuitivo-geometrico nella pre-adolescenza: un'indagine nelle scuole*, Giornale Italiano Di Pedagogia Sperimentale, XXVIII, 1, 2020.
- [9] GHIONE F., *I denari pisani fino alla prima metà del '200*, dal sito [www.progettofibonacci.it](http://www.progettofibonacci.it).
- [10] BALDASSARRE M., *Zecca e monete del Comune di Pisa dalle origini alla seconda repubblica XII secolo-1406*, Felici editori, Pisa, 2010.
- [11] CATASTINI L., *Tra parole, matematica e musica*, dal testo *Quale scuola?* a cura di F. Clementi e L. Serianni, Carocci, Roma, 2015.



## Fibonacci e il peso specifico

### Fibonacci and the specific weight

Laura Catastini<sup>1</sup> e Franco Ghione<sup>2</sup>

*Supponiamo di voler calcolare il volume di una statua umana priva di vestiti, alta 3 (braccia) e ben proporzionata. Costruiamo un vaso di legno o di un altro materiale a forma di parallelepipedo, lungo  $3\frac{1}{4}$ , largo  $1\frac{1}{2}$  ed alto 1. Occorre che la tenuta stagna del vaso sia perfetta. Dopo aver disposto orizzontalmente il vaso, lo si riempia d'acqua fino ad  $\frac{1}{3}$  dall'orlo superiore, preoccupandoci di segnare il livello dell'acqua. Immergiamo la statua dentro il vaso ed aspettiamo finché il livello dell'acqua non si stabilizza, dopo di che segniamo il nuovo livello raggiunto dall'acqua, più alto del precedente. Dopo aver estratto la statua, misuriamo la differenza fra i due livelli e supponiamo che sia  $\frac{1}{4}$ . Troviamo l'area della base rettangolare del vaso moltiplicando  $3\frac{1}{4}$  per  $1\frac{1}{2}$ , ottenendo  $4\frac{7}{8}$ . Il prodotto dell'area di base per la differenza dei livelli, pari a  $\frac{1}{4}$ , corrisponde al valore  $1\frac{7}{32}$ , che rappresenta il volume della statua.*

**Piero della Francesca**, *De quinque corporibus regularibus*, parte III, caso 17

In questo lavoro andiamo alla ricerca delle origini del concetto di peso specifico che riteniamo importante anche da un punto di vista didattico perché si accompagna all'inizio di un nuovo modo di fare scienza, recuperando idee antiche, e servendosi di una nuova potente aritmetica che permette l'introduzione e la manipolazione di nuove grandezze composte. Il peso specifico è un buon esempio di questo e, a nostro avviso, praticabile nelle attività laboratoriali della nostra scuola di primo e di secondo grado a partire dalla bilancia idrostatica di origine archimedea. Non solo perché esso permette di distinguere con precisione matematica e non per impressioni sensoriali come il colore, l'odore, l'opacità, o altro, i diversi materiali, ma anche perché la sua formulazione matematica ha tardato ad affermarsi, come vedremo, per la mancanza di una adeguata aritmetica capace di superare i limiti imposti dalla teoria euclidea delle proporzioni, male intesa per secoli nelle accademie medioevali, prigioniera della filosofia neo platonica che vedeva nella geometria di Euclide una espressione del mondo astratto delle idee e che bandiva ogni applicazione concreta, e più di tutte quelle mer-

---

<sup>1</sup>laura.catastini@gmail.com

<sup>2</sup>ghione@mat.uniroma2.it

cantili indegne di un uomo libero. Fu invece proprio il nuovo rapporto tra economia e matematica, nato con Fibonacci nel XIII secolo, che diede avvio a un radicale ripensamento del rapporto, come diremo oggi, tra scienza pura e scienza applicata.

## Archimede

Il fatto che vi siano oggetti più pesanti di altri è continuamente confermato dalla nostra pratica quotidiana: un sasso è più pesante di un batuffolo di cotone della stessa grandezza, una pepita d'oro è più pesante di una uguale pepita d'argento mentre una pepita d'argento un po' più grande può pesare come una pepita d'oro. Tuttavia, malgrado il concetto di peso specifico sia così semplice e naturale, esso fu per molti secoli percepito in modo confuso, tanto che neppure il più grande scienziato dell'antichità, Archimede, avendolo probabilmente calcolato in alcuni casi usando una bilancia idrostatica, ce ne fornisce una definizione esplicita. La proposizione VII del primo libro del suo celebre trattato sui galleggianti ne fornisce implicitamente la sostanza:

*Un corpo più pesante di un liquido, se immerso in esso, scende in giù fino al fondo e, quando è pesato nel liquido, sarà tanto più leggero rispetto al suo peso vero quanto [maggiore] è il peso del liquido spostato.*

Se dunque consideriamo un corpo A che affonda e indichiamo con  $P_v(A)$  il suo peso "vero", cioè il peso del corpo misurato nell'aria, e con  $P_a(A)$  il peso del corpo A misurato nell'acqua, allora la proposizione di Archimede ci dice che  $P_v(A) - P_a(A)$  è uguale al peso del liquido spostato, il quale misura, come ci suggerisce Piero della Francesca, il volume  $V$  del corpo. Ora la cosa interessante è che se prendiamo due corpi A e B dello stesso materiale è ovvio che:

$$P_v(A) : P_v(B) = P_a(A) : P_a(B)$$

La relazione di proporzionalità precedente ci fornisce anche la relazione

$$\frac{P_v(A)}{P_a(A)} = \frac{P_v(B)}{P_a(B)}$$

che ci dice che il rapporto  $P_v(A)/P_a(A)$  non dipende dalla quantità di materiale pesato ma solo dal tipo di materiale scelto. Ugualmente avviene per il quoziente

$$\frac{P_v(A)}{P_v(A) - P_a(A)} = \frac{P_v(B)}{P_v(B) - P_a(B)}$$

e quindi se  $V = P_v(A) - P_a(A)$  il numero  $P_v/V$  non dipende dalla quantità di materiale preso in esame ma solo dal tipo di materiale considerato: per lo stagno, ad esempio, sarà più piccolo che per il ferro. Questo numero è essenzialmente il *peso specifico* del corpo A e non è difficile calcolarlo, come vedremo, con una bilancia idrostatica. La cosa straordinaria, di cui Archimede è perfettamente consapevole, è che ora abbiamo un modo preciso, non basato su caratteristiche soggettive sensoriali per distinguere una materia da un'altra. Ed è proprio questo che Archimede utilizza per smascherare l'imbroglio dell'artigiano che, invece di confezionare per il re di Si-

racusa Gerone II una corona usando tutto l'oro che il sovrano gli aveva affidato, ne costruisce una dello stesso peso, ma d'oro solo esternamente. Data la bellezza di quell'oggetto, così narra la leggenda, il re non volle distruggerlo per verificarne l'autenticità, ma pose il quesito, se fosse o meno d'oro, al grande scienziato. Verificato che il peso di quella corona era uguale a quello dell'oro che il re gli aveva consegnato, immergendo la corona in acqua Archimede scoprì che quell'oggetto aveva un volume maggiore del volume occupato dalla stessa quantità di oro perché spostava più acqua e quindi non poteva essere interamente d'oro. L'oro e la corona avevano un diverso peso specifico. L'idea dovette apparire a Vitruvio, che nel suo *De architettura* riporta l'aneddoto<sup>3</sup>, così geniale da immaginare Archimede che esce dal bagno nudo gridando "Eureka". Oltre al racconto fantasioso di Vitruvio, abbiamo altre testimonianze più affidabili e circostanziate<sup>4</sup> come il *Carmen de ponderibus et mensuris*, scritto in versi intorno al 400 d.C. e attribuito a Remmio Flavino dove si descrive il modo col quale Archimede poté misurare il rapporto tra la quantità d'oro e quella di argento contenuta nella falsa corona, attraverso l'uso di una bilancia idrostatica.

## Galileo e la sua *Bilancetta*

Anche il giovane Galileo Galilei dovette subire la fascinazione di questa straordinaria idea tanto da scrivere a soli 22 anni un breve trattato sull'argomento, *La bilancetta*, dove ricostruisce quello che, secondo lui, doveva essere il metodo seguito da Archimede per risolvere il problema della falsa corona. Galileo, che probabilmente non conosceva il *Carmen de ponderibus et mensuris*, è giustamente molto critico con la ricostruzione raccontata da Vitruvio e scrive:

*Ma il conoscer io che tal modo [quello descritto da Vitruvio] era in tutto fallace e privo di quella esattezza che si richiede nelle cose matematiche, mi ha più volte fatto pensare in qual maniera, co 'l mezo dell'acqua, si potesse esquisitamente ritrovare la mistione di due metalli; e finalmente, dopo aver con diligenza riveduto quello che Archimede dimostra nei suoi libri Delle cose che stanno nell'acqua ed in quelli Delle cose che pesano ugualmente, mi è venuto in mente un modo che esquisitissimamente risolve il nostro quesito: il qual modo crederò io esser l'istesso che usasse Archimede, atteso che, oltre all'esser esattissimo, dipende ancora da dimostrazioni ritrovate dal medesimo Archimede.*

Il modo che Galileo pensa sia di Archimede è basato sull'uso di una bilancia idrostatica la *bilancetta* per l'appunto. Vediamo più da vicino il procedimento seguito Galileo che allega al suo lavoro una tavola dove riporta i pesi nell'aria e nell'acqua di diversi materiali tra cui l'oro, l'argento, il rame e diverse pietre preziose.

<sup>3</sup>Vitruvio, *De architectura*, IX proemio, 9-12

<sup>4</sup>L. Russo, *Archimede*, Carocci Editore, 2020, pg. 52-54

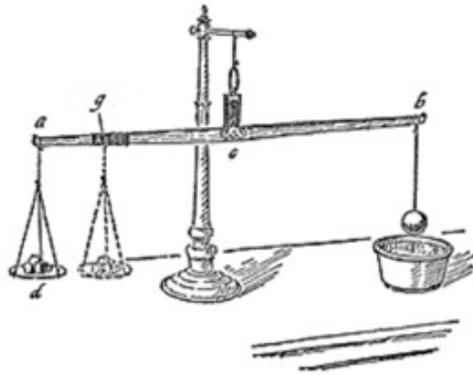


Figura 1: Ricostruzione tridimensionale della bilancia idrostatica di Galileo

Sia  $ab$  una bilancia a due braccia con il fulcro in  $c$ , sospendiamo in  $b$  un corpo che equilibriamo in  $a$  con un peso  $d$  equivalente in modo che la bilancia sia in equilibrio. Immergiamo ora il corpo in  $b$  nell'acqua, la bilancia penderà dalla parte di  $a$  e, per riequilibrare il peso, spostiamo il piatto  $d$  più vicino al fulcro nel punto  $g$ . La posizione del punto  $g$  non cambia se sostituiamo il corpo con un altro corpo più o meno pesante, dello stesso materiale poiché, per il principio della leva, pure stabilito da Archimede, il rapporto tra i pesi è uguale al rapporto tra i bracci

$$P_v : P_a = cb : cg$$

e il rapporto tra i pesi, stante il principio di Archimede visto prima, non cambia. Galileo calcola intanto, il punto  $f$  dove si equilibra l'oro dopo l'immersione nell'acqua e il punto  $e$  dove si equilibra l'argento.

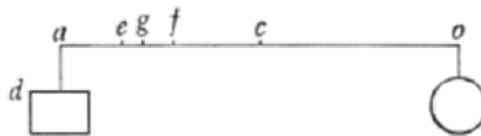


Figura 2: Da *la Bilancetta* di Galileo Galilei

Prende poi una lega ottenuta fondendo una certa quantità  $p$  di oro e una certa quantità  $q$  di argento e trova il punto  $g$  dove tale lega, immersa nell'acqua, si riequilibra. A partire dalle relazioni note dalla legge sull'equilibrio,

$$\begin{aligned} oc : cf &= p : p' \\ oc : ce &= q : q' \\ oc : cg &= p + q : (p' + q') \end{aligned}$$

senza esplicitare il calcolo, ma usando le varie proprietà dei rapporti che si trovano negli Elementi di Euclide, Galileo trova un modo diretto e teoricamente semplicissimo, per trovare il rapporto tra i pesi  $p$  e  $q$  che compongono la lega:

$$fg : ge = p : q$$

Galileo propone anche un modo pratico e molto ingegnoso per valutare sperimentalmente il rapporto tra i segmenti  $fg$  e  $ge$  che vale la pena di riportare:

*... sopra i termini e, f avvolgo 2 fili solo di acciaio (e questo per distinguerli dall'ottone); e poi vo riempiendo tutto lo spazio tra e, f con l'avvolgervi un filo sottilissimo di ottone, il quale mi dividerà lo spazio ef in molte particelle uguali; poi, quando io vorrò sapere la proporzione che è tra fg e ge, conterò i fili fg ed i fili ge, e, trovando i fili fg esser 40 ed i ge esser, per esempio, 21, dirò nel misto esser 40 di oro e 21 di argento. Ma qui è da avvertire che nasce una difficoltà nel contare: però che, per essere quei fili sottilissimi, come si richiede all'esquisitezza, non è possibile con la vista numerarli, però che tra sì piccoli spazii si abbaglia l'occhio. Adunque, per numerargli con facilità, piglisi uno stiletto acutissimo, col quale si vada adagio adagio scorrendo sopra detti fili; ché così, parte mediante l'udito, parte mediante il ritrovar la mano ad ogni filo l'impedimento, verranno con facilità detti fili numerati: dal numero de i quali, come ho detto di sopra, si averà l'esquisita quantità de i semplici, de' quali è il misto composto.*

Sicuramente in questo lavoro, come in Archimede, il concetto di peso specifico è nell'aria e pienamente compreso anche da un punto di vista quantitativo ricavabile dalla tavola riportata da Galileo nella sua appendice, ma in un qualche modo non viene definito come faremo oggi con una formula matematica attraverso il rapporto tra il peso del corpo e il suo volume. In seguito cercheremo, andando a ritroso, di capire come si sia arrivati a questa definizione e quali difficoltà, pensiamo di natura ideologica, si siano frapposte.

## **Tartaglia alle prese con una nave affondata con le sue merci**

Prima di Galileo, anche Tartaglia, che aveva tradotto in volgare il testo di Archimede sui galleggianti, si era cimentato, in modo confuso e chiaro nello stesso tempo, con il concetto di peso specifico. Chiaro perché riesce a calcolarlo pesando il corpo nell'aria e nell'acqua in vari casi, ma confuso come risulta dalla definizione che lui stesso fornisce:<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Nicolò Tartaglia: *Ragionamenti sopra la sua travagliata invenzione...* (1551) ristampati in *Quesiti et inventioni diverse*, libro VIII, reperibile in rete all'indirizzo [https://webmail.aruba.it/index.html?\\_v\\_=v4r2b55.20190114\\_0830](https://webmail.aruba.it/index.html?_v_=v4r2b55.20190114_0830), pag. 168,

*Quesito XIII, invenzione XI*

*Un corpo se dice essere più grave d'un altro secondo la specie, quando che la sostanza material di quello è più ponderosa della sostanza material dell'altro, come è il piombo del ferro.*

Cosa sia di preciso questa *sostanza material* non è chiaro, ma è chiaro che, pur non riuscendo a dirlo, Tartaglia sapeva di toccare una proprietà chiave capace di distinguere le diverse sostanze, una proprietà legata alla struttura intima della materia, alla distribuzione e alla ossatura degli atomi che la compongono. Tartaglia, come abbiamo detto, nei suoi *Ragionamenti sopra la sua travagliata invenzione* calcola, a suo modo, il peso specifico di varie sostanze pesandole nell'aria e nell'acqua<sup>6</sup> non solo per un suo interesse scientifico, ma anche per contribuire alla soluzione di un difficile problema pratico. Verso la metà del XVI secolo tra Venezia e Chioggia era affondata una nave mercantile che, con tutto il suo carico si era appoggiata al fondo sabbioso del mare. Tartaglia calcolando il peso specifico di diversi materiali (mattoni, marmo, ferro, piombo, rame, argento, oro) riesce a determinare le differenti forze necessarie per portare a galla le singole merci stipate nella stiva della nave affondata.

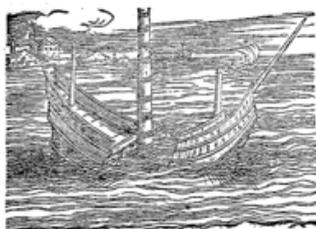


Figura 3: Silografia da Tartaglia, *Ragionamenti sopra la sua travagliata invenzione*

Per lo stesso scopo ebbe anche a perfezionare una sorta di scafandro, la “campana da palombaro”, con il quale era possibile lavorare sott'acqua per un tempo abbastanza lungo.



Figura 4: Silografia da Tartaglia, *Ragionamenti sopra la sua travagliata invenzione*

<sup>6</sup>Annibale Mottana, *Galileo e la bilancetta*, Olschki editore, 2017.

## Fibonacci racconta come caricare di merci una nave

Prima ancora di Tartaglia, Leonardo Pisano nel suo *Liber abaci* (1202), grandemente ispirato all'aritmetica e all'algebra araba che lui aveva potuto studiare direttamente con maestri arabi, fornisce dei chiari cenni al concetto di peso specifico. È finalmente uscita, per conto dell'editore Olschki<sup>7</sup>, l'edizione critica del *Liber abaci* a cura di Enrico Giusti e Paolo d'Alessandro che permette agli studiosi di approfondirne i contenuti sulla base di un testo restituito nella sua forma corretta e originale con i moderni criteri di analisi filologica ovviamente assenti nell'edizione di Baldassarre Boncompagni del 1857. È anche in corso di pubblicazione, sul sito [www.progettofibonacci.it](http://www.progettofibonacci.it), una prima traduzione completa in italiano<sup>8</sup>, col testo latino di Boncompagni a fronte, l'unico disponibile gratuitamente, corredata da schede di approfondimento, che permettono una più agevole comprensione del testo originale antico. Questo lavoro è stato realizzato grazie al lavoro collettivo di un gruppo di intellettuali di varie discipline che prestano volontariamente la loro opera.

Nel libro ottavo del *Liber* Leonardo Pisano, più noto come Fibonacci, ci racconta come nei porti medioevali venivano caricate le navi. Ciò che è importante sapere quando si vuole stipare delle merci nella stiva di una nave, non è tanto il loro peso assoluto, facilmente valutabile con una bilancia, quanto il volume che esse occupano, essendo il volume della stiva un vincolo fisso, mentre il peso può essere (ovviamente entro certi limiti) arbitrario. Il problema è analogo, come ci spiega Fibonacci, a quello di convertire un peso noto di una data unità di misura in un'altra unità di misura, a quei tempi diverse da comune a comune.

*E questo modo è molto utile nel carico delle navi, quando si caricano merci diverse, che hanno la loro specificità secondo la diversità di peso, la loro leggerezza o pesantezza, come le navi che si caricano in Garbo [nord Africa occidentale], che vengono caricate a cantari<sup>9</sup> di pelli. Per cui, poiché sulle navi si valutano diversamente le merci più pesanti e quelle più leggere rispetto alle pelli, quelle che hanno minore o maggiore volume [globum], questa è stata la regola tradizionale, che per l'allume, che pongono nella stiva, si calcolano due cantari per ogni cantaro di pelli; per le pelli di capra, invero, poiché sono più leggere del cuoio, si calcolano due cantari al posto di tre<sup>10</sup>.*

<sup>7</sup>I testi latini in nota del *Liber Abaci* e la loro numerazione sono ricavati dall'edizione critica recentemente edita da Olschki: E. Giusti, P. d'Alessandro, Leonardi Bigolli Pisani, vulgo Fibonacci, *Liber Abaci*, 2020. La traduzione è nostra.

<sup>8</sup>La traduzione è il più possibile letterale perché pensata per gli studenti delle superiori che possono così esercitarsi nella lettura e comprensione del un testo latino del'200. La trascrizione di Boncompagni, che è disponibile gratuitamente in rete, è stata elettronicamente ripulita rendendola facilmente accessibile a tutti.

<sup>9</sup>Un cantare (dall'arabo *qintar*) è una unità di misura di peso per grandi quantità. Il cantaro veniva suddiviso in 100 parti uguali chiamate rotoli.

<sup>10</sup>Et hic modus est utilis multum in honeratione navium, cum honerentur diversis mercibus, que habent modum secundum diversitatem ponderis et levitatem vel gravitatem illarum, ut naves que honerantur in Garbo, que honerantur ad cantaria coriorum. Unde cum in ipsis ponderentur diverse merces graviore et leviores quam coria et habeant minorem globum et maiorem; unde ab antiquis talis fuit ordinatio, quod de alume, quod ponunt in fundo navis, ponunt duo cantaria pro uno coriorum; de beccunis vero, quia sunt

Nella nave vi è dunque posto per un certo numero di cantari di cuoio che rappresenta l'unità di volume. Per l'allume che è più pesante delle pelli, 2 cantari di allume hanno "volume" 1 cioè occupano lo stesso posto di un cantaro di pelle, ugualmente la pelle di capra che è più leggera del cuoio avrà "peso specifico" (rispetto al cuoio) uguale a  $2/3$ . Inoltre Fibonacci ci insegna che, come ogni altra misura medioevale, questi "pesi specifici" calcolati in modo empirico cambiavano da porto a porto:

*Similmente le navi, che si caricano in Sicilia, si caricano [misurando il] peso di un collo, questo collo può essere suddivisa in 100 rotoli [di collo], e si pongono 3 cantari di rame in un solo collo; si pongono  $1\frac{1}{3}$  cantaro per un collo di cotone. Le navi che si caricano nella zona di Alessandria, si caricano in sporte di pepe, e questa sporta può essere similmente divisa in 100 rotoli [di sporta].<sup>11</sup>*

Sembra dunque che nei diversi porti commerciali vi fossero delle tabelle che indicavano il "peso specifico" delle varie mercanzie da caricare sulle navi mercantili. I loro valori, ottenuti a partire da una data unità di volume come il "collo" in Sicilia o le "sporte" ad Alessandria, si trovavano calcolando il peso, ad esempio, di un collo di rame, per ridurre poi, con una proporzione, il peso del rame che si vuole caricare nel corrispondente numero di colli. Il fatto che queste unità di volume fossero divise in 100 parti fa pensare all'esigenza di rappresentare il risultato del calcolo in modo preciso. Nel caso delle spezie, o delle graniglie era possibile calcolare con una buona bilancia questi "pesi specifici" con molta precisione: era sufficiente pesare una unità di volume (collo o sporta) riempita della data merce per avere il relativo valore da riportare in una opportuna tabella. Gli operatori portuali addetti al carico delle navi dovevano avere una buona formazione aritmetica per controllare il volume delle merci da caricare e calcolare quante e di quali tipi poter stipare su una nave.

Fibonacci propone, come esercizio, il caso di un tizio che in Sicilia deve caricare su una nave 1147 rotoli di cotone e sa che 4 cantari (cioè 400 rotoli) occupano 3 colli e deve dichiarare quanto spazio (in colli) occuperà il suo cotone. Riportiamo il testo originale di questo problema anche per mostrare al lettore la bellezza di un manoscritto, che si pensa datato fine '300, che riporta il *Liber abaci*. (Con. Sopp. C1. 2616, BNCF, folio 48 r.)

#### *Sulla conversione del cotone in colli di Sicilia*

*Se qualcuno in Sicilia ha in una nave un carico di 11 cantari, e 47 rotoli di cotone; e volesse cambiarli in colli; poiché  $\frac{1}{3}$  1 cantaro di cotone, come abbiamo detto, è un collo, allora 4 cantari di cotone sono 3 colli, e quattro rotoli di cotone sono 3 rotoli di collo. Quindi scrivi nel riquadro gli 11 cantari e i 47 rotoli, cioè 1147 rotoli sotto i 4*

leviores coriis, ponunt duo cantaria pro tribus (Libro VIII, 302-303, pg. 202)

<sup>11</sup>Similiter naves que honerantur in Sicilia honerantur ad pondus colli, qui collus potest habere in se rotulos 100, et ponunt de rame tria cantaria in uno collo, de cotone ponunt cantare  $1\frac{1}{3}$  1 in collo. Et naves que honerantur apud Alexandriam, honerantur ad sportas piperis, que sporta ponitur similiter rotulos 100. (Libro VIII, 304, pg. 202-203)

rotoli di cotone, e moltiplica 1147 per 3 e dividi per 4: farà  $\frac{1}{4}$  860 Rotoli di collo, come si mostra nel riquadro, cioè 8 colli e  $\frac{1}{4}$  60 rotoli di collo<sup>12</sup>.

|                   |          |
|-------------------|----------|
| coll.             | cant. R. |
| 3                 | 4        |
| coll.             | R.       |
| $\frac{1}{4}$ 860 | 1147     |

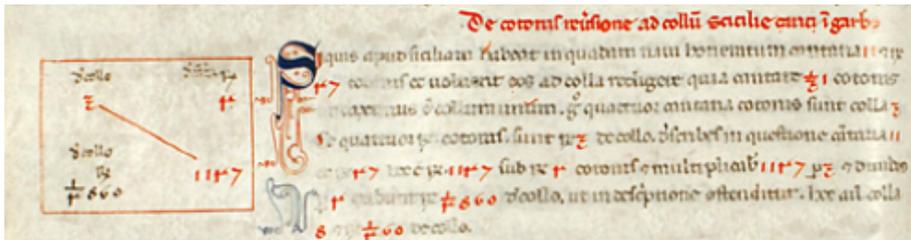


Figura 5: Dal manoscritto del Liber abaci, Con. Sopp. folio 48 r.

## Sono gli scienziati arabi a definire il peso specifico

Il concetto di peso specifico, che in Fibonacci trova una importante applicazione nel calcolare il carico di una nave, e che era stato considerato da Archimede, Tartaglia, Galileo ed altri non sembra una nozione difficile da trattare da un punto di vista quantitativo, perché dunque si deve aspettare, la seconda metà de XVII secolo con Robert Boyle per arrivare alla definizione attuale di peso specifico come rapporto tra peso e volume? In realtà<sup>13</sup> il matematico arabo al- Khāzinī, raccogliendo l'eredità archimedeica e gli studi di numerosi studiosi arabi precedenti come al-Kindī, al-Khāyyam e al Rāzi, nel suo *Mīzān al-ğāmi al-hkma* (Bilancia universale della saggezza, 1130 ca. d.C. ), definisce in modo chiaro il peso specifico:

*Il peso di un corpo relativamente piccolo, quale che sia la sostanza [che lo costituisce] ha rispetto al suo volume lo stesso rapporto che un corpo più grande [della stessa sostanza] ha con il proprio volume.*

<sup>12</sup>*De cotonis reversione ad collum Sicilie.* Si quis apud Siciliam habeat in quadam navi honoratum cantaria 11 et rotulos 47 cotonis et voluerit eos ad colla redigere, quia cantare 1/3 1 cotonis, ut diximus, est collum unum, ergo quattuor cantaria cotonis sunt colla 3, et quattuor rotuli cotonis sunt rotuli 3 de collo. Ergo describes in questione cantaria 11 et rotulos 47, hoc est rotulos 1147, sub rotulis 4 cotonis, et multiplicabis 1147, per 3 et divides per 4: exibunt rotuli 1/4 860 de collo, ut in descriptione ostenditur, hoc est colla 8 et rotuli 1/4 60 de collo. (Libro VIII, 306, pg. 203)

<sup>13</sup>Annibale Mottana, *Galileo e la bilancetta*, Olschki editore, 2017.

Se guardiamo questa affermazione con occhio “accademico-euclideo” non possiamo non inorridire non essendo possibile stabilire un rapporto tra due grandezze non omogenee come il peso e il volume. Tuttavia gli scienziati arabi, forti della loro nuova aritmetica, avevano sviluppato in modo spregiudicato, come poi fece Leonardo Pisano, la vecchia concezione di rapporto. Questo testo fu conosciuto in occidente molto dopo, attraverso una traduzione in francese del 1858, ritardando di secoli lo sviluppo di questa idea. Non sappiamo se Fibonacci, che aveva imparato la nuova matematica, l’aritmetica e l’algebra, da maestri arabi, conoscesse questi studi, ma è indubbio che il loro diverso modo di approcciare la teoria euclidea delle proporzioni gli fosse ben presente.

Negli Elementi di Euclide, la teoria delle proporzioni - secondo alcuni il capolavoro di tutta la matematica antica - permetteva di studiare quantitativamente lunghezze, aree e volumi, per restare solo in ambito geometrico, utilizzando la teoria dei rapporti che aveva validità sia nel caso di rapporti razionali che irrazionali. In Euclide (*Elementi*, Libro V) è possibile stabilire un rapporto tra due grandezze A e B solo se queste grandezze sono *omogenee* (Def. 3) cioè se è sempre possibile stabilire quale delle due sia maggiore dell’altra e, attraverso i multipli, sia sempre possibile superare una qualsiasi grandezza A con un multiplo di una qualsiasi grandezza B omogenea con A (Def. 4). Queste condizioni permettono di eseguire l’algoritmo delle divisioni successive e quindi, se questo algoritmo si chiude, di stabilire il rapporto tra due qualsiasi grandezze omogenee A e B. Se l’algoritmo non si chiude il rapporto è irrazionale, è un non rapporto (alogos), ma questo non toglie che si possa sviluppare una unica teoria astratta dei rapporti ugualmente valida nei due casi. Questa teoria permette di dimostrare, ad esempio, con il massimo rigore e senza dover passare da approssimazioni di sorta o misure, che il rapporto tra (le aree di) due parallelogrammi (o due triangoli) compresi tra le stesse parallele è uguale al rapporto tra le rispettive basi (Elementi, Libro VI, prop.1), senza bisogno di sapere a quale numero, razionale o irrazionale, corrisponda questo rapporto.

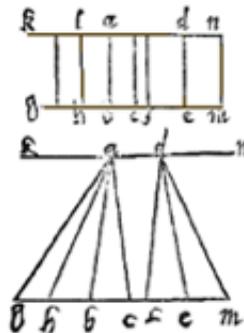


Figura 6: Da l’Euclide di Tartaglia, Libro VI prop. 1 Rettangoli e triangoli tra le stesse due parallele

I matematici arabi, a partire dalla teoria euclidea dei rapporti, che resta alla base delle loro speculazioni, sviluppano in modo nuovo quella delle proporzioni: 4 grandezze, A omogenea a B ed  $a$  omogenea a  $b$ , sono in proporzione se, come dice Euclide, il rapporto di A con B è uguale al rapporto di  $a$  con  $b$ :

$$A : B = a : b$$

nozione ben specificata dalla definizione 5 del V libro degli Elementi. Ora misurando A e B con una data unità di misura  $e$ , ugualmente, misurando le grandezze  $a$  e  $b$  con una loro unità di misura, il rapporto tra le grandezze è uguale al rapporto tra le loro misure, e abbiamo così 4 numeri in proporzione, numeri misti, cioè formati da una parte intera a cui si aggiunge una frazione dell'unità, frazione che Fibonacci chiama "rotto". Con questi nuovi numeri Fibonacci sviluppa, come vedremo con un breve cenno più avanti, col massimo rigore, una nuova aritmetica nella quale la moltiplicazione (per un numero non nullo), estesa con significati nuovi al nuovo campo numerico, ammette sempre una operazione inversa: la divisione. Ciò comporta, indicando per semplicità con lo stesso simbolo la grandezza e il numero che la misura, che il prodotto, inteso nel nuovo significato, dei medi coincide col prodotto degli estremi, cioè

$$A \times b = B \times a$$

Questa relazione, dimostrata da Euclide nel caso che i numeri siano interi e positivi (*Elementi*, Libro VII, prop. 19), può estendersi con tutto rigore, all'interno della nuova aritmetica dei numeri misti, del tutto assente nel mondo classico.

Poiché in Fibonacci, e in tutta la scienza sperimentale che verrà, la misura è ottenuta con uno strumento fisico (una bilancia ad esempio) non vi saranno numeri irrazionali come risultato della misura, ma solo numeri misti. Nel *Liber abaci* le proporzioni e i rapporti implicitamente supposti razionali, insieme ai nuovi numeri rotti o misti, diventano lo strumento nuovo per matematizzare una nascente scienza: l'economia matematica che, se non fosse stata considerata dagli accademici con disprezzo, avrebbe anche potuto diventare modello per le altre scienze. L'idea di base consiste nel considerare delle relazioni tra grandezze anche *non omogenee*, ad esempio la relazione che lega una data merce al suo costo, o un dato investimento al guadagno che produce, o una data moneta all'argento che contiene. Se indichiamo con  $f$  una tale relazione e con  $f(A)$  la grandezza che tale relazione associa ad A e se questa relazione *conserva i multipli*, cioè se

$$f(nA) = nf(A)$$

cosa generalmente facile da verificare o da supporre per ipotesi, diciamo che la relazione  $f$  è una relazione di proporzionalità o, con un termine più moderno, che  $f$  è lineare. L'importanza delle relazioni lineari consiste nel fatto che se A e B sono due date grandezze omogenee e  $f$  è lineare allora

$$A : B = f(A) : f(B)$$

e quindi, passando alle loro misure, si trova l'equazione  $A \times f(B) = B \times f(A)$  che permette note tre quantità di trovare la quarta eseguendo una moltiplicazione e una divisione nell'ambito della nuova aritmetica dei numeri misti.

Supponiamo ora, per fissare le idee, che  $A$  sia una data merce la cui quantità si possa misurare, ad esempio, in libbre e  $f(A)$  sia il costo di quella quantità di merce che misuriamo in denari. È ragionevole pensare che questa relazione sia lineare e che quindi, se  $A$  e  $B$  sono diverse quantità di una stessa merce e  $f(A) = a$  e  $f(B) = b$  i rispettivi costi in denari, allora  $A : B = f(A) : f(B)$  quindi  $A \times f(B) = B \times f(A)$  e passando ai quozienti, non solo sono uguali i rapporti  $A/B$  e  $f(A)/f(B)$  tra grandezze omogenee, ma sono anche uguali i quozienti

$$\frac{f(A)}{A} = \frac{f(B)}{B}$$

dove appare, ed è questa la cosa interessante, un “rapporto” tra grandezze non omogenee assolutamente impensabile in una ottica accademico-euclidea. In realtà nulla di sconvolgente poiché non stiamo mettendo in rapporto due grandezze non omogenee ma le loro misure cioè due numeri razionali i quali, dividendo uno per l’altro, danno luogo a nuove significative entità teoriche. La relazione  $f(A)/A = f(B)/B$  ci dice che il rapporto tra una qualsiasi quantità di merce  $A$  e il suo costo non dipende dalle quantità  $A$  e  $B$  presa in esame per costruire il quoziente ma è una *caratteristica specifica* di quel tipo di merce che potremmo chiamare con il termine “prezzo” dato che tale numero indica il costo di una unità di peso ( $A=1$ ) di quella merce. Tale quoziente che, secondo la tradizione, continuiamo a chiamare rapporto, a differenza di quello euclideo, dipende strettamente dalle unità scelte per misurare il numeratore e il denominatore e il numero ottenuto con la divisione ha senso solo se si specificano queste unità. La nuova grandezza costo/merce è, a differenza dei rapporti euclidei, che sono adimensionali, una grandezza, come dicono i fisici, derivata espressa in lire al chilo e se  $v$  è il prezzo di una data merce, il costo in lire di  $A$  chili di quella merce si ottiene semplicemente eseguendo il prodotto  $f(A) = vA$ . Fissate le unità di misura, il prezzo di una merce è una nuova grandezza in senso euclideo, perché possiamo confrontare due prezzi e dire quale è più grande e possiamo fare i multipli e, teoricamente, dato un prezzo  $v$  e un prezzo  $w$  esiste un multiplo di  $v$  maggiore di  $w$ .

La stessa idea è sistematicamente utilizzata a tutto campo da Leonardo. Le monete coniate ufficialmente a Pisa a partire dal 1155, erano ottenute da una lega composta da argento puro mischiato a un metallo vile generalmente il rame ottenendo, facendo con arte la fusione, una lega *omogenea*. Ciò significa che se  $A$  è una certa quantità di quella lega misurata in libbre e  $f(A)$  è la quantità d’argento contenuta in  $A$ , misurata in once, allora l’omogeneità della lega si esprime matematicamente dicendo che la relazione tra  $A$  e  $f(A)$  è lineare e quindi, ragionando come nel caso delle merci, il quoziente tra  $f(A)/A$  è una caratteristica specifica di quella lega che esprime ciò che oggi chiamiamo il “titolo” della moneta, una nuova grandezza espressa in once/libbra. Ugualmente, come abbiamo visto, il carico delle navi, ad esempio in Sicilia, calcolato in base ai “colli” che è possibile stipare nella nave, presuppone un primitivo “peso specifico”. In questo caso, data una particolare merce  $A$ , possiamo considerare il numero  $f(A)$  di colli che possiamo riempire con la merce  $A$ . È naturale supporre che raddoppiando la quantità  $A$  di merce raddoppi anche il numero di colli che possiamo riempire e ugualmente facendo multipli e sottomultipli di modo che, ragionando come

prima, il rapporto  $A/f(A)$  non dipende dalla quantità  $A$  di merce misurata ma solo dalla tipologia di merce considerata configurandosi come una caratteristica specifica e misurabile di quel tipo di merce. Tale rapporto si prefigura come un rapporto peso/volume dove il volume è misurato in colli invece che, ad come si fa oggi in metri cubi, o come nei porti di Garbo dove Fibonacci ci dice che l'unità di volume era il volume (presumibilmente simile a un parallelepipedo) occupato da un cantare di pelli.

È interessante notare il caso, più volte considerato da Leonardo, quando una data grandezza è in rapporto al tempo. Il "salario", ad esempio, si prefigura come una grandezza composta ottenuta rapportando lire/mese, o l' "affitto" di una appartamento. In questi esempi diventa chiaro come queste grandezze composte siano grandezze teoriche introdotte per matematizzare aspetti dell'economia ed introdurre nuovi concetti teorici che in questo modo, con l' apparato numerico e algoritmico a disposizione, prefigurano un salto qualitativo nello sviluppo delle scienze quantitative.

Queste idee faticheranno ad imporsi tra gli studiosi "alti" concentrati nelle scuole vescovili e nelle nascenti Università dediti per lo più a uno studio acritico degli antichi filosofi variamente rimaneggiati in un'ottica teologica. Lo stesso Galileo, che probabilmente non conosceva Fibonacci, sparito per secoli dalla cultura scientifica universitaria, non riesce ad immaginare rapporti tra grandezze non omogenee.

## Merci e moti equabili

Nella teoria galileiana dei moti uniformi la velocità è una grandezza a sé stante non legata alle grandezze spazio e tempo che, per Galileo, non essendo omogenee, non potevano in nessun modo rapportarsi tra loro. È chiaro che la velocità è una grandezza euclidea dato che due velocità si possono confrontare: la maggiore sarà quella che in un dato tempo compie un spazio maggiore ed è anche chiaro e che si possano considerare i multipli di una data velocità e che valga anche il postulato di Archimede, supposto evidentemente da Galileo. È interessante osservare che la meccanica relativista nasca proprio dalla negazione di questo postulato supponendo l'esistenza di una velocità, quella della luce, che non può essere superata da altre velocità cosa che modificherà di conseguenza il concetto di somma di velocità e quindi di multiplo. Il fatto che la velocità di un moto uniforme fosse una grandezza euclidea permetteva a Galileo<sup>14</sup>, di considerare i rapporti tra due velocità ma non rapporti tra velocità e tempi. Ecco il modo contorto col quale può esprimersi

*Teorema 6. Proposizione 6*

*Se due mobili si muovono di moto equabile, la proporzione tra le loro velocità risulterà composta della proporzione tra gli spazi percorsi e della proporzione tra i tempi permutatamente presi [proporzione inversa dei tempi].*

cioè

<sup>14</sup>Galileo Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Giornata terza.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{s_1}{s_2} \times \frac{t_2}{t_1}$$

Possiamo oggi vedere, leggendo Fibonacci, una analogia tra merci e moti uniformi, dove il tempo corrisponde alla quantità di merce e il lo spazio al costo di quella merce. Il prezzo della merce corrisponde alla velocità e diverse merci hanno prezzi diversi come diversi moti hanno velocità diverse. Ugualmente l'ipotesi di omogeneità di una lega di due metalli corrisponde a quella di moto equabile dove il tempo è la quantità di argento contenuta in una data quantità di quella lega. Le stesse considerazioni possono farsi per il peso specifico, la cui formulazione "moderna" come rapporto di peso su volume tarderà ad affermarsi anche per la persistenza di un vecchio schema mentale che impediva di considerare e scrivere rapporti tra grandezze non omogenee. La separazione tra la "pratica" ad uso di artigiani e mercanti e la "scienza alta" che aveva bollato l'opera di Fibonacci e dei suoi successori come rozza, volgare, per mercanti, impiegherà molto tempo, anche oltre Galileo, per recuperare il metodo sperimentale basato non solo su esperimenti, ma anche su misure effettive ottenute con strumenti nuovi sempre più precisi con i quali rendere quantitativo un modello matematico e su una aritmetica capace di muoversi con disinvoltura e in modo preciso tra le grandezze, simboli, formule ed equazioni.

## Le sei operazioni aritmetiche nel *Liber abaci*

Il metodo descritto da Fibonacci per rappresentare con un numero razionale una misura con una precisione non inferiore a quello dello strumento, generalizza la scrittura di un numero con la virgola e vale la pena di vederlo più nei dettagli per capire come, a differenza del sistema decimale, l'obiettivo di questa aritmetica sia quello di fornire alla scienza strumenti di calcolo esatti. Nel sistema decimale si divide l'unità in 10 parti uguali, ognuna di queste parti in ulteriori altre 10 parti, e ognuna di queste in ulteriori 10 e così via fino ad arrivare a parti piccole quanto si vuole. In Fibonacci, invece, si divide l'unità in  $n_1$  parti uguali, ognuna di queste parti in ulteriori altre  $n_2$  parti, e ognuna di queste in ulteriori  $n_3$  e così via fino ad arrivare a parti piccole quanto si vuole. Inoltre la frazione ottenuta viene scritta, con una felicissima notazione formale, come frazione multipla (di grado  $k$ ) nel modo seguente

$$\frac{a_1}{n_1} + \frac{a_2}{n_1 n_2} + \frac{a_3}{n_1 n_2 n_3} + \dots + \frac{a_k}{n_1 n_2 n_3 \dots n_k} = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{n_1 n_2 n_3 \dots n_k}$$

con  $a_1 < n_1$ ,  $a_2 < n_2$ ,  $a_3 < n_3$ , ... sono rispettivamente il numero di parti del primo tipo, del secondo, del terzo, ecc. Nel caso che i denominatori  $n_1, n_2, n_3 \dots$  siano tutti uguali a 10, i numeri  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sono le cifre decimali dopo la virgola.

La notazione di Fibonacci ha il vantaggio che le unità con le quali venivano misurate le merci erano suddivise in sotto unità nei modi più diversi da merce a merce e da luogo a luogo. Ad esempio, l'unità di misura monetaria era la lira divisa in 20 soldi e ogni soldo in 12 denari, dunque il numero

$$a \frac{a_1 a_2}{20 12} \text{ lire} = a \text{ lire } a_1 \text{ soldi } a_2 \text{ denari}$$

rappresenta, in una sola scrittura formale, lire soldi e denari. Queste suddivisioni introdotte da Carlo Magno nell'Europa cristiana, rimangono valide in Inghilterra fino a tempi relativamente recenti, dove la sterlina era divisa in 20 scellini e ogni scellino in 12 penny.

Per il peso l'unità di misura era la libbra, di origine romana, divisa in 12 oncie ogni oncia in 25 denari e ogni denaro in 6 carrube fino ad arrivare al grano, 4 dei quali formano un carruba, dunque il numero:

$$a \frac{a_1}{12} \frac{a_2}{25} \frac{a_3}{6} \frac{a_4}{4} \text{ libbre} = a \text{ libbre } a_1 \text{ oncie } a_2 \text{ denari } a_3 \text{ carrube } a_4 \text{ grani}$$

sintetizza formalmente una misura di peso suddivisa nei suoi sottomultipli.

In più, come è possibile trasformare una qualsiasi frazione in un'altra equivalente ma con opportuni denominatori, moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso numero, la stessa cosa poteva farsi per le frazioni multiple. Vi era una nuova operazione chiamata nella letteratura successiva *traslazione*, che permetteva di "traslare i rotti" in una qualsiasi frazione. In breve, dato un numero rotto  $m/n$  ( $m < n$ ) e il numero intero  $p$ , "traslare" i  $p$ -esimi nel rotto  $m/n$  significa calcolare quanti  $p$ -esimi entrano nella frazione per poi scriverla come somma dei suoi  $p$ -esimi e di quello che resta. Per fare questo basta dividere  $m/n$  con  $1/p$  e, per non alterare la frazione, rimoltiplicare per  $1/p$ .

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{p} \left( \frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{p}} \right) = \frac{1}{p} \left( \frac{pm}{n} \right) = \frac{1}{p} \left( a + \frac{b}{n} \right) = \frac{a}{p} + \frac{b}{pn} = \frac{a}{p} \frac{b}{n}$$

dove:

- $a$  è il quoziente della divisione di  $pm$  per  $n$  e rappresenta il massimo numero di  $p$ -esimi minori di  $m/n$ , che, essendo  $m < n$ , risulta minore di  $p$ ;
- $b$  è il resto di quella divisione e pertanto è minore di  $n$ . Il risultato è una frazione multipla di grado 2.

Ovviamente possiamo iterare il procedimento traslando  $q$ -esimi nella frazione  $b/n$  e proseguire a volontà. La cosa è utilissima se vogliamo sapere ad esempio quanti soldi e quanti denari ci sono in  $n/m$  lire ( $n < m$ ). Basterà traslare nella frazione i ventesimi e i dodicesimi. Ad esempio un settimo di una lira equivale a

$$\frac{1}{7} = \frac{2}{20} \frac{10}{12} \frac{2}{7} = 2 \text{ soldi, } 10 \text{ denari e } 2/7 \text{ di denaro}$$

Nella aritmetica di Fibonacci oltre all'operazione di traslazione vi era anche l'operazione inversa che permetteva di riscrivere la frazione multipla come frazione ordinaria "infilzando i rotti" che erano stati inseriti nella frazione con la traslazione:

$$\frac{2}{20} \frac{10}{12} \frac{2}{7} = \frac{(2 \times 12 + 10) \times 7 + 2}{20 \times 12 \times 7} = \frac{240}{20 \times 12 \times 7} = \frac{1}{7}$$

Le 4 operazioni dell'aritmetica venivano estese alle analoghe operazioni con le frazioni multiple graduate con i relativi algoritmi di calcolo per lo più iterativi.

La scrittura decimale di una frazione  $m/n$  si ottiene trasladando i decimi: dobbiamo cioè moltiplicare per 10 il numeratore  $m$ , dividere il risultato per  $n$  e ridividere il tutto per 10.

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{10} \left( \frac{10m}{n} \right) = \frac{1}{10} \left( a + \frac{b}{n} \right) = \frac{a}{10} + \frac{b}{10n} = \frac{a}{10} + \frac{b}{10n}$$

Questo procedimento è proprio quello che fornisce la prima cifra decimale della frazione  $m/n$ . Iterando il procedimento troviamo, se necessario, altre cifre decimali ottenendo una approssimazione della frazione precisa quanto necessario. Ad esempio

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{6}{10000}$$

La differenza tra queste frazioni e la semplice scrittura con la virgola, non è solo nella possibilità di variare i denominatori, ma è anche nel fatto che la scrittura di Fibonacci contiene sia il valore approssimato 0,142 che l'errore che l'approssimazione comporta  $6/7000$  e, volendo, è sempre possibile "infilzando i rotti" riportare la frazione nella forma originaria. Nulla si perde!

In definitiva la nuova aritmetica permetteva prima di tutto di rappresentare il risultato di una misura con un numero misto scritto con la frazione multipla più adatta al tipo di unità scelta per fare la misura, in secondo luogo i calcoli aritmetici con questi numeri, e in particolare la divisione, producevano risultati esatti che potevano essere scritti nella forma più opportuna trasladando i rotti o infilzandoli.

## Robert Boyle

È interessante osservare come il primo a costruire una tavola dei pesi specifici<sup>15</sup>, tra il 1660 e il 1675, si stato lo scienziato e sperimentatore irlandese Robert Boyle che, per questo scopo, costruisce una bilancia idrostatica molto più precisa delle precedenti. Boyle scrive il risultato delle pesate con numeri misti (che continueranno a essere usati ovunque per tutto il XVIII secolo) ma esprime il risultato delle divisioni con due cifre decimali, trascurando l'errore che si commette rispetto al valore esatto espresso dalla divisione tra due numeri misti. Ad esempio, secondo le misurazioni di Boyle, l'allume (seconda riga) pesato nell'aria ha un peso di  $280 \frac{1}{4}$  grani, mentre nell'acqua ha un peso di  $152 \frac{1}{4}$ . Il volume ottenuto come differenza tra i due pesi è dunque 128 grani. Il peso specifico vale dunque:

$$\frac{280 + \frac{1}{4}}{128} = 2 + \frac{97}{512}$$

<sup>15</sup> Annibale Mottana, *Galileo e la bilancetta*, Olschki editore, 2017

Tab. 3

*The Hydrostatical Balance.*

344  
Sixtytwo  
*A TABLE of the Specific Gravities of Bodies compared with Water. \**

|  | Weight in Wt.<br>in Lib. avo. | Proportion. |
|--|-------------------------------|-------------|
| A Grain of silver pure                               | 110                           | 120         |
| A piece of silver fine                               | 109                           | 119         |
| Antimony   | 108                           | 118         |
| Antimony, good, and English Mercury                  | 107                           | 117         |
| Beaver Bone  | 107                           | 117         |
| A piece of the same                                  | 106                           | 116         |
| A fine oriental onyx                                 | 105                           | 115         |
| Alabaster  | 104                           | 114         |
| Colicid limestone                                    | 103                           | 113         |
| Amber  | 102                           | 112         |
| Oil of lead  | 101                           | 111         |
| Clay, white  | 100                           | 110         |
| Clay, white, and very sparkling                      | 99                            | 109         |
| Clay, common   | 98                            | 108         |
| Clay of antimony                                     | 97                            | 107         |
| Copper   | 96                            | 106         |
| Copper, red  | 95                            | 105         |
| Copper, fine   | 94                            | 104         |
| Coral, white   | 93                            | 103         |
| Another piece, fine                                  | 92                            | 102         |
| Coral, red   | 91                            | 101         |
| Carroll  | 90                            | 100         |
| Cuba eyes, natural                                   | 89                            | 99          |
| Cuba eyes, artificial                                | 88                            | 98          |
| Crystal  | 87                            | 97          |
| Gold ore, not rich, but brought from the East Indies | 86                            | 96          |
| Another lump of the same                             | 85                            | 95          |
| Green, Bohemian                                      | 84                            | 94          |
| Green, vitreous                                      | 83                            | 93          |
| Iron   | 82                            | 92          |
| Lead   | 81                            | 91          |
| Lead, cast   | 80                            | 90          |
| Lead, cast   | 79                            | 89          |
| Lead, cast   | 78                            | 88          |
| Lead, cast   | 77                            | 87          |
| Lead, cast   | 76                            | 86          |
| Lead, cast   | 75                            | 85          |
| Lead, cast   | 74                            | 84          |
| Lead, cast   | 73                            | 83          |
| Lead, cast   | 72                            | 82          |
| Lead, cast   | 71                            | 81          |
| Lead, cast   | 70                            | 80          |
| Lead, cast   | 69                            | 79          |
| Lead, cast   | 68                            | 78          |
| Lead, cast   | 67                            | 77          |
| Lead, cast   | 66                            | 76          |
| Lead, cast   | 65                            | 75          |
| Lead, cast   | 64                            | 74          |
| Lead, cast   | 63                            | 73          |
| Lead, cast   | 62                            | 72          |
| Lead, cast   | 61                            | 71          |
| Lead, cast   | 60                            | 70          |
| Lead, cast   | 59                            | 69          |
| Lead, cast   | 58                            | 68          |
| Lead, cast   | 57                            | 67          |
| Lead, cast   | 56                            | 66          |
| Lead, cast   | 55                            | 65          |
| Lead, cast   | 54                            | 64          |
| Lead, cast   | 53                            | 63          |
| Lead, cast   | 52                            | 62          |
| Lead, cast   | 51                            | 61          |
| Lead, cast   | 50                            | 60          |
| Lead, cast   | 49                            | 59          |
| Lead, cast   | 48                            | 58          |
| Lead, cast   | 47                            | 57          |
| Lead, cast   | 46                            | 56          |
| Lead, cast   | 45                            | 55          |
| Lead, cast   | 44                            | 54          |
| Lead, cast   | 43                            | 53          |
| Lead, cast   | 42                            | 52          |
| Lead, cast   | 41                            | 51          |
| Lead, cast   | 40                            | 50          |
| Lead, cast   | 39                            | 49          |
| Lead, cast   | 38                            | 48          |
| Lead, cast   | 37                            | 47          |
| Lead, cast   | 36                            | 46          |
| Lead, cast   | 35                            | 45          |
| Lead, cast   | 34                            | 44          |
| Lead, cast   | 33                            | 43          |
| Lead, cast   | 32                            | 42          |
| Lead, cast   | 31                            | 41          |
| Lead, cast   | 30                            | 40          |
| Lead, cast   | 29                            | 39          |
| Lead, cast   | 28                            | 38          |
| Lead, cast   | 27                            | 37          |
| Lead, cast   | 26                            | 36          |
| Lead, cast   | 25                            | 35          |
| Lead, cast   | 24                            | 34          |
| Lead, cast   | 23                            | 33          |
| Lead, cast   | 22                            | 32          |
| Lead, cast   | 21                            | 31          |
| Lead, cast   | 20                            | 30          |
| Lead, cast   | 19                            | 29          |
| Lead, cast   | 18                            | 28          |
| Lead, cast   | 17                            | 27          |
| Lead, cast   | 16                            | 26          |
| Lead, cast   | 15                            | 25          |
| Lead, cast   | 14                            | 24          |
| Lead, cast   | 13                            | 23          |
| Lead, cast   | 12                            | 22          |
| Lead, cast   | 11                            | 21          |
| Lead, cast   | 10                            | 20          |
| Lead, cast   | 9                             | 19          |
| Lead, cast   | 8                             | 18          |
| Lead, cast   | 7                             | 17          |
| Lead, cast   | 6                             | 16          |
| Lead, cast   | 5                             | 15          |
| Lead, cast   | 4                             | 14          |
| Lead, cast   | 3                             | 13          |
| Lead, cast   | 2                             | 12          |
| Lead, cast   | 1                             | 11          |
| Lead, cast   | 0                             | 10          |

Figura 7: La tavola dei pesi specifici di Boyle

Il risultato della divisione, volendo considerare le due prime cifre decimali, fornisce il numero 2,18 mentre il risultato esatto della divisione è maggiore di questo numero per 121/12800, l'errore di questa approssimazione è quindi poco meno di 1/100. Questo errore sarebbe senz'altro trascurabile se la bilancia utilizzata per la misura non fosse in grado di distinguere pesi così piccoli, ma se pensiamo ad esempio a una divisione di utili in una compagnia commerciale, mentre un errore più piccolo di un denaro è per il singolo socio non esigibile, la somma di tutti questi errori può fornire un utile non trascurabile alla banca che gestisce la compagnia.

Boyle fu uno dei primi scienziati a servirsi dei numeri decimali introdotti da Simone Stevino nel 1585 in un breve libretto chiamato DISME. In realtà il metodo proposto da matematico fiammingo per approssimare un numero rotto con un numero finito di cifre decimali, era rivolto, più che agli scienziati, agli astronomi, artigiani, mercanti ecc. Dice Stevino

*[Questo metodo] insegna a svolgere facilmente senza numeri rotti ogni calcolo che si possa incontrare negli affari umani: di modo che i quattro principi d'Aritmetica che si chiamano, Aggiungere, Sottrarre, Moltiplicare e Dividere tra numeri interi possano soddisfare al loro scopo: producendo una semplicità paragonabile a quella di chi usa l'abaco. Ora se con questo strumento si guadagnerà del tempo prezioso, se con questo strumento sarà salvato chi altrimenti si perde, se con questo strumento ci sarà meno lavoro, noia, errori, sbagli e altri inconvenienti che comunemente si aggiungono a questi, mi sottometto volentieri al vostro giudizio.*

e più avanti

*è vero che  $13,33 \frac{1}{3}$  o  $13,333 \frac{1}{3}$  sarebbe la risposta perfetta, ma il nostro scopo è quello di operare solo con numeri interi perché noi ci rivolgiamo a quelli che operano negli affari degli uomini, dove non fa differenza la millesima parte di una maglia o di un grano.*

Paradossalmente, sembra che Stevino voglia riportare il calcolo approssimato negli "affari degli uomini" proprio là dove, per esigenze legate allo sviluppo di una economia globale e su grande scala quale era quella del XIII secolo, era nato il calcolo esatto.

Il rigore di stampo ellenista che ancora perdura nella scienza araba e in Leonardo Pisano, che conferiva alla matematica il titolo di scienza esatta, al di sopra delle opinioni, lascia spazio a metodi approssimati e il prevalere del sistema decimale si accompagnerà, con la nascita del calcolo infinitesimale, a una progressiva mancanza di definizioni chiare, di dimostrazioni rigorose, sostituite spesso da ragionamenti debordanti nel pensiero metafisico.

## Dinamica delle popolazioni

### Population dynamics

Giuseppe Basile<sup>1</sup>

#### Abstract

After a brief introduction to the science of population dynamics, the essay presents a description of Malthus' mathematical models, Lotka-Volterra equations and a particularly detailed analysis of the Verhulst's model.

## Modelli di sviluppo demografico

### Dinamica delle popolazioni

La **dinamica delle popolazioni** è lo studio dei cambiamenti nel numero di individui, nella densità e nella struttura di una o diverse popolazioni, nonché nei processi biologici e ambientali che influenzano questi cambiamenti. È stata tradizionalmente la branca dominante della biologia matematica, con una storia di più di due secoli, benché di recente il suo campo d'investigazione si sia fortemente allargato. [1]

I maggiori esponenti di questa scienza sono

- Thomas Robert Malthus (The Rookery, 13 febbraio 1766 – Bath, 29 dicembre 1834), economista, filosofo demografo e precursore della moderna sociologia inglese.

Nel 1798 pubblicò *An essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society* (Saggio sul principio della popolazione e i suoi effetti sullo sviluppo futuro della società).

- Benjamin Gompertz (Londra, 5 marzo 1779 – Londra, 14 luglio 1865), matematico britannico.

---

<sup>1</sup>basilegiuseppe99gmail.com - Università degli Studi di Trieste

- Pierre François Verhulst (Bruxelles, 28 ottobre 1804 – Bruxelles, 15 febbraio 1849), matematico e statistico belga.
- Alfred James Lotka (Leopoli, 2 marzo 1880 – New York, 5 dicembre 1949), matematico, statistico e chimico fisico statunitense.
- Vito Volterra (Ancona, 3 maggio 1860 – Roma, 11 ottobre 1940), matematico, fisico e politico italiano.
- Morton Gurtin, Richard C. MacCamy.

In questo articolo verranno analizzati dal punto di vista matematico i modelli di Malthus, Verhulst e di Lotka-Volterra.

## Modello malthusiano

### Presentazione del modello

Il **modello di Malthus** è stato il primo modello di dinamica delle popolazioni a essere introdotto ed è il più semplice modello di crescita esponenziale. Il modello deve il suo nome al reverendo Thomas Robert Malthus, uno dei primi ad essersi dedicati allo studio demografico con il suo *Saggio sui principi della popolazione* del 1798. [2]

Uno degli aspetti più dibattuti e controversi del modello di Malthus è la previsione di crescita esponenziale della popolazione, senza tener conto delle risorse illimitate dell'ecosistema. Sulla base della previsione di Malthus, la popolazione giungerà ad un livello in cui il cibo non sarà più sufficiente al suo sostentamento, provocando la cosiddetta *catastrofe malthusiana*, una situazione in cui gli individui della popolazione combattono per l'accesso alle risorse. La previsione di crescita esponenziale trae origine da alcune ipotesi troppo semplici per descrivere realisticamente lo sviluppo demografico di una popolazione. Per superare i limiti del modello di Malthus ad esso sono seguiti modelli più raffinati, come quello di crescita logistica di Pierre François Verhulst.

### Trattazione matematica

Si consideri una popolazione la cui densità all'istante di tempo  $t$  sia rappresentata dalla funzione (definita positiva)  $P(t)$ . Se la popolazione è isolata e le risorse a sua disposizione sono infinite, il tasso di crescita demografica dipende unicamente dai tassi di natalità  $\nu$  e di mortalità  $\mu$ :

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = (\nu - \mu) P(t)$$

Per  $h \rightarrow 0$ :

$$\frac{dP(t)}{dt} = (\nu - \mu) P(t)$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria omogenea del primo ordine con soluzione

$$P(t) = ce^{(\nu-\mu)t}$$

dove  $c \in \mathbb{R}$  è una costante. Considerando la condizione al tempo  $t = 0$  si determina la costante:  $P(0) = ce^{(\nu-\mu)0} = c$ . La soluzione, pertanto, dipende dalla popolazione iniziale  $P(0)$ , qui presentata con la sua derivata esplicita:

$$P(t) = P(0) e^{(\nu-\mu)t} \quad \frac{dP(t)}{dt} = P(0)(\nu - \mu)e^{(\nu-\mu)t}$$

Si distinguono tre casi:

- Se la natalità è maggiore della mortalità:

$$\nu > \mu \Leftrightarrow \nu - \mu > 0 \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = \underbrace{P(0)}_{>0} \underbrace{(\nu - \mu)}_{>0} \underbrace{e^{(\nu-\mu)t}}_{>0} > 0$$

La derivata rispetto al tempo è sempre positiva, pertanto la popolazione tende a crescere esponenzialmente, fino a diventare teoricamente infinita per un tempo infinito:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = P(0) \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\underbrace{(\nu - \mu)}_{>0} t} = +\infty$$

- Se la natalità è pari alla mortalità:

$$\nu = \mu \Leftrightarrow \nu - \mu = 0 \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = P(0) \underbrace{(\nu - \mu)}_{=0} e^{\underbrace{(\nu - \mu)}_{=0} t} = 0$$

La derivata rispetto al tempo è sempre nulla, pertanto la popolazione tende a mantenersi costante nel tempo ( $P(t) = P(0)$ ).

- Se la natalità è minore della mortalità:

$$\nu < \mu \Leftrightarrow \nu - \mu < 0 \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = \underbrace{P(0)}_{>0} \underbrace{(\nu - \mu)}_{<0} \underbrace{e^{(\nu-\mu)t}}_{>0} < 0$$

La derivata rispetto al tempo è sempre negativa, pertanto la popolazione tende a decrescere esponenzialmente, fino a diventare teoricamente nulla per un tempo infinito:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = P(0) \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\underbrace{(\nu - \mu)}_{<0} t} = 0$$

## Modello di Verhulst

Il **modello demografico logistico** pubblicato da Verhulst nel 1838 tiene conto dell'attrito interno alla popolazione se questa dovesse trovarsi in un ambiente a risorse limitate e rappresenta una valida alternativa al modello malthusiano.

Si consideri una popolazione composta da  $P(t)$  individui al momento  $t$ . Se la popolazione è isolata e le risorse a sua disposizione sono limitate, si deve tener conto della competizione interna alla popolazione per l'accesso alle risorse, ovvero la cosiddetta *competizione intraspecifica*, rappresentata dal termine  $\frac{P(t)}{K}$ . Il fattore  $K$  viene definito in ecologia *capacità portante dell'ambiente* (*carrying capacity* in inglese) e rappresenta il numero massimo di individui che l'ambiente è in grado di sostenere con le sue limitate risorse. L'equazione del modello matematico è

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = (\nu - \mu) P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

Per  $h \rightarrow 0$ :

$$\frac{dP(t)}{dt} = (\nu - \mu) P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli la cui soluzione è

$$P(t) = \frac{\frac{K}{c}}{\frac{1}{c} + \left(K - \frac{1}{c}\right) e^{(\mu-\nu)t}}$$

con  $c \in \mathbb{R}$  una costante. Calcolando la popolazione al momento  $t = 0$  si ottiene il valore di  $c$ :  $P(0) = \frac{\frac{K}{c}}{\frac{1}{c} + \left(K - \frac{1}{c}\right) e^{(\mu-\nu)0}} = \frac{\frac{K}{c}}{\frac{1}{c} + K - \frac{1}{c}} = \frac{1}{c}$ . In definitiva, la soluzione e la sua derivata sono

$$P(t) = \frac{KP(0)}{P(0) + (K - P(0)) e^{(\mu-\nu)t}}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{KP(0)(K - P(0))(\nu - \mu) e^{(\mu-\nu)t}}{\left(P(0) + (K - P(0)) e^{(\mu-\nu)t}\right)^2}$$

Si distinguono tre casi:

- Se la natalità è maggiore della mortalità:

$$\nu > \mu \Leftrightarrow \nu - \mu > 0 \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = \frac{\overbrace{K}^{>0} \overbrace{P(0)}^{>0} \overbrace{(K - P(0))}^{>0} \overbrace{e^{(\mu-\nu)t}}^{>0}}{\underbrace{\left(P(0) + (K - P(0)) e^{(\mu-\nu)t}\right)^2}_{>0}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} > 0 \Leftrightarrow P(0) < K \\ \frac{dP(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow P(0) = K \\ \frac{dP(t)}{dt} < 0 \Leftrightarrow P(0) > K \end{cases}$$

Questo risultato significa che se la popolazione iniziale è minore della capacità portante, allora la popolazione cresce. Se la popolazione iniziale è pari alla capacità portante, allora la popolazione si mantiene costante. Infine, se la popolazione iniziale è maggiore della capacità portante, allora la popolazione decresce.

In ogni caso, la popolazione raggiungerà l'equilibrio di  $K$  individui in un tempo teoricamente infinito:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(0)}{P(0) + (K - P(0)) e^{\underbrace{(\mu - \nu)t}_{<0}}} = K \frac{P(0)}{P(0) + 0} = K$$

- Se la natalità è pari alla mortalità ( $\nu - \mu = 0$ ), l'equazione di Bernoulli diventa

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0$$

La derivata rispetto al tempo è sempre nulla per qualsiasi valore della popolazione iniziale, pertanto la popolazione tende a mantenersi costante nel tempo ( $P(t) = P(0)$ ).

- Se la natalità è minore della mortalità, si individuano tre casi:

$$\nu < \mu \Leftrightarrow \nu - \mu < 0 \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = \frac{KP(0)(K - P(0)) \overbrace{(\nu - \mu)}^{<0} \overbrace{e^{(\mu - \nu)t}}^{>0}}{(P(0) + (K - P(0)) e^{(\mu - \nu)t})^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} > 0 \Leftrightarrow P(0) > K \\ \frac{dP(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow P(0) = K \\ \frac{dP(t)}{dt} < 0 \Leftrightarrow P(0) < K \end{cases}$$

- Consideriamo il primo caso, in cui la popolazione iniziale è maggiore della capacità portante:

$$P(t) = \frac{KP(0)}{P(0) + \underbrace{(K - P(0)) e^{(\mu - \nu)t}}_{<0}} = \frac{KP(0)}{P(0) - \underbrace{(P(0) - K) e^{(\mu - \nu)t}}_{>0}}$$

Se  $t \rightarrow \frac{1}{\mu-\nu} \ln \left( \frac{P(0)}{P(0)-K} \right)^-$ , si ottiene una popolazione infinita in un tempo finito:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\mu-\nu} \ln \left( \frac{P(0)}{P(0)-K} \right)^-} P(t) &= \frac{KP(0)}{P(0) - (P(0) - K) e^{(\mu-\nu) \frac{1}{\mu-\nu} \ln \left( \frac{P(0)}{P(0)-K} \right)^-}} \\ &= \frac{KP(0)}{P(0) - P^-(0)} = \frac{KP(0)}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Nel modello malthusiano, in cui le risorse sono infinite, la popolazione diventa infinita se la mortalità è minore della natalità e lo diventa in un tempo infinito. Nel modello di Verhulst si ottiene una popolazione infinita in un tempo finito se la mortalità è maggiore della natalità e se la popolazione iniziale è superiore alla capacità ambientale, anche con risorse limitate.

- Consideriamo il secondo caso, in cui la popolazione iniziale è pari della capacità portante ( $P(0) = K$ ):

$$P(t) = \frac{KP(0)}{P(0) + \underbrace{(K - P(0))}_{=0} e^{(\mu-\nu)t}} = \frac{KP(0)}{P(0) + 0} = K$$

Questo risultato ci indica che se in questo caso la popolazione rimane costante a  $K$  individui.

- Consideriamo il terzo caso, in cui la popolazione iniziale è minore della capacità portante:

$$P(t) = \frac{KP(0)}{P(0) + \underbrace{(K - P(0))}_{>0} e^{(\mu-\nu)t}}$$

Essendo tutti termini positivi, la funzione  $P(t)$  è definita su tutto  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Per  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{KP(0)}{P(0) + (K - P(0)) e^{\underbrace{(\mu-\nu)t}_{>0}}} \\ &= \frac{KP(0)}{P(0) + (K - P(0)) (+\infty)} = 0 \end{aligned}$$

La popolazione è destinata a estinguersi in un tempo teoricamente infinito.

## Modello preda-predatore

### Presentazione del modello

In matematica le **equazioni di Lotka-Volterra** (proposte indipendentemente da Alfred J. Lotka nel 1925 e Vito Volterra nel 1926), note anche come equazioni o **modello preda-predatore**, sono un modello matematico che descrive lo sviluppo demografico di un ecosistema in cui coabitano solo due specie viventi: una predatrice, l'altra come preda.

Siano  $P(t)$  la densità di popolazione dei predatori e  $B(t)$  la densità di popolazione delle prede all'istante di tempo  $t$ . Il modello di Lotka e Volterra si basa su alcune assunzioni ideali:

- nell'ecosistema abitano solo due specie: le prede e i predatori.
- un predatore appartenente alla popolazione  $P(t)$  può nutrirsi solo di una preda appartenente alla popolazione  $B(t)$ . Il numero di prede mangiate dai predatori per unità di tempo è proporzionale al numero di incontri tra le prede e i predatori, che è a sua volta proporzionale al numero di individui delle due popolazioni.

Le prede, d'altro canto, hanno a disposizione una quantità illimitata di risorse nutritive, e si assume che la natalità sia maggiore della mortalità, pertanto l'incremento della loro popolazione in un certo intervallo di tempo  $[t, t+h]$ , con  $h > 0$ , è

$$\frac{B(t+h) - B(t)}{h} = mB(t) - kB(t)P(t)$$

dove  $m, k \in \mathbb{R}$  sono costanti di proporzionalità strettamente positive e il prodotto  $B(t)P(t)$  rappresenta il numero di incontri tra preda e predatore. Passando al limite per  $h \rightarrow 0$ :

$$\frac{dB(t)}{dt} = mB(t) - kB(t)P(t)$$

- Ogni predatore ha bisogno di una quantità minima di cibo per unità di tempo per sopravvivere abbastanza a lungo da riprodursi, pertanto l'incremento della sua popolazione in un certo intervallo di tempo  $[t, t+h]$ , con  $h > 0$ , è proporzionale alla popolazione  $P(t)$  già presente e alla differenza tra il cibo disponibile  $B(t)$  e il cibo  $s$  necessario alla sussistenza:

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = c(B(t) - s)P(t)$$

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$ :

$$\frac{dP(t)}{dt} = c(B(t) - s)P(t)$$

dove  $c, s \in \mathbb{R}$  sono costanti strettamente positive.

Si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{dB(t)}{dt} = (m - kP(t)) B(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = c(B(t) - s) P(t) \end{cases}$$

### Trattazione matematica

Definiamo la curva in forma parametrica  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $\gamma(t) = (B(t), P(t))^T$ . I punti di equilibrio del sistema sono per definizione quei punti del piano reale  $\mathbb{R}^2$  in cui il sistema rimane costante. In termini matematici, la curva  $\gamma(t)$  si riduce a un punto per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , perché per ogni  $t \in \mathbb{R}$  assume lo stesso valore  $(B_0, P_0)^T$ , con  $B_0 = B(0)$  e  $P_0 = P(0)$  le popolazioni iniziali di predatori e prede nell'ecosistema. La derivata della curva è nulla:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} B_0 \\ P_0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \frac{d\gamma(t)}{dt} = \begin{pmatrix} (m - kP(t)) B(t) \\ c(B(t) - s) P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} B(t) = 0 \\ P(t) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(t) = s \\ P(t) = \frac{m}{k} \end{cases} \end{aligned}$$

I punti  $(0, 0)^T$  e  $(s, \frac{m}{k})^T$  sono di equilibrio. In questi punti la curva  $\gamma(t)$  si riduce a un punto.

- Il primo punto,  $(0, 0)^T$ , implica che le due popolazioni non esistano, ovvero che la popolazione dei predatori e quella delle prede siano entrambe nulle e che, logicamente, rimangano nulle nel tempo.
- Il secondo punto,  $(s, \frac{m}{k})^T$ , implica che le popolazioni rimangano inalterate nel tempo ai valori  $s$  e  $\frac{m}{k}$ . In questa situazione, la popolazione delle prede si mantiene costante a  $s$ , la quantità di cibo minima necessaria alla sussistenza dei predatori, mentre la popolazione dei predatori si mantiene costante a  $\frac{m}{k}$ , il rapporto delle costanti di proporzionalità del tasso di crescita delle prede. In questo caso, in un qualsiasi intervallo di tempo i predatori mangiano un numero di prede pari al numero di prede che nascono in questo intervallo di tempo.

La matrice jacobiana della curva  $\gamma$  è

$$J\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dB(t)} \frac{dB(t)}{dt} & \frac{d}{dP(t)} \frac{dB(t)}{dt} \\ \frac{d}{dB(t)} \frac{dP(t)}{dt} & \frac{d}{dP(t)} \frac{dP(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - kP(t) & -kB(t) \\ cB(t) & c(B(t) - s) \end{pmatrix}$$

- La matrice jacobiana di  $\gamma$  calcolata in  $(0, 0)^T$  vale

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -cs \end{pmatrix} \quad (1)$$

Pertanto, ammette i seguenti autovalori:

$$\det(J(0, 0) - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} m - \lambda & 0 \\ 0 & -cs - \lambda \end{pmatrix} = (m - \lambda)(-cs - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = m > 0 \vee \lambda = -cs < 0$$

Gli autovalori della matrice sono uno positivo e l'altro negativo, dal momento che per ipotesi  $m, c, s > 0$ . Per il criterio degli autovalori,  $(0, 0)^T$  è un punto di sella, il che significa che l'equilibrio nel punto sia instabile. Infatti, una qualsiasi piccola perturbazione esterna porterebbe al favoreggiamento di una o dell'altra specie.

- Se un gruppo di predatori venisse immesso per causa esterna nell'ecosistema in assenza di prede, questi morirebbero per mancanza di cibo e la situazione tornerebbe al punto di equilibrio. Infatti, se  $P(t) > 0$  e  $B(t) = 0$ , il tasso di crescita dei predatori è negativo:

$$\begin{cases} \frac{dB(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dP(t)}{dt} = -csP(t) < 0 \end{cases}$$

- Se un gruppo di prede venisse immesso per causa esterna nell'ecosistema in assenza di predatori, dal momento che queste hanno a disposizione infinite risorse per ipotesi, le equazioni di Lotka-Volterra si riducono a un modello malthusiano. Infatti, se  $P(t) = 0$  e  $B(t) > 0$ :

$$\begin{cases} \frac{dB(t)}{dt} = mB(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{mt} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La popolazione delle prede  $B(t) = e^{mt}$  aumenta esponenzialmente.

- La matrice jacobiana di  $\gamma$  calcolata in  $(s, \frac{m}{k})^T$  vale

$$J\left(s, \frac{m}{k}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -ks \\ cs & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, ammette i seguenti autovalori:

$$\det(J(0, 0) - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -ks \\ cs & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2 - (-ks)(cs) = \lambda + cks^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{cks^2}$$

Gli autovalori sono numeri complessi con parte reale nulla. Il sistema presenta un centro, ma il teorema di linearizzazione non garantisce la stabilità del punto.

Sia  $\mathcal{H}(B(t), P(t)) : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  un campo scalare.  $\mathcal{H}(t)$  è una costante del moto delle equazioni di Lotka-Volterra se e solo se il suo gradiente  $\nabla\mathcal{H}(B(t), P(t)) = \left( \frac{d\mathcal{H}}{dB(t)}, \frac{d\mathcal{H}}{dP(t)} \right)^T$  è ortogonale alla derivata della curva  $\gamma(t)$ , ovvero il loro prodotto scalare è nullo:

$$\nabla\mathcal{H}(B(t), P(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{H}}{dB(t)} (m - kP(t)) B(t) + \frac{d\mathcal{H}}{dP(t)} c(B(t) - s) P(t) = 0$$

La soluzione di questa equazione è il campo scalare

$$\mathcal{H}(B(t), P(t)) = cs \ln(B(t)) - cB(t) - kP(t) + m \ln(P(t))$$

Il suo gradiente si annulla in  $E = \left( s, \frac{m}{k} \right)^T$ :

$$\nabla\mathcal{H}(B(t), P(t)) = \begin{pmatrix} \frac{cs}{B(t)} - c \\ \frac{m}{P(t)} - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} B(t) = s \\ P(t) = \frac{m}{k} \end{cases}$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice hessiana in  $\left( s, \frac{m}{k} \right)^T$ :

$$\det \left( H\mathcal{H} \left( s, \frac{m}{k} \right) - \lambda \mathbb{I} \right) = \det \begin{pmatrix} -\frac{c}{s} - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{k^2}{m} - \lambda \end{pmatrix} = \left( -\frac{c}{s} - \lambda \right) \left( -\frac{k^2}{m} - \lambda \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{c}{s} < 0 \vee \lambda = -\frac{k^2}{m} < 0$$

Gli autovalori sono entrambi negativi, dunque per il criterio degli autovalori il punto  $\left( s, \frac{m}{k} \right)^T$  è un massimo. Inoltre, si ha

$$\begin{cases} \frac{cs}{B(t)} - c > 0 \Leftrightarrow B(t) < s & \frac{m}{P(t)} - k > 0 \Leftrightarrow P(t) < \frac{m}{k} \\ \frac{cs}{B(t)} - c < 0 \Leftrightarrow B(t) > s & \frac{m}{P(t)} - k < 0 \Leftrightarrow P(t) > \frac{m}{k} \end{cases}$$

Si conclude che  $\left( s, \frac{m}{k} \right)^T$  sia il massimo assoluto del campo scalare  $\mathcal{H}(B(t), P(t))$ .

Fuori dai punti di equilibrio  $(0, 0)^T$  e  $\left( s, \frac{m}{k} \right)^T$  le curve  $\gamma(t)$  si muovono su traiettorie circolari definite dalle linee di livello  $L_\varepsilon(\mathcal{H})$  di  $\mathcal{H}(B(t), P(t))$  in senso antiorario:

$$L_\varepsilon(\mathcal{H}) : cs \ln(B(t)) - cB(t) - kP(t) + m \ln(P(t)) = \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Il risultato va interpretato nel seguente modo. Dato un numero iniziale di prede  $B(0)$  e predatori  $P(0)$  in un intorno dell'equilibrio  $(s, \frac{m}{k})^T$ , in abbondanza di prede la popolazione di predatori aumenta. Con il tempo la quantità di prede diventa insufficiente al sostentamento dell'intera popolazione di predatori e questi cominciano a diminuire per carenza di cibo. Mentre la popolazione dei predatori decresce quella delle prede torna ad aumentare e il ciclo si ripete. È logico concludere, infine, che le funzioni  $B(t)$  e  $P(t)$  siano periodiche e descrivano un moto armonico.

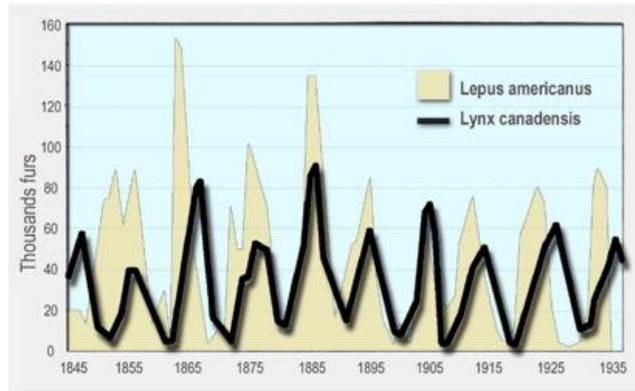


Figura 1: Numero di pellicce di lepri scarpa da neve (giallo, sfondo) e linci canadesi (linea nera, primo piano) vendute alla Hudson's Bay Company. Le linci canadesi mangiano le lepri scarpa da neve. Di Lamiot – Opera propria basata su Pilovsky et al. 2001 (p. 16, figura 1.13), CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=45036611>

## Bibliografia

- [1] Wikipedia, *Dinamica delle popolazioni*, data di ultima revisione: 19 ottobre 2020 19:45 UTC, *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, consultato il 30 dicembre 2020 15:28 UTC, [https://it.wikipedia.org/wiki/Dinamica\\_delle\\_popolazioni](https://it.wikipedia.org/wiki/Dinamica_delle_popolazioni).
- [2] Wikipedia, *Modello di Malthus*, data di ultima revisione: 5 febbraio 2017 13:40 UTC, *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, consultato il 29 dicembre 2020 10:38 UTC, [https://it.wikipedia.org/wiki/Modello\\_di\\_Malthus](https://it.wikipedia.org/wiki/Modello_di_Malthus).



# La vendetta del falsario

## The forger's revenge

Ilaria Ceravolo<sup>1</sup>

### Abstract

Mathematics and cunning are two perfect allies: The article aims to retrace the fundamental mathematical steps aimed at confirming the falsity of a work of art. “The artist is nothing without the gift, but the gift is nothing without work.” [E.Z.]

## Introduzione

In questo periodo in cui tutto sembra fermo mi sono chiesta cosa potessi fare per poter riprovare quella semplice felicità legata a momenti di vita quotidiana. Mi sono ritrovata, così, a risfogliare pagine di quaderni che rappresentano la mia strada. In questo articolo voglio ripercorrere, in breve, l'incredibile storia del più grande falsario d' arte del XX secolo: Han Van Meegeren.



Figura 1: I materiali utilizzati per i falsi- da Accademia degli incerti

---

<sup>1</sup>Mathesis Calabria- Ilaria.ceravolo@gmail.com, docente di ruolo nell'IIS FERMI di Catanzaro.

## Chi era Van Meegeren

Prima di essere definito come uno dei più abili falsari, Van Meegeren era considerato un pittore mediocre, con scarse abilità destinato a rimanere nell'ombra. Per spirito di rivalsa apprese nel dettaglio le migliori tecniche di falsificazione. L'astuzia del pittore non sarebbe bastata se a questa non avesse unito l'audace idea di riprendere vecchie tele del '600. Il suo obiettivo era uniformarsi alle tecniche e alle abilità di Vermeer, artista di quell'epoca. Si impadronì non solo delle sue tecniche ma anche dello spirito stesso con cui Vermeer dipingeva. Conosceva inoltre perfettamente la biografia, le tecniche e i materiali adoperati da Vermeer e faceva spesso uso di rari pigmenti o dell'olio di lillà. Per evitare di utilizzare pannelli del XX secolo ebbe l'accuratezza di procurarsi materiali adoperati 300anni prima: inseriva della polvere nel falso in modo da provocare uno spontaneo reticolo di piccole crepe.



Figura 2: *Valutazione dipinto commissione da Accademia degli incerti*

Riuscì a realizzare ben tredici falsi, cinque dei quali non vennero mai messi in vendita: aveva addirittura venduto al capo delle SS, Heinrich Himmler<sup>2</sup>, dipinti falsi per un valore di cinque milioni e mezzo di fiorini. Un altro falso Vermeer, "Cristo e l'adultera", finì per una somma enorme nella collezione privata di Hermann Göring. Venne processato, ma evitò l'ergastolo rivelando di essere un falsario e di aver venduto ai tedeschi delle gran "patacche" tanto da sollevare una controproposta: sotto sorveglianza avrebbe riprodotto il suo ultimo Vermeer.

---

<sup>2</sup>Uomo politico tedesco (Monaco di Baviera 1900 - Luneburgo 1945); aderì al movimento hitleriano ed ebbe (1929) l'incarico di organizzare le SS, di cui fu comandante supremo (Reichsführer SS).

## La Cena di Emmaus

Fu uno dei quadri su cui si aprì uno dei più ampi dibattiti: la commissione internazionale di esperti fisici, chimici e storici dell'arte trovava questo quadro troppo perfetto rispetto agli altri già certificati come falsi. Per avere la certezza della falsità dello stesso bisogna, infatti, attendere il 1967.



Figura 3: Valutazione dipinto commissione -da Accademia degli incerti

La via d'uscita fu quella di basarsi sulla datazione del quadro in base alla presenza di isotopo di piombo. La chiave per l'attribuzione dell'età al dipinto e ai suoi materiali rocciosi e fossili giace nel fenomeno del **decadimento radioattivo**<sup>3</sup>.

Partendo dalla relazione del decadimento radioattivo

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$$

dove  $\frac{dN}{dt}$  rappresenta il numero di decadimenti radioattivi in una sostanza in unità di tempo,  $N(t)$  il numero di atomi presenti nella sostanza al tempo  $t$ .

Assumendo  $N(t_0) = N_0$  ci troviamo di fronte ad un problema di Cauchy

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

che fornisce la soluzione

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Ricavando una soluzione di  $(t-t_0)$  e ricordando l'**half-life**<sup>4</sup> di una sostanza otteniamo che  $(t_* - t_0) = \ln 2 / \lambda$ , inteso  $t_*$  come tempo di dimezzamento di una sostanza.

<sup>3</sup>Insieme dei processi fisico-atomici attraverso cui alcuni nuclei atomici instabili decadono (o trasmutano) in nuclei di energia inferiore raggiungendo, però, un maggior livello di stabilità.

<sup>4</sup>È il tempo necessario a ridurre a metà la concentrazione di una sostanza.

Molti dipinti contengono una piccola quantità di isotopo radioattivo di piombo (Piombo 210) e una quantità ancora più piccola di radio (Radio 226) presenti nel “white lead”. Quest’ultimo è un pigmento usato dagli artisti sin dall’antichità. Sapendo che il piombo, che ha una half-life di 22 anni, inizia a decadere sempre più rapidamente fino al raggiungimento di un equilibrio radioattivo con il radio. Nel caso in questione il nostro obiettivo sarà quello di determinare la quantità di isotopo di piombo presente al tempo  $t$  nel “bianco di piombo”.

Introducendo una breve legenda affronteremo l’analisi di un nuovo problema di Cauchy. Siano:

- $y(t)$  quantità di isotopo di piombo 210 presente per grammo nel piombo bianco;
- $y(t_0)$  quantità di isotopo di piombo presente inizialmente;  $r(t)$ : la variazione di radio 226 presente nel piombo bianco per grammo al minuto;
- $\lambda$  costante di decadimento del piombo 210.

Il nostro problema risulta della forma:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\lambda y(t) + r(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Poiché l’intervallo di nostro interesse è di ampiezza pari a circa 300 anni (1600-1900) possiamo asserire che  $r(t)$  è in realtà costante. Questo perché l’half-life del radio è di 1600 anni facendo diventare il nostro problema il seguente:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\lambda y(t) + r \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Questa risulta essere una **equazione differenziale di I ordine non omogenea lineare autonoma** che ci fornisce una soluzione del tipo

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{\lambda}{r} \left( 1 - e^{-\lambda(t-t_0)} \right)$$

Poiché a noi interessa avere una stima della quantità di isotopo di piombo presente inizialmente in un periodo tale che  $t - t_0 = 300$  anni sostituendo ci ritroviamo a ottenere

$$(*) \quad \lambda y_0 = \lambda y(t) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$$

È proprio questa particolare soluzione a dare la certezza sulla falsità del dipinto. Questo lo si comprende grazie a due osservazioni specifiche:

Osservazione 1:

Se il quadro fosse autentico, e cioè risalente a 300 anni fa, il piombo sarebbe in equilibrio radioattivo con il radio. Contrariamente, se il dipinto fosse un falso, la quantità di piombo sarebbe visibilmente superiore rispetto al radio determinando un valore di  $\lambda y_0$  “abbastanza grande”

Osservazione 2:

Se il tasso di disintegrazione del bianco di piombo è di 100 disintegrazioni al minuto in un grammo, allora la concentrazione di uranio nel minerale da cui è stata estratta è di 0,014%.

Vi sono però in natura rocce con concentrazione di uranio para al 2/3% ricavando che:

$$100 : 0,14 = x : 3 \quad \text{ovvero} \quad x \simeq 22000$$

(tasso di disintegrazione del piombo in riferimento a queste rocce particolarmente rare).

Ritornando a (\*) e svolgendo calcoli aiutandoci con dei semplici calcolatori scopriremo che

$$\lambda y_0 > 30000$$

Questa è l'assurda contraddizione che dimostra come Han Van Meegeren sia stato uno dei casi più emblematici e misteriosi del mercato dell'arte, essendo stato scoperto come il più abile falsario di ogni tempo solo dopo la sua confessione.

## Bibliografia

- [1] ] BRAUN M., *Differential equations and the applications*, Springer Nature, 2000.
- [2] PICCININI L., STAMPACCHIA G., VIDOSSICH G., *Equazioni differenziali ordinarie in  $R^n$* , Liguori, 1978.
- [3] Wikipedia, <https://it.wikipedia.org/wiki/Decadimento>
- [4] <http://www.accademiadegliincerti.it/sono-una-bugia-che-dice-la-verita/>



## **Astrattismo, simbolismo, costruttivismo e matematica**

### **Abstractism, Symbolism, Constructivism and Mathematics**

**Margherita Barile<sup>1</sup>**

#### **Abstract**

The present article investigates the relationship between the principles of non-figurative art and the mathematical approach to knowledge and language. Our aim is to provide inspiration for interdisciplinary school activities in the framework of the joint CERN-INFN European project *Art & Science across Italy*. The text is based on an online public seminar held by the author on March 17th, 2021.

## **Oltre il figurativismo**

Astrattismo, simbolismo e costruttivismo hanno in comune la sparizione dall'opera d'arte dell'oggetto naturale. Il messaggio è affidato unicamente al quadro o alla scultura, come piano o spazio suddiviso in parti, disposte secondo una combinazione che risponde contemporaneamente alle esigenze logiche dell'espressione e a quelle geometriche dell'estetica. In entrambi gli aspetti entrano considerazioni di tipo matematico. Al supporto materiale è consegnata l'impronta visibile e strutturata di un pensiero, ridotta ai suoi tratti essenziali (*le linee di contorno*), ma dotata di un'anima (*i colori di riempimento*). La creazione artistica, quand'anche voglia proporre la suggestione proveniente da una situazione reale, ne raffigura non la copia, bensì una conformazione *equivalente*, in grado di trasmetterne lo stesso contenuto psichico. Molteplici sono, per l'autore, le scelte possibili, sia riguardo ai concetti da enunciare, sia riguardo al modo in cui ciò debba avvenire in sede di rappresentazione pittorica. Ad esempio, un orologio può suggerire l'idea della ciclicità del moto delle lancette, corrispondente all'addizione dei numeri naturali modulo 12. Questo particolare aspetto, estrapolato da tutti gli elementi di una certa categoria di oggetti, può essere restituito schematicamente.

---

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari "Aldo Moro" margherita.barile@uniba.it

mente sia in forma circolare, evidenziando il carattere dinamico rotatorio (Fig. 1), sia in forma lineare, mediante la tavola di composizione del gruppo  $\mathbb{Z}_{12}$  (Fig. 2) che ne propone una versione statica e simultanea, in cui la ripetizione può essere messa in evidenza con un opportuno uso dei colori. Questa duplice operazione di *astrazione* e *riformulazione* accentua la separazione dalla situazione concreta, aprendo la strada alla *generalità* del discorso, in cui possono inserirsi altri oggetti analoghi, accomunati dalla stessa caratteristica raffigurata (vedi il calendario della Fig. 3), oppure nuovi concetti autonomi, nati dall'arbitraria sostituzione, nel modello di partenza, di alcuni dati specifici (vedi la tabella dell'addizione modulo 37). In ciò si realizza un atto creativo prevalentemente mentale, che tende a svincolarsi dall'elaborazione del contenuto sensoriale, che così viene ampliato e superato.

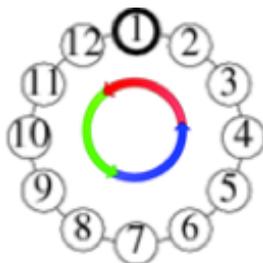


Figura 1

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 1  |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 1  | 2  |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 1  | 2  | 3  |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 10 | 11 | 12 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 11 | 12 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 12 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |

Figura 2



Figura 3

## Lo spazio pittorico

Nelle civiltà arcaiche, come rivelato, tra l'altro, dalla natura del lessico impiegato, la geometria è la rappresentazione di uno spazio fisico interiorizzato, in cui l'elemento fondante è l'estensione, intesa come movimento percepito attraverso il corpo umano. All'esterno di esso, lo spazio, in sé, non esiste: questa è la tesi accolta dal pittore russo Kazimir Malevič (1879-1935), sulla scia delle teorie ottocentesche circa la possibilità di infinite geometrie puramente mentali, senza alcuna relazione con la realtà fisica. Nei quadri di Malevič (Fig. 4) lo spazio è un *libero abisso bianco*, all'interno del quale le figure fluttuano senza occupare posizioni definite.

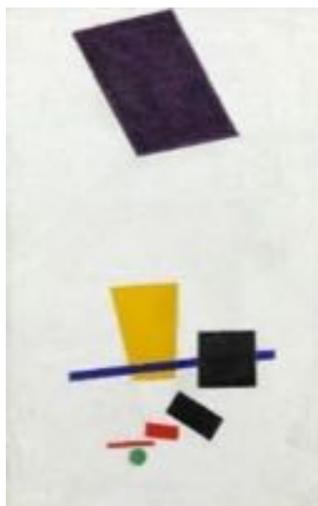


Figura 4: Kazimir Malevič, *Realismo pittorico di un calciatore – Masse di colore nella quarta dimensione* (1915) artic.edu

Non esistono distanze espresse da numeri, ed indeterminato è, a priori, anche il numero delle dimensioni, da due a quattro, all'interno delle quali la superficie della tela intercetta una sezione piana (vedi l'idea alla base del racconto *Flatlandia*). Questa figura è, nella sua versione più perfetta, un quadrato, ricavato da un cubo o da un ipercubo tagliato ortogonalmente ai suoi lati. Gli altri poligoni sarebbero ottenuti da sezioni meno regolari, il cerchio non sarebbe altro che un quadrato rotante.

Nella pittura di Kandinsky, il quadro può rappresentare uno spazio *chiuso e limitato*, rigidamente suddiviso in una griglia (Fig. 5) oppure *aperto e illimitato*, privo di contorni (Fig. 6). In entrambi i casi, gli elementi compositivi sono linee rette e curve, provenienti dal sezionamento della superficie (Fig. 5), oppure costituiti da pezzi eterogenei e sparsi, che liberamente si incontrano e variamente si compenetrano (Fig. 6). Il confronto tra i due dipinti ricorda il contrasto tra analisi e sintesi, sullo sfondo del binomio *Cercle et Carré*, nome del primo movimento di pittori e scultori astratti, sorto a Parigi nel 1930.



Figura 5: Wassily Kandinsky, *Studio dei colori: quadrati con cerchi concentrici* (1913) wassilykandinsky.net



Figura 6: Wassily Kandinsky, *Linea trasversale* (1923) wassilykandinsky.net

Questo binomio, in realtà, è di origine antica, e corrisponde all'andamento dei due moti fondamentali, l'uno ciclico, l'altro rettilineo, su cui si modellano anche le due modalità di misurare il tempo: ciclico è il conteggio dei secondi, dei minuti, delle ore, dei mesi, rettilineo quello degli anni. Tali modalità vengono riproposte nei sistemi per rappresentare i numeri, nel momento in cui, ad esempio, si conta da 1 a 9, poi, a partire dall'unità successiva, si raggruppa tutto in una decina e quindi si ricomincia daccapo il conteggio. Onnipresente nella storia del pensiero matematico è anche la necessità di ricondurre cerchio e quadrato l'uno all'altro, in concrete realizzazioni meccaniche (la vite di Archimede) oppure confrontandoli per stabilire tra loro una relazione logica, qualitativa o quantitativa, come avviene nella quadratura del cerchio o nel metodo di esaustione.

## Una realtà essenziale ed articolata

In entrambi i quadri di Kandinsky si riconosce una «struttura», definibile come un sistema autonomo di elementi *messi in relazione*. Il concetto può essere precisato, con

riferimento alla matematica, ed utilizzando binomi come *interno/esterno* o *parti/tutto*. L'esperienza della geometria, anche elementare, ci mostra come spesso le proprietà matematiche si provino guardando ad un oggetto contemporaneamente da fuori (forma *esterna*: rapporto tra le parti e il *tutto*) e da dentro (forma *interna*: rapporto tra le *parti*). Il teorema di Pitagora riguarda un triangolo, (il *tutto*), formato da tre lati (le *parti*) le cui lunghezze ne determinano il carattere di triangolo rettangolo (forma *esterna*: *ipotesi* del teorema). Le parti danno origine a quadrati le cui aree sono legate da una particolare identità (forma *interna*: *tesi* del teorema). Il *rapporto tra le parti* viene quindi analizzato a fondo, introducendo *parti delle parti* (i quadretti), dal cui confronto scaturisce la *dimostrazione* del teorema (Fig. 7).

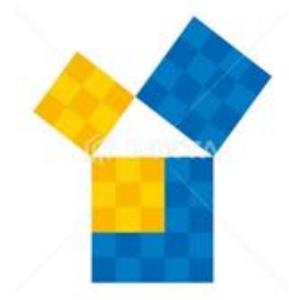


Figura 7: Il Teorema di Pitagora per il triangolo (3,4,5) pixtastock.com

Nella visione di Piet Mondrian, la compresenza di due termini antitetici non costituisce una contraddizione, ma crea una tensione utile ad alimentare il dinamismo della vita: alla simmetria, in cui si manifesta una sintesi delle forze contrarie, ossia un equilibrio statico, il pittore olandese preferisce la ripetizione variata, in cui una stessa componente primitiva viene riproposta più volte, in diversi colori e dimensioni, secondo combinazioni ritmiche, mai uguali a sé stesse. L'articolazione interna prevale sull'uniformità, secondo un'accezione di *regolarità* che va oltre la mera ripetizione. Per esprimerla efficacemente in pittura, Mondrian riduce all'essenza i tradizionali elementi del dipinto: il colore (i tre fondamentali, rosso, blu e giallo), la linea (retta, verticale od orizzontale), la luce (presente in sole tre gradazioni: nero, grigio, bianco). Il principio è quello tipico dei linguaggi formali: pochi segni elementari (alfabeto finito) vengono combinati sintatticamente per formare enunciati più o meno complessi, ma sempre rigorosamente costruiti, tenendo conto dei rapporti tra le parti (ad esempio: l'interazione fra i colori). Un tratto distintivo dello stile di Mondrian è la perfetta riconoscibilità di queste ultime all'interno della struttura finale, in cui ciascuna conserva la sua individualità. In altri termini, volendo stabilire un parallelo con la pratica matematica, il risultato del lavoro non è il totale, bensì il procedimento nella sua interezza, dai dati assegnati ai passi del calcolo, fino al termine dell'algoritmo. Ai fini della correttezza di quest'ultimo ogni componente è rilevante, di per sé e nel modo in cui si collega con le altre.

Una nota opera di Mondrian (Fig. 8), sovrappone una poesia di M. Seuphor alle forme geometriche: il dipinto è espressione di un mondo interiore, logico, non riferito alla fisicità esterna. Tuttavia, esattamente come nel caso della matematica formale e pura, all'interno delle sue strutture può inserirsi la natura reale, di cui essa rivela l'organizzazione interna, accentuandone le capacità espressive. Ed è così che la matematica teorica, sviluppata secondo dinamiche avulse dall'osservazione del mondo, può trovare applicazione alla vita pratica, alla soluzione dei suoi problemi, alla spiegazione dei suoi fenomeni.

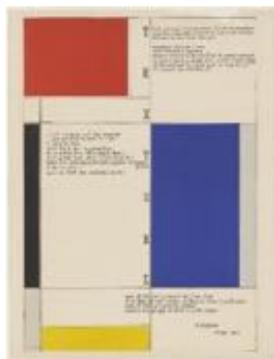


Figura 8: Piet Mondrian, *Textuel* (1928) moma.org

## L'autonomia

Il desiderio di indipendenza dal mondo fisico viene portato alle estreme conseguenze da Malevič, che finisce per eliminare del tutto il riferimento ad altre cose che non siano il quadro. Il suo *suprematismo* propugna *l'arte fine a sé stessa*, priva di riferimenti alla realtà oggettiva. Il quadrato, fluttuante su uno sfondo da cui si distingue appena (Fig. 9), è l'intuizione libera, immersa nello spazio infinito, non più contenuto nella cornice. In particolare perdono di significato termini come orizzontale o verticale, che presuppongono la predeterminazione di direzioni (quella del suolo, quella del filo a piombo). Così scrive l'artista nel saggio *Il suprematismo come modello della non rappresentazione* (citazione da [1], pagg. 34-38):

*"Per suprematismo intendo la supremazia della sensibilità pura nelle arti figurative. I fenomeni della natura oggettiva, in sé stessi, dal punto di vista dei suprematisti, sono privi di significato; la sensibilità come tale, in realtà, è del tutto indipendente dall'ambiente in cui è sorta." "quadrato = sensibilità, fondo bianco = il Nulla, ciò che è fuori dalla sensibilità."*

Abbiamo di fronte a noi un'idea unitaria, priva di articolazione interna e di forma determinata, che si (con)fonde con l'ambiente circostante. Corrisponde a questa descrizione il *continuo*, contrapposto al *discreto* degli esempi precedenti.



Figura 9: Kazimir Malevič, *Quadrato bianco su fondo bianco* (1918) artesvelata.it

È un'entità percepita in maniera immediata e in un colpo solo, di per sé, però estesa, come il *quadrato bianco*. In un certo senso, si torna indietro, alla geometria euclidea, in cui le figure si trovano in un luogo non fisico, non meglio specificato, che assomiglia al nulla. L'oggetto, lì dentro, è isolato e sospeso. Vale la pena di ricordare che le costruzioni e dimostrazioni degli *Elementi* di Euclide risultano logicamente complete e perfettamente leggibili anche in assenza di diagrammi: è sufficiente far riferimento ai simboli letterali che, nel testo, indicano le varie figure. Nel momento in cui noi le inquadrriamo con l'intelletto per ragionarci sopra, per noi esistono solo loro. L'arte è per sé, è il quadro, non ciò che il quadro raffigura.

## La sensibilità e il *senso*

Malevič incentra la sua pittura sul senso, che, secondo una probabile radice germanica del termine (*Sinn*), include il concetto del *movimento*, composto di distanza (lunghezza o altezza) e di superamento (l'attraversamento di una linea tracciata sul terreno). Questa idea è rappresentata al meglio nel suo *Realismo pittorico di un calciatore* (Fig. 4). Sulla tela non si porta la forma del soggetto, bensì il *senso del calcio*. *Senso*, secondo un'altra accezione del termine, di origine latina, significa anche *percezione*, non necessariamente legata a una sensazione fisica. Per Malevič il titolo dato al quadro intende comunicare ciò a cui l'artista stava pensando mentre realizzava l'opera, che di quella particolare situazione reale non contiene le forme visive, perché essa è unicamente servita da fonte di ispirazione. Similmente, quando leggiamo un testo matematico, non troviamo in esso traccia degli oggetti concreti che hanno suggerito un certo studio, un certo teorema, ma solo i tratti di una certa riflessione, che per altro, il testo di norma non racconta nella sua evoluzione storica, ma di cui coglie solo le conclusioni finali, razionalmente risistemate a posteriori.

Nel linguaggio segnico del dipinto non sono direttamente presenti le cose reali o immaginarie, bensì il modo in cui queste sono *pensate*, sono *dette*, sono *scritte*: ciò costituisce un mondo a sé, che trae la propria sostanza/verità/coerenza esclusivamente dal suo interno, come un sistema di logica formale o le geometrie non euclidee.

## Tra astrattismo e simbolismo

L'inoggettività alla Malevič affiora anche altrove, implicitamente, e in una diversa declinazione, nella pittura simbolista. Questa prevede infatti anche la rappresentazione del *silenzio* (Fig. 10). Ovvero: l'espressione dell'inespresso, un'apparente contraddizione in termini. Eppure questa ha una precisa controparte matematica, chiaramente richiamata dalla forma centrale del dipinto: lo *zero*.



Figura 10: Odilon Redon, *Silenzio* (1900) wikiart.org

Il simbolo la cui presenza serve a segnalare l'assenza. Gli opposti, questa volta, anziché coesistere l'uno accanto all'altro, diventano tutt'uno. Due cose distinte vengono a trovarsi nel medesimo luogo, come accade nel punto, in cui si incontrano due rette, in cui si congiungono due frasi. Il punto, per Euclide, è *ciò che non ha parti*. Un *tutto* e un *niente*: un tutto perché *indivisibile*, come lo spazio continuo, un niente perché *inesteso*. Un circoletto tracciato sul foglio è in grado di rievocare quest'idea, che non corrisponde a nessun oggetto concreto, ma vive solo nella nostra mente. Lo stesso si può dire dell'*insieme vuoto*, altro paradosso: un raggruppamento di cose senza cose. Siamo in presenza di idee astratte e universali per eccellenza: per tornare allo *zero*, se è possibile distinguere *due sedie da due bottoni*, non è possibile distinguere *zero sedie da zero bottoni*. Il concetto non proviene da segni riscontrabili nel mondo esterno. Lo (ri)troviamo invece dentro di noi, sotto la suggestione del simbolo. È di carattere spirituale, e viene rievocato sulla base di una forza espressiva interna al simbolo stes-

so: si tratta di una sorta di energia, che agisce in maniera immediata, non è un codice strutturato, di tipo geometrico, come nel caso dei diagrammi, della tavola di composizione dei gruppi dell'aritmetica modulare. Per comprendere un simbolo, non dobbiamo entrarvi con la logica, bensì lasciare che sia esso a inondare la nostra coscienza, colmandola della suggestione di un *concetto primitivo*, collocato fuori dalla storia. Tipica del simbolo è anche la sua significatività indipendente dal contesto. Nel dipinto di Redon, il soggetto appare isolato, inserito in una superficie dipinta in una tonalità neutra e sostanzialmente uniforme. Ne *Il Cristo giallo* (1889) di Paul Gauguin la figura del Messia, il cui colore suggerisce la radiosa luce dell'energia spirituale, è separata dal paesaggio da una marcata linea nera, che intende sottolinearne la natura eterna e trascendente. Ciò ci ricorda una peculiarità della matematica: insieme alla filosofia, è l'unica disciplina che tratti i concetti *per sé*: il numero 2 per sé, la retta per sé, il logaritmo per sé. Intanto, sullo sfondo, il simbolo della croce riassume da sempre la grandezza in senso aritmetico (la decina nella numerazione romana, e non solo) e in senso geometrico (la ripartizione dello spazio secondo le quattro direzioni del cielo). Numeroso è il gregge, immenso è il regno.

## Dall'astrattismo al costruttivismo

Con l'avvento del costruttivismo russo, nato non a caso all'epoca della Rivoluzione d'Ottobre, l'arte instaura un nuovo rapporto con la realtà: questo non è più incentrato sull'esperienza individuale dell'artista, bensì sulle esigenze della collettività, a cui si dirigono realizzazioni edili, tecnologiche, grafiche, prodotte in uno stile razionale, nel quale la forma è quella più funzionale allo scopo, anche simbolico e comunicativo. Gli artisti utilizzano le possibilità offerte dalla produzione industriale, in termini di tecniche e di materiali, per ampliare le proprie potenzialità espressive. Nuove sostanze, malleabili e leggere, consentono una maggiore libertà alla creazione di sculture astratte, dal dinamismo complesso, ricche combinazioni di varie forme e consistenze, di riempimenti e di rarefazioni (Fig. 11) ma comunque solide e stabili, e dunque strutturalmente *autonome*. Con esse lo spazio, più che suddiviso, viene *attraversato*, secondo un ritmo «musicale» di parti sottili e spesse (*piano e forte*), ascendenti e discendenti (*crescendo e diminuendo*).



Figura 11: Lucio Fontana, *Scultura* (1934) [valutazionearte.it](http://valutazionearte.it)

Significativo è l'ingresso nella scultura della *linea* e della *superficie* (Fig. 12).



Figura 12: Barbara Hepworth, *Scultura con colore e corde* (1939/1961) [barbarahepworth.org.uk](http://barbarahepworth.org.uk)

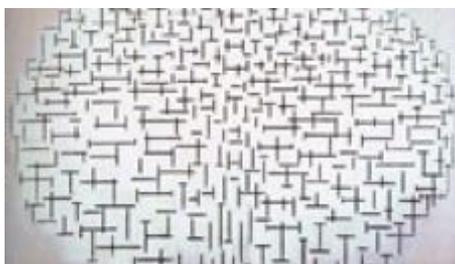


Figura 13: Piet Mondria, *Composizione n.10, molo e oceano* (1915) [commons.wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org)

Nel panorama artistico compare dunque la *trasformazione*, intesa anche come riduzione all'evanescenza, nel senso newtoniano del termine: un aspetto non sconosciuto alla pittura astratta, in quanto già presente nei bordi sfumati di alcune delle prime opere di Mondrian, in cui un dicotomico reticolato di segni *più* e *meno* sembra dissolversi in un non meglio identificato *vuoto* circostante (Fig. 13). Di fronte a questa immagine, il pensiero del matematico corre al processo nel quale il progressivo aumento del numero dei lati di un poligono regolare inscritto in una circonferenza fa coincidere, al limite, il contorno del primo con quello della seconda. Ecco emergere un altro paradosso, che correla, in maniera più o meno sorprendente, il *nulla* all'*infinito*.

## Un moderno genio italiano

L'arte come *design*, come composizione e anche come gioco venato di magia: ecco, in breve, i capisaldi dell'estetica del *designer* e scrittore italiano Bruno Munari (1907-

1998), il quale, nella premessa ad un suo noto libro ([3], pag. 7) cita René Descartes, a cui attinge il metodo analitico per la risoluzione dei problemi pratici, ai quali propone di rispondere mediante una scrupolosa *progettazione* di un oggetto che sia idoneo allo scopo pratico previsto. Inoltre, egli osserva come la creazione di tale oggetto mediante la *combinazione* di componenti elementari, benché improntata cartesianamente all'ordine, e pur essendo regolare, come nella *tassellatura*, non debba necessariamente essere univoca né simmetrica. Se si parte da un insieme di piastrelle quadrate identiche, per rivestire un pavimento, nel momento in cui queste sono asimmetriche, molteplici saranno i motivi geometrici ottenibili (v. [3], pag. 27). Un'altra possibilità – aggiungiamo noi - è utilizzare elementi identici o molto simili, mettendoli in riga secondo uno schema non ripetitivo, di carattere discreto (Fig. 14) oppure continuo (Fig. 15), in un'armonica fusione di *uguaglianza e diversità*, di *vecchie parti* in un *nuovo tutto*, come nei risultati della ricerca scientifica.

Il risultato finale è, in ogni caso, una sintesi di libertà e rigore, in cui, secondo Munari, convivono il metodo scientifico e l'immaginazione artistica. Le fasi della progettazione (*Problema, definizione del problema, componenti del problema, raccolta dei dati, analisi dei dati, creatività, materiali e tecnologia, sperimentazione, modelli, verifica*) sono le stesse in ogni situazione: in [3], pag. 62, egli porta l'esempio della preparazione di un risotto.



Figura 14: Osvaldo Licini, *L'incostante* (1933) fototeca.fondazioneragghianti.it

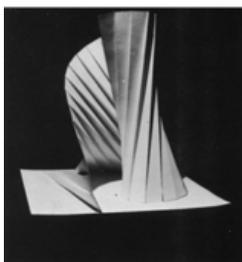


Figura 15: Stefano Antonucci, Scuola di Bruno Munari, *Studio* [3], pag. 101

## Il rompicapo e la scoperta

I *prelibri* [4] di Munari, editi la prima volta nel 1980, sono l'esempio di una creazione artistica in cui l'oggetto non è, semplicemente, il supporto di una raffigurazione, bensì è interessante di per sé, per come è fatto, per l'emozione che si può provare esaminandolo, nella sua materialità, prendendolo in mano, scoprendone le parti, attraverso un'esplorazione dinamica, il cui andamento è deciso sul momento dal fruitore. Sono manufatti destinati a bambini in età prescolare, nascono dall'assemblaggio di poche pagine, belle da guardare e da toccare, ed ispirate alle forme geometriche elementari. L'arte è un *gioco*, quindi, nel momento in cui è possibile prendere i pezzi sparsi e combinarli secondo l'immaginazione, ad esempio nel creare un paesaggio sovrapponendo le figure impresse su più fogli trasparenti, come in *Più e meno*: si tratta di un gioco educativo, in cui si insegna a guardare al di là della superficie delle cose, pensando ad una realtà stratificata, contenente facce nascoste, e passibile di più interpretazioni. Esistono infatti più modi di guardare all'interno di un oggetto. Un'unica forma elementare (il cerchio) è comune a più cose, che si distinguono per la loro articolazione interna (colore, tessitura, ecc., v. Fig. 16). Munari è autore di molti libri per l'infanzia, tra cui una serie dedicata a *Cappuccetto* di diversi colori (verde, giallo, bianco): un unico tema, più variazioni.

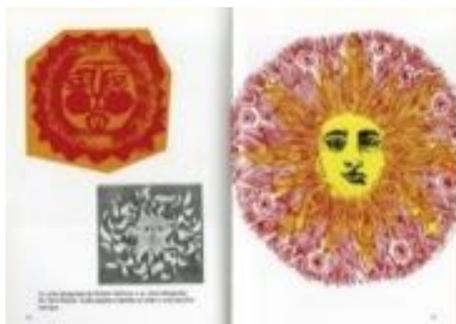


Figura 16: Due pagine del libro di Bruno Munari *Disegnare il sole* (1980)

Qualcosa resta fisso, qualcos'altro muta: un principio che sta alla base del riconoscimento delle regolarità nei fenomeni naturali, ma anche delle nozioni di trasformazione ed invarianza, come della generalità degli enunciati matematici e delle formule o definizioni. Un esempio tipico, in cui questi due aspetti convivono dinamicamente, dando origine ad un'evoluzione, è quello della costruzione ricorsiva.

## L'immaginario

Riprendendo il gusto del paradosso, potremmo osservare che nella pittura figurativa, per quanto questa possa risultare simile ad una fotografia del reale, e quindi aderente alla concretezza, esiste sempre un lato astratto. Ad esempio, se pensiamo di trovarci

davanti al fedele ritratto di una donna, dovremo ritenere che esso contenga, in qualche modo, anche la sua nuca, la sua schiena, tutta la parte posteriore del corpo, insieme a quella inferiore tagliata via dalla cornice.



Figura 17: La copertina del saggio di Florenskij (1922)

Non le vediamo, nondimeno siamo certi che ci sono. Così, guardando il dipinto di una finestra, noi, pur non vedendo il vetro, ne registriamo la presenza. Questo particolare tipo di percezione è una sorta di completamento logico operato dall'immaginazione. La copertina (Fig. 17) del saggio dello scienziato e mistico russo Pavel Florenskij (1882-1937), intitolato *Gli immaginari in geometria* (v. [2], pagg. 136-143) riproduce a sinistra la faccia "reale" e visibile del piano, a destra la sua faccia "immaginaria" e invisibile, che contiene il "retro" della curva raffigurata nella prima parte, di cui costituisce la versione in "negativo" (il nero è diventato bianco). La  $j$  a sinistra si legge da dietro, come in trasparenza, perché è il simbolo dell'immaginario in matematica. Si può notare, inoltre, come il tratto bianco sia in rilievo, perché anziché essere percepito con gli occhi, se ne prende coscienza con una sorta di "tatto", mediante un attento e preciso tocco della mente.

## Osservazioni conclusive

L'*autonomia* dell'arte non figurativa è radicata in quella che potrebbe essere considerata la sua connotazione negativa, ossia la sua *autoreferenzialità*. Questa le conferisce sì un carattere ermetico ed una vistosa veste di indecifrabilità, ma, d'altra parte, consente di spiegarla rimanendo entro i confini dei suoi elementi costitutivi: le forme, i colori, le loro reciproche relazioni. Questi sono, nel contempo, le parti del suo corpo e gli strumenti del suo linguaggio. L'opera è *ciò che dice*, in quanto è nata per *parlare di sé*, non più per *rappresentare qualcos'altro*. In questo senso, è in grado di istruirci senza fare riferimento a nulla che si trovi al di fuori di essa, esattamente come avviene per l'insieme delle conoscenze matematiche. Una concezione esteticamente originale

e razionalmente strutturata non impedisce ad una sedia di essere una sedia (Fig. 18): sarebbe una forzatura ridurla ad una manifestazione materiale del suo *design*. Così una scultura può rivendicare il diritto di essere l'*oggetto* che è, ossia, ad esempio, una certa composizione di parallelepipedi colorati (Fig. 19). La sua dignità non deve necessariamente provenire da qualcosa di superiore che è chiamata a raffigurare. Di contro, la statua di una dea greca, a ben vedere, ha una funzione didattica limitata: non può infatti essere compresa se non da chi abbia già cognizione della cosa reale di cui riprende le forme.



Figura 18: Gerrit Thomas Rietveld, *Sedia rossa e blu* (1917) idesign.wiki



Figura 19: Georges Vantongerloo, *Composizione dall'ovoide* (1918) wikiart.org

## Bibliografia

- [1] BONELLI M., *Astrattismo e costruttivismo*, Fabbri Editori, Milano, 1977.
- [2] MISLER N. (a cura di), *Pavel Florenskij. La prospettiva rovesciata e altri scritti*, Gangemi Editore, Roma, 1990.
- [3] MUNARI B., *Da cosa nasce cosa*, Editori Laterza, Bari, 1981.
- [4] MUNARI B., *I Prelibri*, Corraini Edizioni, Mantova, 2002.



## Una dettagliata ricostruzione della storia della Mathesis

### A detailed account of the history of Mathesis

Antonio Salmeri<sup>1</sup>

#### Abstract

Sources to draw on to reconstruct the history of Mathesis and documents dedicated to its history are listed. It is announced that a detailed history of the Mathesis based on the consultation of the original documents will be published on the web.

### Introduzione

La prima volta che mi sono imbattuto inconsapevolmente nella *Mathesis* fu nel 1956 quando mi fu pubblicato un articolo nel *Periodico di Matematiche*. Ma il vero incontro lo ebbi l'anno seguente quando acquistai l'*Enciclopedia delle matematiche elementari* e la *Prefazione*, datata giugno 1929, iniziava con questa frase:

*Nel 1909, Roberto Bonola sosteneva, in seno alla Sezione Lombarda della Società Mathesis, l'opportunità della pubblicazione di una Enciclopedia delle Matematiche elementari, e ne tracciava a larghi tratti il disegno.*

Furono questi volumi da me spesso consultati, sia per ragioni di lavoro, sia per puro interesse culturale; devo ammettere che il mio interesse per la matematica si incrementò moltissimo sfogliando questi volumi e intrattenendomi soprattutto su argomenti a me sino a quel momento sconosciuti.

La volta successiva fu quando fui invitato da un occasionale conoscente a partecipare alla cerimonia di inaugurazione della locale *Sezione Mathesis di Campobasso* che si sarebbe tenuta il 15 marzo 2000. Ci furono gli interventi di Franco Eugeni, Presidente Nazionale della *Mathesis* e di Sergio Di Nuccio Presidente della costituenda sezione

---

<sup>1</sup>info@euclide-scuola.org, Direttore generale di Euclide.Giornale di matematica per i giovani

e in quella occasione fu deciso di intitolare la Sezione al matematico Enrico D'Ovidio, nato a Campobasso nel 1843. Fu in quella occasione che mi iscrissi alla *Mathesis* di Campobasso, ignorando, dopo sommarie ricerche, che ne esisteva una a Roma alla quale mi iscrissi due anni dopo.

Nei mesi seguenti cercai di conoscere la storia di questa società e delle sue sezioni; le notizie che ricevevo erano frammentarie e si limitavano soltanto agli ultimi anni.

## Fonti della mia ricerca

Decisi allora di fare ricerche in Biblioteca consultando i primi numeri del *Periodico di matematica*. A poco a poco ebbi una visione più ampia e decisi quindi, non essendo a conoscenza di opere analoghe al mio progetto, di ricostruire la storia della *Mathesis* sin dalle sue origini. Iniziai a scrivere e mi accorsi che l'impresa era tutt'altro che semplice.

In primo luogo scoprii che la *Mathesis* non era una sola ma due: "*Mathesis*" - *Associazione fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie* fondata a Roma nel settembre 1895 e "*Mathesis*" *Società di Matematica Italiana* fondata a Firenze nel 1909 ed inoltre appresi che le notizie riguardanti le loro attività non erano reperibili tutte nel *Periodico*, ma erano contenute dal 1895 al 1908 nel *Bollettino dell'Associazione Mathesis*, stampato a Roma dalla Cooperativa Manuzio con una certa irregolarità e negli anni dal 1909 sino al 1920 nel *Bollettino della Mathesis* stampato dalla Zanichelli di Bologna; dal 1921 erano contenute negli *Atti della Mathesis* pubblicati all'interno del *Periodico di Matematiche* sino al 1937 e dal 1938 al 1960 con pubblicazione separata, Altre informazioni erano reperibili negli *Atti dei Congressi* che però furono pubblicati soltanto sino al 2009.

Un'altra fonte era quella di parziali storie della *Mathesis*:

- 1) Alberto Conti, *Un quarantacinquesimo della Mathesis*, Atti della Mathesis, 1941;
- 2) Angiolo Procissi, *Dalle origini della Mathesis al 1° Congresso (1895 - 1899)*, *Periodico di Matematiche*, 1972;
- 3) Cesarina Marchionna Tibiletti, *Breve storia della Mathesis*, *Periodico di Matematiche*. 1979;
- 4) Livia Giacardi - Clara Silvia Roero, *La nascita della Mathesis*, Dal Compasso al Computer, Associazione Subalpina Mathesis, 1996;
- 5) Angelo Guerraggio, *I primi anni della Mathesis*, Springer, 2002

- 6) Emilio Ambrisi, *I 120 anni della Mathesis*, Aracne, 2015;

- 7) Ferdinando Casolaro - Luca Cirillo, *Cinquant'anni di attività della Mathesis...: dal 1959 al 2008*, ArteScienza, 2018.

La prima di 14 pagine, copre il periodo 1895 - 1940 è l'unica scritta da persona, Alberto Conti, che ha vissuto questa storia in prima persona come autorevole protagonista sin dal suo nascere;

la seconda di 7 pagine, copre il periodo 1895 - 1899;

la terza di 7 pagine, copre il periodo 1895 - 1979, elenca gli episodi più importanti della vita della Mathesis;

la quarta di 43 pagine, copre il periodo 1895 -1908, ovvero quella dell'Associazione, e viene inserita nel contesto culturale dell'Università di Torino, dove essa nacque;

la quinta di 29 pagine copre anch'essa il periodo 1895 - 1908 ed inquadra la sua nascita nella situazione culturale italiana preunitaria;

la sesta è da considerarsi la storia dell'insegnamento della matematica ed ha come premessa l'articolo di Cesarina Marchionna Tibiletti;

la settima di 40 pagine fa la storia della Mathesis dal 1959 al 2008 con una introduzione sommaria relativa al periodo 1895 - 1958.

Ritengo opportuno parlare brevemente della seconda. Nel N. 1 - 2 del *Periodico di Matematiche* del Dicembre 1972, nella Prefazione dell'articolo "Dalle origini della Mathesis al 1° Congresso (1895-1898)" di Angiolo Procissi si legge:

*Nel ridare vita al "Periodico" quale organo della Mathesis, è apparso essenziale tra l'altro rievocare i quasi 80 anni di storia di tale Società, specie per i giovani che non possono saperne nulla. È una storia gloriosa e istruttiva, ed è coerente e meritoria perchè si tratta di un faticoso progresso, ispirato sempre ai medesimi obbiettivi e ostacolato dalle medesime storture, sia pur cangianti nei particolari.*

*Ci siamo rivolti a Giovanni Sansone, uno dei più illustri ex Presidenti della Mathesis, che conserva un completo archivio, e che ha proposto Angiolo Procissi di scrivere la "Breve Storia" di cui questa è la prima puntata.*

*Che la scelta fosse la più felice nessuno poteva dubitare, conoscendo l'appassionato interesse del Procissi per la scuola, per la matematica, per i problemi del suo insegnamento e della sua storia. Ma già questo primo capitolo, che certo tutti vorranno leggere e meditare, mostra con quale sentita e commossa partecipazione egli si accosti ad antiche situazioni rivivendo le ansie di allora che si riflettono in quelle di oggi.*

*Datali accostamenti egli può trarre riflessioni amare, dette insieme con rigore e con garbo, da cui noi tutti dovremmo trarre stimolo per migliorare l'ambiente che ci circonda e innanzitutto noi stessi. Grazie, caro Procissi!*

*PdM (Bruno de Finetti)*

Purtroppo questo primo promettente capitolo non avrà un seguito e non ne conosco i motivi. Ma la sua indiscussa importanza sta nel mostrare il grandissimo interesse di Bruno de Finetti per la storia della Mathesis.

## Sviluppo della ricerca

La storia che mi accingo a completare copre il periodo dalla nascita della Mathesis alla morte di Federico Enriques avvenuta nel 1946, quindi circa 50 anni, essa consta attualmente di oltre seicento pagine e la sto completando alla luce di informazioni delle quali a suo tempo non possedevo i documenti relativi. Essa riprodurrà fedelmente le pagine più interessanti, i risultati delle elezioni, i programmi dei Congressi, i resoconti delle singole riunioni e le conferenze più significative.

Il mio proposito è quello di arrivare all'anno 2000, lasciando la parte rimanente a chi ha vissuto questa straordinaria storia in prima persona.

Essa, basata esclusivamente sulla consultazione di documenti originali, sarà suddivisa in sezioni di circa una trentina di pagine ognuna e saranno messe in rete, man mano che verranno completate, nel sito del giornale on line da me fondato e diretto *Euclide.Giornale di matematica per i giovani* ([www.euclide-scuola.org](http://www.euclide-scuola.org)).

## Bibliografia

- [1] Atti dei Congressi Mathesis, dal 1898 al 2009
- [2] Atti della Mathesis, dal 1938 al 1960
- [3] Bollettino della Mathesis, dal 1909 al 1920
- [4] Bollettino dell'Associazione Mathesis, dal 1896 al 1908
- [5] CASOLARO F. - CIRILLO L., *Cinquant'anni dell'attività della Mathesis tra evoluzione politica e sviluppo scientifico: dal 1959 al 2008*, Artescienza, 2018
- [6] CONTI A., Atti della Mathesis 1941, *Un quarantacinquennio della Mathesis*, 1941
- [7] GIACARDI L. - ROERO C.S., *L'inizio della Mathesis*, Dal Compasso al Computer, Associazione Subalpina Mathesis, 1996
- [8] MARCHIONNA TIBILETTI C., *Breve storia della Mathesis*, Periodico di Matematiche, 1979
- [9] Periodico di Matematica, dal 1895 al 1920
- [10] Periodico di Matematiche, dal 1921 al 2000

## Problemi a dominio variabile

### Varying domains problems

Luca Granieri<sup>1</sup>

#### Abstract

We discuss some basic problems which involve a geometric domain variation. In particular we deal with problems related to elastic materials subject to removal of a fixed volume of material from the reference configuration of the body or subject to instability of their elastic energy. The presentation could be convenient and useful for teachers and students of secondary high school level.

La poesia è l'arte di parlare di una stessa cosa in mille modi diversi. La matematica invece consiste nel parlare di mille cose diverse allo stesso modo. In effetti, molti scienziati potrebbero trovarsi d'accordo nel sostenere che tra i lavori scientifici più belli, per quanto di bellezza si possa parlare al proposito, ci sono senz'altro quelli *unificanti*. Quelli cioè che mostrano che fenomeni apparentemente diversi e lontani tra loro hanno in realtà un principio comune. In questa categoria, tanto per fare un esempio eclatante, rientra la gravitazione universale di Newton per la quale il moto orbitale dei pianeti attorno al Sole avviene per lo stesso motivo per il quale la proverbiale mela cade dall'albero. Noi naturalmente ci accontentiamo di molto meno, mostrando che in questa categoria possono ricadere quelli che potremo chiamare *problemi a dominio variabile* che possono provenire dai settori più disparati come lo studio di corpi elastici, il controllo industriale, la biologia e tanto altro.

Per fissare le idee, uno dei più antichi e celebri problemi che rientrano in questa categoria è il cosiddetto *problema di Didone* (*problema isoperimetrico*) che consiste nel determinare, tra tutte le forme geometriche di perimetro (o in generale superficie) fissata quella che racchiuda l'area (risp. volume) massima. La soluzione del problema (si veda [3] per un resoconto introduttivo) è il cerchio (sfera) che tra le altre cose è anche soluzione del problema (*duale*) isovolumetrico che consiste nel determinare tra tutte le forme geometriche di assegnata area (risp. volume) quella che abbia il perimetro (risp. superficie) minimo. Una generalizzazione molto studiata di questi problemi è

---

<sup>1</sup>Liceo Scientifico E. Fermi, Bari. E-mail: granieriluca@libero.it;

è il cosiddetto *problema di Wulff* introdotto in cristallografia. Per *piccoli* cristalli per cui sia possibile trascurare le forze di volume, come la gravità ad esempio, la geometria che il cristallo assume è determinata dall'interazione della sua superficie con il mezzo in cui si trova immerso. Tipicamente, un cristallo si accresce grazie all'interazione tra un materiale e un mezzo (fluido) esterno al cristallo stesso. Questa interazione avviene attraverso il contatto tra la superficie del cristallo e il mezzo. Le forze di contatto agenti sulla superficie in qualche modo plasmano la forma del cristallo producendo una energia di superficie. In altre parole, si può individuare in questa energia di superficie il responsabile della forma finale del cristallo. Tale interazione favorisce l'assunzione delle forme geometriche che producano il più piccolo possibile contributo energetico relativo alla superficie del cristallo. Si tratta dunque di un problema a dominio variabile: determinare a parità di volume, dato che la massa è costante, la forma geometrica che minimizza l'energia di superficie (si veda [5] per un'introduzione divulgativa al tema). Il problema isoperimetrico corrisponde al caso particolare in cui l'energia di superficie è costante.

Quando il contributo relativo al volume non è trascurabile l'interazione tra le energie di volume e quelle di superficie rende il tema ancora più difficile (si veda ad esempio [6]) da studiare. Un caso notevole è quello in cui la densità di superficie è costante, come nel problema isoperimetrico. Tali problemi si dicono anche di *curvatura prescritta* giacché la densità dell'energia di volume *prescrive* appunto la curvatura che punto per punto la forma geometrica in esame deve assumere.

In generale, il fatto che i domini geometrici possano variare rendono questo tipo di questioni di non facile approccio. Il caso tipico di molti problemi provenienti dalla fisica richiede ad esempio di risolvere una equazione differenziale in un certo dominio geometrico. E spesso un ingrediente di notevole importanza nel risolvere l'equazione risiede proprio nelle caratteristiche di regolarità e di simmetria del dominio geometrico su cui si lavora. Permettere al dominio di variare distrugge in genere questo tipo di argomentazioni. In questa sede mostriamo alcune tematiche che possono far intravedere degli orizzonti più vasti pur basandosi su tecniche relativamente elementari.

## **Il problema del buco ottimale**

Il problema che vogliamo discutere è quello di alleggerire una struttura. Tanto per fissare le idee, possiamo pensare al problema di aprire una finestra in un muro.

Abbiamo acquistato una bella casa ma con il difetto di avere poca luce. Essenzialmente, si tratta allora di fare un buco alla parete. Chiaramente occorre prescrivere la quantità di materiale da asportare.

Se infatti cominciamo a sventrare allegramente la nostra parete togliendo materiale a man bassa, è possibile che ci crolli tutto addosso. Quindi, frenando gli entusiasmi,

accontentiamoci di produrre nella parete un buco di volume stabilito, diciamo pari ad un certo valore  $V$ . Ora, sappiamo che il volume della finestra deve essere  $V$ , ma quale dev'essere la sua forma geometrica? Se la parete è omogenea, allora per ricavare la finestra di volume  $V$  basta *ritagliare* una figura geometrica che abbia una prefissata area  $A$ .

A parità di area, qual è la forma geometrica migliore per il buco?

Dunque, il problema che ci poniamo è quello di scegliere la figura geometrica della nostra finestra in maniera ottimale. Per farlo, dovremo naturalmente stabilire che sia ottimale rispetto a qualche opportuno criterio.

Ora, i finestrini degli aerei hanno ad esempio una forma ovale. Come mai? Pare che un tempo si ricavassero invece più sbrigativamente in forma quadrangolare. Alcune problematiche, e qualche incidente, relative ai voli e alla loro sicurezza, misero però sotto accusa proprio i finestrini e la loro forma geometrica. Accurate indagini arrivavano infatti ad individuare il problema nella presenza degli spigoli dei finestrini che mettevano in serio pericolo la tenuta della struttura della cabina. In effetti, si può dimostrare (si veda [2] per qualche dettaglio) che il contributo energetico dovuto alla presenza di un buco si concentra proprio sul suo bordo. In parole povere, a parità di area si deve cercare la forma geometrica del buco in modo che la struttura si indebolisca il meno possibile.

Se per semplicità chiediamo di *ritagliare* il meno possibile, ovvero nel caso di una densità di energia costante, si tratta allora di scegliere il perimetro minimo possibile. Abbiamo pertanto il problema isoperimetrico (anche se non proprio esattamente). Infatti, c'è un piccolo particolare che distingue questo nostro problema dal problema isoperimetrico. Il fatto è che il cerchio è la soluzione (unica a meno di traslazioni) del problema isoperimetrico nel piano. Ma noi siamo vincolati a fare il buco nella parete. Non possiamo certo andare a bucare la parete del nostro vicino di casa! Si tratta allora di un *problema isoperimetrico vincolato*. Il problema vincolato è in realtà molto più difficile e presenta numerose questioni aperte. La difficoltà principale consiste nel tener conto della geometria della parete.

In termini più formali, il nostro problema del buco ottimale in questo caso corrisponderebbe a

$$\text{Minimizzare } \{P(K) : K \subset \Omega, A(K) = A\}$$

dove  $P(K)$  è il perimetro del buco  $K$ , mentre  $A$  rappresenta l'area da rimuovere dalla parete  $\Omega$  per ricavare la nostra finestra.

Ora, se dentro la parete  $\Omega$  è possibile piazzare un cerchio  $C$  di area pari ad  $A$ , allora abbiamo finito. Il cerchio  $C$  è la nostra soluzione, non si può fare di meglio.

Il problema è allora se un tale cerchio nella parete non dovesse entrarci. Che fare allora? Dovrebbe essere abbastanza chiaro che in tal caso la geometria della parete ha la sua importanza.

Per semplificare le cose, consideriamo il caso in cui  $\Omega$  è una striscia di altezza  $h$ . Poiché non vogliamo preoccuparci dell'altra dimensione, potremo anche supporre che abbia una larghezza molto grande, diciamo infinita. Può sembrare paradossale, ma in tal caso l'infinito costituisce una semplificazione delle cose. Consideriamo questa volta il più grande cerchio  $C$  che è possibile piazzare dentro  $\Omega$ . Il caso che ci interessa è quindi quello in cui  $A(C) < A$ . Sia ora  $E \subset \Omega$  un qualsiasi altro buco tale che  $A(E) = A > A(C)$ . Per ragioni di continuità (si veda [3]), è possibile trovare due linee verticali (Fig. 1) che delimitano due regioni  $E_r, E_l$  di  $E$ , entrambe di area pari a  $\frac{1}{2}A(C)$ . Se  $D$  rappresenta la distanza tra queste due linee verticali, indichiamo con  $E_c$  la parte restante di  $E$ , ovvero la regione di  $E$  incastrata tra le due linee verticali.

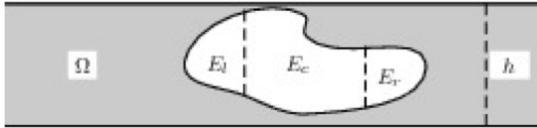


Figura 1

Consideriamo ora  $B = \frac{A(E_c)}{h}$  e prendiamo la regione  $K$  costituita da un rettangolo di base  $B$  e altezza  $h$ , con incollate le due metà di  $C$ , come indicato in Fig. 2

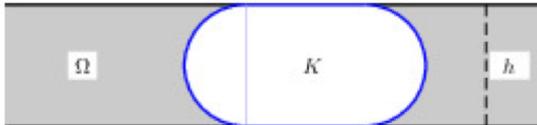


Figura 2

Vogliamo dimostrare che  $K$  è il buco migliore che si possa fare nella striscia  $\Omega$ . Infatti, come ci si aspetta, utilizzando la proprietà isoperimetrica del cerchio, possiamo affermare che  $P(E) \geq P(C) + 2D$ . Nel ricavare questa formula abbiamo confrontato le figure  $E_r, E_l$  con le due metà di  $C$  (utilizzando la proprietà isoperimetrica del semicerchio), e utilizzato il fatto che  $D$  è la minima distanza possibile tra le due linee verticali della fig. 1. D'altra parte, essendo  $E_c$  contenuta nel rettangolo di dimensioni  $D$  e  $h$ , notiamo che  $Bh = E_c \leq Dh$ .

Pertanto, mettendo insieme queste informazioni, si ottiene ciò che desideravamo

$$P(E) \geq P(C) + 2D \geq P(C) + 2B = P(K)$$

Nel caso di una regione  $\Omega$  più generale, soluzioni esplicite sono più difficili da ottenere. Anzi, ad esempio, fatta eccezione per il caso bidimensionale, anche se  $\Omega$  è una regione convessa, è ancora una questione aperta se la soluzione del problema isoperimetrico vincolato sia anch'essa convessa oppure no. Da quanto detto, il nostro buco potrebbe essere piazzato ovunque dentro la striscia  $\Omega$ . Pertanto, potremmo bucare anche il bordo della parete. In genere, per motivi di sicurezza o di praticità, è bene piazzare la finestra ben all'interno della parete. Se  $d$  rappresenta una tale distanza di sicurezza dal bordo di  $\Omega$ , la finestra ottimale è come quella presentata in Figura 3.

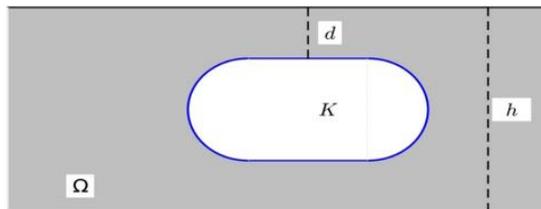


Figura 3

## Instabilità e corrugazioni

Abbiamo accennato in precedenza alla forma dei cristalli. Tipicamente le forme che si presentano coinvolgono delle facce piane. Ma ci sono situazioni in cui le configurazioni piane risultano *instabili* e il materiale passa ad un configurazione *corrugata*. I fenomeni coinvolti sono molto complessi, legati anche a quella che si chiama *instabilità di Grinfeld*. In questa sede considereremo una situazione molto particolare e semplificata: quello che in gergo talvolta si chiama un *modello giocattolo*

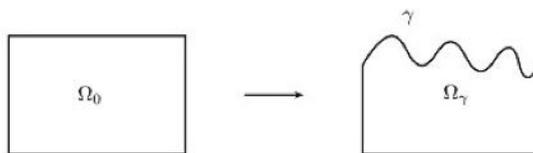


Figura 4: Corrugazione di un rettangolo

Così, tanto per divertirci un po'. Del resto, spesso è proprio giocando che si impara di più. Si tratta di un modello bi-dimensionale in cui  $\Omega_0$  è un rettangolo, diciamo  $\Omega_0 = [0, 1] \times [0, h]$  e permettiamo soltanto al lato superiore di  $\Omega_0$  di modificare la sua geometria (fig. 4). Abbiamo visto che in generale le energie corrispondenti dipendono anch'esse dalla geometria assunta. Allora, quale ulteriore semplificazione, considereremo una densità di energia di volume fissata una volta per tutte e indipendente dalla geometria. Vedremo poi che anche questo modello semplificato possiede comunque il suo proprio interesse.

## Equilibrio per l'energia di volume

Per illustrare il fenomeno consideriamo un modello bi-dimensionale, denotando con  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la densità di energia di area (volume nello spazio) e con  $\Omega_0 = [0, 1] \times [0, h]$  la configurazione di riferimento per un corpo elastico (un cristallo ad esempio). Denotiamo anche con  $\bar{\gamma}(x) = h$  il lato superiore del rettangolo  $\Omega_0$ . L'energia associata alla configurazione iniziale  $\Omega_0$  è data da

$$J(\bar{\gamma}) := \int_0^1 \left( \int_0^h W(x, y) dx \right) dy$$

Per semplicità, assumiamo che il cambiamento della geometria del lato superiore del rettangolo sia dato dal grafico di una funzione  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Pertanto, stiamo considerando domini  $\Omega_\gamma$  sottografico della funzione cartesiana  $\gamma$ . La relativa energia  $J(\gamma)$  dipende quindi dalla funzione  $\gamma$  e dal comportamento di  $W$ . Quale ulteriore semplificazione consideriamo il caso in cui tale densità di energia dipenda dalla sola altezza, ovvero  $W(x, y) = g(y)$ . In questo modo l'espressione complessiva dell'energia diventa, utilizzando le formule di riduzione per gli integrali doppi,

$$J(\gamma) := \int_{\Omega_\gamma} W(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\gamma(x)} g(y) dy \right) dx.$$

Ovviamente, per semplificare si può anche partire direttamente dall'ultima espressione dell'integrale ottenuta *sommando* (cioè integrando) dapprima tutti i contributi energetici nella direzione verticale e poi sommando tutti i contributi nella direzione orizzontale.

Naturalmente, siamo interessati al caso in cui l'area del sottografico rimane costante, dato che la massa totale si deve conservare. Dev'essere allora  $A(\Omega_\gamma) = A(\Omega_0)$ . Tale richiesta si traduce nella seguente condizione

$$\int_0^1 \gamma(x) dx = h$$

Il nostro scopo consiste allora nello studiare le condizioni di equilibrio per l'energia  $J(\gamma)$  soggetto al vincolo di area del sottografico (conservazione della massa). Questo tipo di studio è di routine nel caso di funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  per le quali tutto ciò corrisponde a considerare punti di massimo o minimo locale per  $f$ . Come è noto, tali punti vanno cercati tra quelli in cui la derivata di  $f$  si annulla. Tali punti vengono detti anche stazionari o critici. La condizione di derivata nulla è soltanto necessaria. Ogni punto di massimo o minimo locale è senz'altro un punto stazionario. Ma ci possono essere punti che, pur essendo stazionari, non sono né massimi né minimi locali. Si pensi ad esempio al punto  $x = 0$  per la funzione  $f(x) = x^3$ . Si tratta dunque di saper calcolare le derivate della funzione, meglio del funzionale,  $J(\gamma)$ . Il fatto è che tale espressione dipende dalla curva  $\gamma$ , e non è subito chiaro come si possano considerare delle derivate in tale contesto.

A questo proposito, un'idea semplice è quella di considerare l'espressione di  $J(\gamma)$  come dipendente da un parametro reale e poi effettuare le derivate rispetto a tale parametro reale.

Vogliamo cioè studiare il comportamento dell'energia rispetto a perturbazioni della curva  $\gamma$  rispetto ad un parametro. Se infatti consideriamo un'altra curva  $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , considerato un parametro  $t$ , si possono considerare le perturbazioni  $\gamma_t(x) = \gamma(x) + t\eta(x)$ . In tal modo, per  $t = 0$  si riottiene la curva  $\gamma$  di partenza. Nel nostro problema possiamo certo cambiare la geometria del lato superiore, ma lasciando inalterata l'area del sottografico corrispondente.

Allora, per garantire che sia sempre così, basterà considerare funzioni  $\eta$  tali che  $\int_0^1 \eta(x) dx = 0$ . Ad esempio si potrebbero scegliere funzioni della forma  $\eta(x) = \sin(2k\pi x)$ . Introduciamo allora la funzione di variabile reale

$$\varphi(t) := J(\gamma_t).$$

Come già osservato è  $\varphi(0) = J(\gamma)$ . Allora, se  $\gamma$  corrisponde ad una configurazione di equilibrio per il funzionale  $J$ , ciò significa che la funzione  $\varphi$  deve avere in  $t = 0$  un punto stazionario. Pertanto deve essere

$$\varphi'(0) := \frac{d\varphi}{dt}(0) = 0.$$

Abbiamo così ottenuto una condizione necessaria di equilibrio per il nostro funzionale  $J$ . Tale derivata, nell'ambito del cosiddetto *Calcolo delle Variazioni* (si veda [3] per un'introduzione al tema) viene anche detta variazione prima del funzionale  $J$ , o anche derivata direzionale di  $J$  in  $\gamma$  nella direzione  $\eta$ . Ora, comunque la si voglia chiamare, vediamo dove ci porta la sua espressione. Per come è definito il funzionale  $J$ , otteniamo

$$\varphi'(0) = \frac{d\varphi}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{\gamma+t\eta} g(y) dy \right) dx \right)_{t=0}$$

Portando il simbolo di derivata sotto il segno di integrale e utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale (si veda per qualche dettaglio tecnico in più [3, 6, 7]) otteniamo

$$\varphi'(0) = \int_0^1 g(\gamma(x))\eta(x) dx$$

Se accadesse

$$(*) \quad g(\gamma(x)) = C \quad (\text{costante})$$

allora avremmo

$$\varphi'(0) = \int_0^1 g(\gamma(x))\eta(x) dx = C \int_0^1 \eta(x) dx = 0$$

per come è stata scelta la funzione  $\eta$ .

Pertanto, ogni volta che sia soddisfatta la condizione (\*) la configurazione  $\gamma$  è senz'altro un punto critico per il funzionale  $J$ . In realtà si può dimostrare che vale anche il viceversa. Se cioè  $\gamma$  è un punto critico, allora deve per forza essere soddisfatta la condizione (\*) ([3]). Osserviamo che la configurazione piatta  $\bar{\gamma}(x) = h$  è senz'altro un punto critico.

La condizione di stabilità richiede di valutare le derivate seconde. Per definizione di derivata

$$\varphi''(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t) - \varphi'(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{g(\gamma_t(x)) - g(\gamma(x))}{t} \eta(x) dx.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale (si veda [3] per una giustificazione rigorosa) si perviene alla derivata di una funzione composta all'interno dell'integrale. Otteniamo

$$\varphi''(0) = \int_0^1 g'(\gamma(x)) \eta^2(x) dx.$$

Ogni qualvolta  $g'(h) < \alpha < 0$  avremo una condizione di instabilità per la configurazione piatta. Trattandosi infatti di un massimo locale, in un intorno di  $t = 0$  avremo  $J(\gamma_t) \leq J(\gamma)$  e quindi, in tal caso, il materiale può avere interesse ad assumere una configurazione corrugata per decrescere la sua energia. Un effetto stabilizzante si ottiene invece considerando contributi energetici di superficie. Si veda [6,7] per uno studio introduttivo sui materiali elastici.

## Ulteriori prospettive

La discussione della sezione precedente, per quanto limitata ha prodotto comunque qualcosa di interessante. In effetti, la semplicità della condizione necessaria di equilibrio (\*) ci fa ben sperare rispetto al suo possibile utilizzo anche al di fuori dall'ambito in cui è stata ricavata. Consideriamo infatti un qualsiasi fenomeno che produca dei dati che oscillano intorno ad un valore medio. Come ad esempio la temperatura corporea di un paziente o l'andamento di un titolo in borsa. Ciò significa che i valori che si trovano al di sotto di tale media sono in qualche modo bilanciati da quelli che si trovano al di sopra di essa. Se c'è una funzione che descrive la dipendenza di tali dati tra loro, come la funzione che al tempo fa corrispondere la temperatura del paziente o il valore del titolo al tempo considerato, il suo grafico deve approssimare i dati disponibili, e quindi anche la parte del grafico al di sotto della media sarà *bilanciata* dalla parte che si trova al di sopra, pressappoco come indicato in fig. 5.

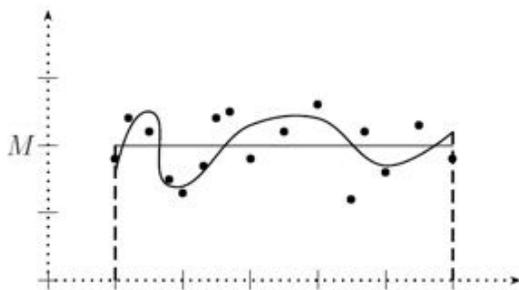


Figura 5: Dati oscillanti attorno ad un valore medio.

Magari, di questa presunta relazione funzionale tra le variabili non sapremo dire granché data la complessità dei fenomeni coinvolti. Tuttavia, dato il comportamento oscillante, potrebbe essere sensato assumere che l'area del sottografico resti invariata, e pari a quella che si avrebbe considerando il rettangolo corrispondente all'andamento costante. Siamo così ricondotti ad un problema a dominio variabile come quello considerato per i materiali elastici.

Naturalmente, di funzioni vicine ai dati che mantengano inalterata l'area del sottografico ce ne sono una infinità. Quale potrebbe corrispondere effettivamente al fenomeno in questione? La condizione (\*) ci può essere utile almeno per caratterizzare in qualche modo questo tipo di funzioni. Ci piacerebbe cioè dire che tra tutte le possibili funzioni  $\gamma$ , il fenomeno ne seleziona una che soddisfi la condizione necessaria (\*). Questo corrisponde a chiedere che il fenomeno in questione prediliga in qualche modo delle configurazioni di equilibrio. Vorremmo vedere tutto come se si trattasse di una pallina che si muova su una superficie, fino a che non trovi il fondo di una valle o la cima di una collina dove fermarsi. Se poi qualcuno, come il vento o la mano di un ragazzino, la costringesse a muoversi ulteriormente, essa comincerebbe nuovamente a vagare per fermarsi nella prima postazione di equilibrio utile. Abbiamo detto che la (\*) è soltanto una condizione necessaria e da sola non è in grado di dirci se effettivamente ci troviamo in un vero e proprio punto di equilibrio. Tuttavia, essa potrebbe essere usata benissimo in senso negativo, per accertarsi cioè che lo stato di equilibrio sia stato in realtà abbandonato.

Infatti, ogni qualvolta la (\*) non è soddisfatta, allora la configurazione  $\gamma$  non può essere un punto di equilibrio per  $J$ .

A ben pensarci, questo approccio potrebbe essere importante per il nostro ipotetico paziente. Supponiamo infatti di monitorare costantemente la sua temperatura corporea costruendo un grafico della temperatura in funzione del tempo. Se il grafico si impenna sempre di più verso l'alto o verso il basso, non c'è bisogno di un esperto per capire che bisogna chiamare il medico e segnalarli che il paziente sta andando in fumo oppure che si sta congelando.

Ma se il grafico oscilla intorno ad un valore medio, diciamo pari a  $37^{\circ}\text{C}$  che facciamo? Possiamo stare tranquilli o dobbiamo temere che la situazione precipiti da un momento all'altro? Se infatti c'è qualcosa che non va, per esempio se l'organismo è in lotta con una infezione e questa dilaga, dopo un po', se non succede di peggio, la temperatura comincerà a salire per assestarsi oscillando intorno ad un nuovo valore medio, ad esempio di  $39^{\circ}\text{C}$ . Il fatto è che noi vorremmo, se possibile, intervenire prima che la situazione possa degenerare. Se il fenomeno medico in questione si accorda con il nostro principio di equilibrio, avremmo qualche possibilità in più di intervento. In tal caso infatti, oltre al grafico dell'andamento della temperatura, avremmo anche la condizione di equilibrio (\*) da controllare. Potremmo cioè immaginare un macchinario attaccato al paziente che monitori costantemente la sua temperatura, valutando il grafico  $\gamma$  del suo andamento in funzione del tempo e che poi calcoli il primo membro della (\*). Allora, la macchina darebbe un segnale di allarme ogni qualvolta il grafico di  $\gamma$  non si adatti ad un andamento (oscillante attorno ad una) costante (paziente in iper(ipo)termia), e in seconda istanza se il primo membro della (\*) non si adatta ad un andamento costante (poiché in tal caso non è valida la condizione di equilibrio). Di particolare interesse sarebbe proprio quest'ultimo caso. La macchina darebbe un allarme anche quando la situazione è apparentemente tranquilla (la temperatura oscilla intorno ad un valore costante), ma lo stato di equilibrio è già compromesso, forse perché c'è già qualche problema in incubazione che ha già causato l'allontanamento dalla condizione di equilibrio preesistente. Per due casi concreti di applicazione di questa strategia si veda [1, 4] in cui lo schema qui delineato è applicato al controllo della produzione industriale di piastre metalliche e allo studio della cosiddetta relazione *Stock-Recruitment* nello studio delle popolazioni ittiche.

## Bibliografia

- [1] BRANCOLINI A., CHIMIETI K., DASSISTI M., GRANIERI L., MADDALENA F., *Variational Techniques for Assessing the Technological Signature of Flat Surfaces*, Optimization and Engineering **1** vol. 14, 155-174, 2013.
- [2] D'AMBROSIO P., DE TOMASSI D., GRANIERI L., Maddalena F., *A surface energy approach to the mass reduction problem for elastic bodies*, IMA Journal of Applied Mathematics **74**, 934-949, 2009.
- [3] GRANIERI L., *Ottimo in Matematica*, LaDotta Editore, 2016.
- [4] GRANIERI L., *A Variational Approach to the Stock-Recruitment Relationship in Fish Population Dynamic*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **34**, 607-619, 2011.
- [5] GRANIERI L., *Cristalli ottimali*, Progetto Alice III Vol. 15 n. 45, 2014.
- [6] GRANIERI L., MADDALENA F., *On some variational problems involving volume and surface energies*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 146, Issue 2, 359-374, 2010.

- 
- 7 TOGARELLI G.: *Problemi variazionali a dominio variabile e applicazioni*,  
Tesi di laurea in Matematica, Università di Bari, A.A. 2009-2010.



## Istruzioni per gli autori

Il *Periodico di Matematiche* pubblica articoli di Matematica e di Fisica che abbiano carattere scientifico, storico e didattico, previa valutazione di contenuti ed originalità. Ciascun lavoro presentato è giudicato da esperti anonimi che riferiscono al Direttore, cui compete il giudizio finale.

### Formattazione del testo

- L'articolo deve essere in formato .doc. Può essere scritto in italiano o in inglese, su libera scelta degli autori, ad eccezione del sunto (abstract) da scrivere in sola lingua inglese.
- Il testo deve essere redatto in Times New Roman, con dimensione del carattere di 11 pt, interlinea 1 e testo giustificato su ambo i lati.
- I margini di scrittura sono: 5,7 cm superiore; 6,2 cm inferiore; 4,5 cm destra e sinistra
- Il titolo dell'articolo deve essere in grassetto, centrato e non completamente maiuscolo, con dimensione del carattere di 15 pt. Devono essere lasciati 36 pt di spazio prima di quest'ultimo. Qualora il titolo sia in italiano, va riportato anche in inglese.
- Il nome degli autori deve essere in grassetto e centrato, con dimensione del carattere di 12 pt. Devono essere lasciati 20 pt di spazio prima e 40 pt di spazio dopo.
- Gli autori devono inserire una nota a piè della prima pagina, fornendo gli indirizzi mail e le rispettive afferenze/occupazioni, con dimensione del carattere di 10 pt e rientro di 5mm.
- Il nome del sunto (abstract) deve essere giustificato a sinistra, grassetto e con dimensione del carattere di 12 pt. Il testo dell'abstract non deve superare le 10 righe, con dimensione del carattere di 10 pt.
- I titoli dei paragrafi devono essere in grassetto e giustificati a sinistra, con dimensione del carattere di 14 pt. A conclusione di ogni paragrafo, gli autori devono lasciare uno spazio verticale di 11 pt.
- L'articolo non può superare le 12 pagine, salvo dirette autorizzazioni della Direzione e/o dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.
- A conclusione del testo e prima della bibliografia, gli autori possono inserire il paragrafo Ringraziamenti (con titolo in grassetto, giustificato a sinistra e con dimensione del carattere di 14 pt). In suddetto paragrafo, gli autori possono inserire opportuni ringraziamenti a persone, progetti o funding, questi ultimi esplicitamente indicati.

## **Bibliografia**

- Gli autori devono lasciare due spazi verticali di 11 pt a conclusione dell'ultimo paragrafo (i ringraziamenti, qualora siano inseriti) che precede la bibliografia, per la quale deve essere usata la seguente formattazione:

### **Bibliografia** (12 pt)

[1] CATTANEO C., *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (3), 1948. (11 pt)

[2] ...

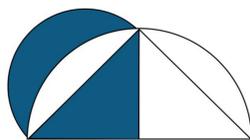
- I riferimenti bibliografici devono essere in ordine di citazione.
- Tutti i riferimenti bibliografici devono essere numerati fra parentesi quadre ([1,2]) nel corpo del testo, seguendo la rispettiva numerazione.

## **Copyright**

Gli autori possono corredare il corpo del testo con immagini in formato .jpeg .jpg con una risoluzione minima di 300 dpi. Ad ogni immagine va associata un'apposita didascalia. Per ogni immagine che non sia di autoproduzione va indicata la fonte, con un eventuale URL. Qualora l'immagine sia di proprietà degli autori sarebbe opportuno indicare il software con il quale la si è realizzata.

## **Inizio dei lavori**

Gli articoli vanno inviati a mezzo posta elettronica al Direttore e a ciascuno dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.



**Mathesis**

**Presidente**

**Francesco de Giovanni**

E' presidente dal 4 febbraio 2021, ventiquattresimo dal 1895, anno della fondazione.

**presidente@mathesisnazionale.it**

**Consiglio Nazionale**

Vincenzo Iorfida *vice presidente*, Alessio Russo *segretario*, Roberto Franzina *tesoriere*, Serenella Iacino, Giulio Maletta, Susi Osti, Marcello Pedone, Annalisa Santini, Francesco Sicolo, Pasqualina Ventrone.

**Sezioni**

Abruzzo – Avellino – Bari – Brescia – Caserta – Castellamare di Stabia – Catania – Crotone – Ferrara – Firenze – Grottaglie – Lanciano Ortona – Latina – Lecce – Mantova – Messina – Milano – Mondragone – Napoli – Napoli Flegrea – Olbia – Roma – Rovigo – Salerno – Serra San Bruno – Spoleto – Terni – Udine – Varese – Venezia – Verona – Vicenza.

**Rivista**

***Periodico di Matematiche***

Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 "di Matematiche". La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell'Editore Zanichelli.

**Sito web**

**www.mathesisnazionale.it**



L'illustrazione in copertina è dell'artista colombiano **Omar Figueroa Turcios**, che vive e lavora in Spagna. Omar Turcios ha ricevuto numerosi premi e riconoscimenti internazionali, tra cui il premio “Luigi Mari 2019” alla XXX Biennale dell'Umore di Tolentino per il suo ritratto di Frida Kahlo. Ha già collaborato con matematici italiani, realizzando in particolare i loghi originali dell'associazione “AGTA – Advances in Group Theory and Applications” e del convegno internazionale “Ordered Statistical Data 2020”.

## **MATHESIS**

**Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche**

c/o Dipartimento di Matematica e Fisica  
Università degli Studi della Campania “Luigi Vanvitelli”  
Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)  
[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it) • [info@mathesisnazionale.it](mailto:info@mathesisnazionale.it)