Il Pitagorismo nella Divina Commedia di Dante Alighieri

Nicola Fusco[1]

Introduzione

La Divina Commedia è stata influenzata, tra le altre cose, dalla posizione filosofica di Dante che era un pitagorico, quindi convinto che i numeri e la matematica abbiano un ruolo fondamentale nella struttura del creato e nell'operato di Dio.

Sono numerosi i passi in cui la matematica o i numeri svolgono un ruolo fondamentale per l'espressione e la comprensione dei concetti del testo e, inoltre, sono presenti vari altri passi che possono essere letti alla luce di concetti che all'epoca di Dante erano inesistenti o non considerati parte della matematica ma che sono stati sviluppati molto dopo.

Si presenta qui innanzitutto una rassegna (non esaustiva) di questi contenuti matematici, ognuno approfondito e analizzato mediante il linguaggio matematico contemporaneo.[2] Infine sono discusse le peculiari proprietà geometriche dell'universo dantesco che può essere proiettato in una struttura geometrica di dimensione superiore.

Il nero cherubino e la logica

Francesco venne poi, com'io fu morto,
per me; ma un de' neri cherubini
li disse: «Non portar: non mi far torto.
Venir se ne dee giù tra' miei meschini
Perché diede il consiglio fraudolente,
dal quale in qua stato li sono a' crini;
ch'assolver non si può chi non si pente,
né pentere e volere insieme puossi
per la contraddizion che nol consente»
Oh me dolente! Come mi riscossi
Quando mi prese dicendomi «Forse
tu non pensavi ch'io loico fossi!»

(Inferno XXVII, 112-123)

In questi versi Guido da Montefeltro racconta come è avvenuta la sua discesa all'inferno subito dopo la sua morte. Guido da Montefeltro era stato un astuto condottiero della sua epoca, e per questa sua astuzia, benché ormai ritiratosi tra i francescani, gli si rivolse Papa Bonifacio VIII per un consiglio su come espugnare Palestrina, assicurandogli l'assoluzione in anticipo per qualunque piano fraudolento avesse escogitato. Guido da Montefeltro consigliò quindi Bonifacio VIII di promettere il perdono ai suoi nemici, e rimangiarsi poi la parola quando le porte della città fossero state aperte.

Questo evento è la causa, secondo Dante, della sua dannazione. San Francesco scende in Terra per accompagnare la sua anima in Paradiso, dato che il pentimento con ritiro religioso prima e il perdono papale lo avrebbero mondato già in vita di tutti i suoi peccati. Ma ecco che sopraggiunge un diavolo[3] che invece reclama l'anima del neo defunto per l'Inferno.

Il diavolo (e quindi Dante) non ingaggia uno scontro "fisico" con San Francesco, né chiama in causa principi etici o morali, ma affronta la questione dal punto di vista puramente logico. Dante è un pitagorico, per lui Dio è innanzitutto la somma intelligenza razionale che si cela dietro ogni fatto del mondo, terreno o ultraterreno: nulla di ciò che accade, e men che meno le azioni direttamente riconducibili a Dio, può essere illogico o contraddittorio.

---

1 Liceo Scientifico "A. Scacchi" Bari (BA).

2 In questo lavoro non sono trattati i rimandi numerologici, per quanto importanti per Dante e per la comprensione stessa di svariati passi, in quanto lontani dagli studi della matematica moderna. Inoltre non sono analizzati tutti i richiami a teoremi fondamentali della geometria euclidea che Dante usa più volte come termini di paragone per verità inconfutabili o chiare agli occhi di tutti. Ne viene esposto solo uno, a titolo esemplificativo.

3 Nella cosmogonia cristiana i diavoli non sono altro che angeli che si sono rivoltati contro Dio all'inizio dei tempi, e pertanto individuati spesso, nella Divina Commedia (ma anche altrove), da sostantivi propri degli angeli accompagnati però da aggettivi che ne rivelano la trasfigurazione malvagia (in questi versi "cherubino nero").

L'argomentazione del diavolo è la seguente: non si può assolvere chi non si pente e neanche si può peccare "programmando" un successivo pentimento. In entrambi i casi si genera una contraddizione che non è consentita. Prima di analizzare l'argomentazione "diabolica", ricordiamo gli elementi di logica necessari a comprenderla.

La coesistenza di due affermazioni è rappresentata dall'operazione di congiunzione logica, che in genere è indicata con il simbolo $\wedge$. La congiunzione di due proposizioni produce una terza proposizione che è vera solo quando entrambe le proposizioni congiunte sono vere entrambe.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

L'implicazione logica è la connessione che c'è tra due affermazioni A e B in cui dalla sussistenza di A si può dedurre la sussistenza di B, tale relazione si indica con la scrittura $A \rightarrow B$. Equivalentemente A implica logicamente B se B è una precondizione logica di A. L'implicazione logica $A \rightarrow B$ risulta quindi falsa solo quando B è falsa e A è vera, perché solo questa condizione può permettere di affermare che B non è deducibile da A o che B non è una precondizione per A.[4]

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \rightarrow B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La negazione, in genere indicata con il simbolo $\neg$, rappresenta l'affermazione contraria: se A rappresenta la proposizione "sono in una stanza buia" allora $\neg A$ rappresenta la proposizione "sono in una stanza illuminata", se B rappresenta la proposizione "tutti i gatti sono neri" allora $\neg B$ rappresenta la proposizione "esiste un gatto che non è nero".

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\neg A}$
V	F
F	V

Quindi congiungendo una proposizione con la sua negazione, $A \wedge (\neg A)$ si ottiene una contraddizione: una proposizione sempre falsa, indipendentemente dalla verità o falsità di A in sé. Altre contraddizioni sono $A \rightarrow (\neg A)$ e $(\neg A) \rightarrow A$. Evidentemente un Dio pitagorico non può far coesistere fatti che corrispondono ad una contraddizione.

Torniamo al diavolo, San Francesco, e al loro scontro dialettico per l'anima di Guido da Montefeltro.

- ***"assolver non si può chi non si pente"***. Il peccato, nella teologia cristiana, prima ancora che essere un atto malvagio o che comunque produce danni ingiusti, è la scelta dell'anima (della persona) di rifiutare i comandamenti di Dio. È questa definizione di peccato che attribuisce all'atto peccaminoso le sue due caratteristiche spirituali che sono alla base della dottrina cristiana del peccato (e a cui Dante fa riferimento in modo rigoroso nella costruzione e descrizione dell'aldilà nella Divina Commedia):
  - esso è innanzitutto una "macchia" dell'anima, che resta a lordarla fino all'assoluzione, esattamente come una macchia su un vestito lo insozza fino a che attivamente qualcuno non la rimuova;
  - inoltre, e più gravemente, la scelta di allontanarsi dai comandamenti divini associa alla "macchia" il disconoscimento di Dio come autorità morale.

4 La proposizione "se piove allora in cielo ci sono nuvole" è contraddetta solo se capita di osservare pioggia con il cielo completamente sgombro da nuvole. Osservare un cielo nuvoloso in assenza di pioggia, un cielo terso senza pioggia o un cielo nuvoloso mentre piove non sono contraddizioni della proposizione iniziale, qualcuna al massimo può esserne una corroborazione.

Pertanto la rimozione della "macchia" che affligge un'anima peccatrice non può avvenire se prima l'anima non si è dissociata dal fatto che ha prodotto tale macchia, tornando quindi a riconoscere Dio come unica autorità in ambito morale, perché la permanenza della superbia corrisponde alla replica persistente del peccato, che quindi risulterebbe nuovamente commesso (anche se non in atto) nell'istante immediatamente successivo alla rimozione della macchia.

Quindi il pentimento P è una precondizione logica per l'assoluzione A: $A \rightarrow P$. Ma se combiniamo questa proposizione con la coesistenza di assoluzione e mancato pentimento abbiamo $(A \rightarrow P) \land (\neg P \land A)$ la cui tavola di verità è

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{A \rightarrow P}$	$\boldsymbol{\neg P \land A}$	$\boldsymbol{(A \rightarrow P) \land (\neg P \land A)}$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Abbiamo una contraddizione che non può essere tollerata da Dio: l'unica soluzione è che l'assoluzione sia nulla, infatti

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{A \rightarrow P}$	$\boldsymbol{\neg P \land \neg A}$	$\boldsymbol{(A \rightarrow P) \land (\neg P \land \neg A)}$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

che presenta valore vero quando le due proposizioni ("l'assoluzione necessita il pentimento" e "assoluzione è nulla in presenza di mancato pentimento") sono entrambe vere.

- ***"né pentere e volere insieme puossi"***. Qui la contraddizione è ancora più evidente. Pentirsi di un'azione implica il riconoscerla sbagliata, quindi il pentimento è equivalente alla negazione logica della proposizione che descrive l'azione di cui ci si pente. Nello stesso tempo voler eseguire quella azione implica il considerarla desiderabile: il desiderio di compiere una certa azione è logicamente equivalente alla proposizione che descrive l'azione desiderata. Quindi la proposizione logica che corrisponde al pentimento e al contemporaneo desiderio di una certa azione (o al compiere un'azione che si sa essere contraria ai comandamenti divini con il progetto di pentirsi successivamente in modo artificioso) è la già analizzata contraddizione $A \land (\neg A)$.
- ***"per la contraddizion che nol consente"***. In forza di quanto detto prima, entrambe le assunzioni che dovrebbero giustificare l'accesso di Guido da Montefeltro in Paradiso o in Purgatorio sono delle contraddizioni logiche e pertanto non possono essere ammesse come vere da Dio.

Di conseguenza l'unica sentenza ultraterrena che può salvaguardare la consistenza logica del creato è che Guido da Montefeltro sia condannato all'Inferno. Per questo motivo San Francesco, senza neanche ribattere, non può fare altro che lasciare andare l'anima che era venuto a prelevare, con grande delusione di Guido, che non pensava che la logica potesse essere un'autorità superiore a quella della Chiesa.

Perdendo tristemente s'impara?

Quando si parte il gioco de la zara,

colui che perde si riman dolente,

repetendo le volte, e tristo impara;

(Purgatorio VI, 1-3)

La Zara era un gioco d'azzardo molto diffuso all'epoca di Dante: il giocatore dichiara un numero tra 3 e 18, lancia tre dadi a 6 facce e vince se la somma dei dadi è pari al numero dichiarato. In questa terzina Dante descrive il comportamento di un giocatore che, perdendo, ritenta più volte, cercando di apprendere dai lanci ripetuti il segreto per vincere.

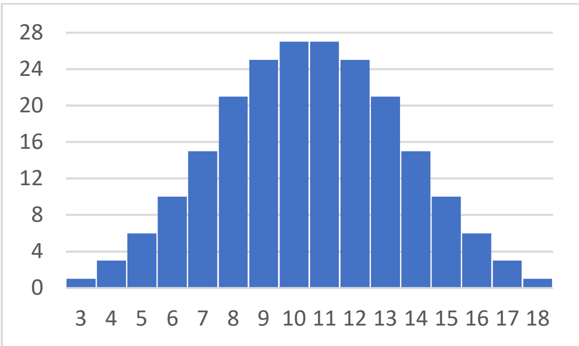
Per capire cosa Dante voglia dire con questa terzina, analizziamo questo gioco dal punto di vista probabilistico. Innanzitutto elenchiamo tutte le terzine di numeri da 1 a 6 che danno come somma un dato numero da 3 a 18. Nel seguito indichiamo accanto a ciascuna terzina la sua molteplicità.[5]

Somma	Terzine	# Terzine
3	1,1,1	1
4	2,1,1×3	3
5	3,1,1×3 2,2,1×3	6
6	4,1,1×3 3,2,1×6 2,2,2	10
7	5,1,1×3 4,2,1×6 3,3,1×3 3,2,2×3	15
8	6,1,1×3 5,2,1×6 4,3,1×6 4,2,2×3 3,3,2×3	21
9	6,2,1×6 5,3,1×6 5,2,2×3	25

Somma	Terzine	# Terzine
	4,4,1×3 4,3,2×6 3,3,3	
10	6,3,1×6 6,2,2×3 5,4,1×6 5,3,2×6 4,4,2×3 4,3,3×3	27
11	6,4,1×6 6,3,2×6 5,5,1×3 5,4,2×6 5,3,3×3 4,4,3×3	27
12	6,5,1×6 6,4,2×6 6,3,3×3 5,5,2×3 5,4,3×6	25

Somma	Terzine	# Terzine
	4,4,4	
13	6,6,1×3 6,5,2×6 6,4,3×6 5,5,3×3 5,4,4×3	21
14	6,6,2×3 6,5,3×6 6,4,4×3 5,5,4×3	15
15	6,6,3×3 6,5,4×6 5,5,5	10
16	6,6,4×3 6,5,5×3	6
17	6,6,5×3	3
18	6,6,6	1

L'istogramma delle frequenze è il seguente



Da questa analisi appare evidente che, se si vogliono massimizzare le vincite, conviene puntare sul 10 o sull'11, perché sono i numeri a cui corrispondono le frequenze più elevate e di conseguenza la probabilità più elevata ($P(10) = P(11) = \frac{27}{216} = \frac{3}{24} = 12.5\%$). Tuttavia ciascuno di questi due numeri ha una probabilità di poco superiore ad un decimo, quindi questi numeri verranno osservati uscire, in media, circa una volta ogni dieci lanci. Di conseguenza "*colui che perde si riman dolente*" in quanto la vittoria è comunque difficile da agguantare.

Per raggiungere una probabilità ragguardevole è necessario considerare i sei numeri centrali, che assommano una probabilità di $P(8-13) = \frac{146}{216} \approx 67.6\%$. Questi sei numeri compariranno circa sette volte ogni dieci lanci, pur essendo poco più di un terzo dei possibili risultati, quindi "*repetendo le volte*" il giocatore incallito riuscirà forse ad individuare questo gruppo di numeri favoriti che gli permetteranno di avere un leggero vantaggio sul giocatore occasionale. Ma questa consapevolezza non l'acquisirà che dopo aver perduto molte volte ("*e tristo impara*").

---

5 Immaginiamo che i dadi siano uno rosso, uno blu e uno verde: un lancio con tutti i dadi uguali si può realizzare in un solo modo (tutti i dadi con lo stesso numero); un lancio con due dadi uguali e uno diverso si può realizzare in tre modi (il numero diverso sul dado rosso, sul dado blu, oppure sul dado verde); un lancio con i tre dadi tutti diversi si può realizzare in sei modi diversi (uno qualunque dei tre risultati sul dado rosso, uno dei due risultati rimanenti sul dado blu e il risultato rimanente su quello verde).

Naturalmente Dante non ha il concetto di probabilità, neanche nella sua definizione più elementare e intuitiva, che è quella frequentistica. Però l'immagine fornita, del giocatore che acquisisce informazioni su un gioco casuale mediante l'osservazione ripetuta del suo svolgimento, è innegabile e di conseguenza qui abbiamo un assaggio in nuce di una consapevolezza, vaga ma evidentemente diffusa, che elaborata successivamente porterà, secoli dopo, Cardano e Galilei a elaborare le prime analisi quantitative sui giochi con i dadi e poi Pascal e Fermat a formulare la definizione frequentistica di probabilità.

Cacciaguida e l'induzione

Tu credi che a me tuo pensier mei

da quel ch'è primo, così come raia

da l'un, se si conosce, il cinque e 'l sei;

Paradiso XV 55-57

In questa terzina Cacciaguida, si rivolge a Dante dicendogli che sbaglia a ritenere che il suo pensiero possa giungergli tramite Dio ("quel ch'è primo"). Quello che è interessante dal punto di vista matematico è la similitudine usata per indicare una conoscenza istantanea, chiara e univoca: come quella che si ha dei numeri naturali una volta che si conoscono le proprietà basilari dell'unità e delle operazioni.

Il 5 e il 6 nominati nei versi non sono numeri speciali o specifici, ma sono nominati solo con l'intento di fornire un esempio generico di coppia di numeri naturali consecutivi: al tempo di Dante non era ancora stata introdotta l'idea di utilizzare simboli letterali per individuare quantità indeterminate anche se dotate di alcune proprietà specifiche.[6] In linguaggio più moderno Cacciaguida sta dicendo che, conoscendo il numero 1 e la funzione di successore, immediatamente si possiede la conoscenza di tutta la sequenza dei numeri naturali, perché da ciascuno di essi si può ricavare immediatamente il numero successivo, e poi proseguire all'infinito.

Il concetto è molto interessante, soprattutto dal punto di vista epistemologico-matematico. Queste parole evidenziano come, già all'epoca di Dante, fosse chiaro che la conoscenza delle proprietà fondamentali di un insieme racchiude l'intera conoscenza di quell'insieme, anche se infinito. In altre parole, per seguire più specificatamente l'esempio di Cacciaguida, siamo in grado di conoscere qualunque numero naturale anche se non lo abbiamo mai incontrato prima.

Gli angeli e la crescita esponenziale

...L'incendio suo seguiva ogni scintilla;

ed eran tante, che 'l numero loro

più che 'l doppiar delli scacchi s'immilla...

(Paradiso XXVIII, 91-93)

Nel XXVIII canto del Paradiso, Dante descrive con questi versi la grandezza di Dio rispetto alla moltitudine di angeli che lo adorano, paragonando il primo ad un incendio e la moltitudine alle scintille dello stesso. E l'intensità della luce divina è ulteriormente magnificata in questi versi dal fatto che il numero di queste scintille, per quanto tutte insieme non siano paragonabili alla luminosità dell'incendio che le ha create, è enorme.

In che modo si deduce questa enormità della folla angelica? E cosa c'entrano gli scacchi?

---

[6] Lo stesso Euclide, nella sua dimostrazione dell'infinità dei numeri primi, mostra il procedimento dimostrativo con tre diversi numeri primi come esempi del suo ragionamento generale che, però, non può mostrare realmente secondo canoni moderni di generalità perché non ancora dotato del giusto linguaggio del calcolo letterale.

In questi versi Dante fa riferimento ad un'antica leggenda indiana, nota all'epoca ormai in tutto il mondo "civilizzato", che narrava l'origine del gioco degli Scacchi.[7] Il Re Indù Iadava vinse un'importante battaglia per l'affermazione del proprio potere, ma in tale battaglia perse la vita suo figlio. Da quel momento Iadava viveva senza darsi pace, rimuginando nella propria mente sulla battaglia per tentare di capire se la morte del figlio fosse stata inevitabile o se fosse una sua colpa che avrebbe dovuto espiare. In questa ambascia, la vita di Iadava procedeva senza serenità né gioia, nonostante i tentativi ripetuti dei suoi amici e cortigiani di sollevargli il morale.

Un giorno si presentò a corte un brahmano, di nome Lahur Sessa, pronto all'ennesimo tentativo di rallegrare il sovrano. Tirò fuori da una scatola una tavoletta quadrata dipinta con 64 caselle chiare e scure e 32 statuette per metà bianche e metà nere, spiegò brevemente le regole a Iadava e si misero a giocare. Man mano che il gioco procedeva, Iadava capì che quel gioco riproduceva la battaglia su cui si stava arrovellando e, dopo numerose partite, capì che non avrebbe mai potuto vincere quella battaglia senza il sacrificio di un certo pezzo (suo figlio).

Ritrovata la serenità, entusiasta per il nuovo gioco, dispose che se ne facessero tante copie e fosse diffuso nel suo regno. Poi chiese a Lahur Sessa cosa volesse come ricompensa per la nuova serenità che gli aveva donato. Il brahmano chiese che la sua ricompensa fosse calcolata mediante la tavola del gioco: il re avrebbe dovuto donargli 1 chicco di riso per la prima casella, 2 chicchi di riso per la seconda, 4 chicchi di riso per la terza e così via raddoppiando il numero di chicchi di riso per ogni casella della tavola da gioco. Iadava acconsentì con sorpresa ad una richiesta che gli appariva tanto modesta, ma quando i suoi contabili calcolarono quanto riso donare a Lahur Sessa, il Re impallidì: non solo quel numero superava di gran lunga il contenuto di tutti i magazzini di riso del regno, ma neanche accumulando il raccolto di secoli consecutivi si sarebbe raggiunta una tale quantità di riso.

Iadava allora capì che il brahmano gli aveva fatto un secondo dono, una lezione importante: anche una richiesta apparentemente modesta può nascondere insidie e pericoli e quindi si deve sempre valutare tutto con gli strumenti più opportuni. Come ricompensa il sovrano decise di nominare Lahur Sessa governatore di una provincia.

Ma a quanto ammontava esattamente la richiesta in riso di Lahur Sessa? Seguendo la richiesta descritta nella leggenda, la quantità di riso R richiesta dal brahmano è espressa dalla somma

$$R = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63}$$

Capiamo subito, quindi, che questo problema ha a che fare con la crescita esponenziale, una legge che descrive molte tipologie diverse di fenomeni naturali e sociali,[8] una funzione che ha degli aspetti molto particolari e, in un certo senso, illusori per coloro che non sono consapevoli delle sue proprietà. In particolare le funzioni esponenziali sembrano crescere pochissimo all'inizio, ma poi in brevissimo tempo raggiungono risultati enormi rispetto ai valori iniziali.[9]

Tornando al calcolo di R, è possibile dimostrare che la somma $S(a,n) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$ di tutte le potenze di a con esponente che varia da 0 a n è data dalla formula[10]

---

[7] In realtà la leggenda riguardava, in origine, il gioco del Chaturanga, che è un gioco di origine indiana, che successivamente, attraverso le vie commerciali (passando dalla Persia, dove il gioco assunse, sostanzialmente, il nome attuale, dal termine persiano per Re, Scià) arrivò in Europa con il nome di Scacchi e qualche variazione di regolamento. Tuttavia le differenze nelle regole tra Chaturanga e Scacchi sono così esigue che ai fini leggendari possono essere tranquillamente confusi tra loro.

[8] Tra cui la crescita dei contagi di un'epidemia all'interno di una popolazione se non ci sono limitazioni sufficienti alle interazioni sociali tra gli individui.

[9] Per tale motivo è essenziale saper riconoscere questo andamento sulla base delle sue variazioni, non basandosi solo sull'entità dei valori in sé e per sé, perché quando tali valori sono diventati grandi è spesso troppo tardi per evitare i danni peggiori, se l'esponenziale riguarda la crescita di un qualche dato negativo. Il perché lo si può capire richiamando alla memoria il famoso indovinello della ninfea e del laghetto:

> «Una ninfea infesta un laghetto, coprendo con le sue foglie la sua superficie. Ogni giorno la superficie coperta raddoppia. Se la ninfea ci mette 30 giorni a coprire il laghetto, dopo quanti giorni ne avrà coperto metà?»

La maggioranza delle persone di solito risponde 15, o un numero vicino ad esso, ma la risposta corretta è 29 (se la ninfea raddoppia ogni giorno la superficie occupata, allora nel precedente del giorno n la superficie occupata è la metà di quella occupata al giorno n). Se nel laghetto abitassero dei pesci che hanno sviluppato una civiltà evoluta potrebbero porsi il problema di fermare questo fenomeno per la propria salvaguardia, ma se cominciassero a preoccuparsi solo quando il ricoprimento arrivasse a metà della superficie, si muoverebbero troppo tardi prima della catastrofe.

[10] La formula per $S(a,n) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$ può essere dimostrata in tre modi diversi.

Moltiplicazione e cancellazione

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'uguaglianza per $(a-1)$: $S(a,n)(a-1) = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$.

$$S(a,n) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Quindi

$$R = S(2,63) = 2^{64} - 1 = 18'446'744'073'709'551'615$$

Assumendo il peso di un chicco di riso pari a $0.02g$, la massa di riso da corrispondere sarebbe dovuta essere pari a quasi 369 miliardi di tonnellate! Comprensibile quindi l'iniziale disperazione del sovrano.

Torniamo alla Divina Commedia. Forte del fatto che questa leggenda era nota ovunque in Europa, Dante la usa come riferimento per esprimere in breve una moltitudine enorme, praticamente incalcolabile: questa terzina dice che il numero degli angeli è il risultato di un calcolo simile a quello del raddoppio su ogni casella della scacchiera, ma anziché raddoppiare ad ogni passo si deve moltiplicare per 1000. Quindi il numero A di angeli nel Paradiso ammonta a

$$A = S(1000,63) = \frac{1000^{64}-1}{1000-1} =$$

$$= 1'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001' \ldots$$

$$\ldots '001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001' \ldots$$

$$\ldots '001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001'001' \ldots$$

$$\ldots '001'001'001'001'001'001$$

Il motivo per cui Dante vuole suggerire un numero spropositato, impensabile (e neanche scrivibile, con le notazioni matematiche in vigore all'epoca), ma comunque finito, è che l'infinito, per Dante, è un attributo solo di Dio.

Il mistero della Trinità

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond' elli indige,
tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;

(Paradiso XXXIII, 133-138)

In questi versi Dante vuole spiegare, con un esempio, l'impossibilità di cogliere il mistero della Trinità, e a questo fine fa riferimento al problema della quadratura del cerchio. Per capire il senso di queste parole bisogna tornare ai metodi geometrici della Grecia classica che hanno posto le basi per tutta la matematica occidentale. Anche se poi molti concetti sono stati superati, quella visione della geometria era ancora fondamentale all'epoca di Dante.

Svolgiamo il prodotto sulla destra: $S(a,n)(a-1) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1} - 1 - a - a^2 - \cdots - a^n$.

A parte a^{n+1} e -1, tutti i termini compaiono due volte con segni opposti e quindi si cancellano: $S(a,n)(a-1) = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S(a,n) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Divisione con Ruffini

Eseguiamo la divisione del polinomio $a^{n+1} - 1$ per il polinomio $a - 1$, usando il metodo di Ruffini. Costruendo lo schema e procedendo nel modo usuale nella riga che contiene i coefficienti del quoziente si produrranno, uno dopo l'altro, tanti numeri 1:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{array}$$

Quindi il quoziente della divisione è $a^n + \cdots + a^2 + a + 1$ che è $S(a,n)$. Quindi $S(a,n) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Equazione

Aggiungiamo e sottraiamo a^{n+1} al membro destro dell'uguaglianza che definisce $S(a,n)$: $S(a,n) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} - a^{n+1}$.

Mettiamo in evidenza a nei termini intermedi: $S(a,n) = 1 + a(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) - a^{n+1} \Rightarrow S(a,n) = 1 + aS(a,n) - a^{n+1}$.

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il contenuto delle parentesi tonde è $S(a,n)$. Abbiamo quindi ottenuto un'equazione per $S(a,n)$ che possiamo risolvere facilmente: $S(a,n) = 1 + aS(a,n) - a^{n+1} \Rightarrow S(a,n) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Nella Grecia classica la determinazione dell'area di una figura doveva passare necessariamente per la costruzione di una figura poligonale, la cui area fosse già nota, che avesse area equivalente o in rapporto razionale con l'area da calcolare. Di fatto, come abbiamo studiato al biennio, ogni formula dell'area di un poligono si ottiene riconducendosi in quale modo ad un quadrato, quadrato che deve essere costruito mediante l'uso di sola riga e compasso, per non rischiare che errori di misura portino alla dimostrazione di formule errate nel caso generale.

L'unica figura che sfuggì sempre a questa regola è il cerchio e per un buon motivo: π, che è il rapporto di proporzionalità tra l'area di un cerchio e il quadrato che ha per lato il raggio del cerchio, è addirittura un numero trascendente, cioè un numero che non può essere soluzione di nessuna equazione polinomiale a coefficienti interi. Quindi ciò significa che non può esistere nessuna sequenza finta di costruzioni con riga e compasso che portino da un cerchio ad un quadrato di area equivalente o in rapporto razionale con quella del cerchio. E pertanto, sebbene l'area del cerchio esista e possa essere calcolata con l'approssimazione che si desidera,[11] non è possibile riuscire a razionalizzare tale area, cioè ad averne una rappresentazione esatta e comprensibile nel linguaggio matematico dell'epoca.

Tuttavia che π sia un numero con queste caratteristiche è una scoperta recente, per Dante il problema della quadratura del cerchio (con gli strumenti della geometria classica) si presenza come un problema complicatissimo, insoluto da lungo tempo e su cui tanti matematici si stanno arrovellando, ma non impossibile.

Queste caratteristiche rendono la quadratura del cerchio un esempio perfetto delle qualità del mistero della trinità del Dio cristiano: il problema è al limite delle capacità della mente umana, ma non è privo di soluzione, quindi la soluzione esiste, come esiste l'area del cerchio (e non potrebbe essere altrimenti per la pitagoricità del Dio dantesco, che non potrebbe avere tra le sue qualità, attributi contraddittori dal punto di vista logico), ma per quanto la mente possa sforzarsi di arrivare alla soluzione, e avere l'impressione di esservi vicino, essa si trova oltre la sua comprensione completa.

L'Universo di Dante

L'intero universo descritto da Dante, in particolare la struttura del cielo/Paradiso, possiede delle caratteristiche peculiari e apparentemente paradossali:

- Il cielo più elevato, l'Empireo, contiene tutti i beati, ma nello stesso tempo tali beati sono in grado di apparire, come se vi fossero "fisicamente" presenti, anche nei cieli inferiori, pur se i diversi cieli non hanno apparentemente alcun punto in comune tra loro, dato che sono raffigurati come una serie di sfere concentriche.
- La Terra si trova al centro dei diversi cieli che corrispondono ai diversi pianeti del sistema tolemaico, all'esterno dei quali vi è il *primum mobile*, la sfera celeste che impartisce il moto a tutti gli altri. Innanzitutto qui torna l'apparente paradosso di qualcosa che interagisce con gli altri cieli (e deve farlo per regolare i loro moti) pur non avendo apparentemente punti in comune (il *primum mobile* è concentrico a tutte le altre sfere e pertanto non ha punti in comune con esse). Inoltre, c'è un ulteriore paradosso nella posizione di Dio rispetto al creato: oltre il *primum mobile* ci sono le schiere angeliche che circondando Dio, a distanze sempre minori, benché questa seconda parte del creato sia all'esterno e intorno al *primum mobile* e quindi all'esterno e intorno di tutta la parte del creato visibile normalmente all'uomo. Quindi Dio contemporaneamente circonda ed è circondato da tutte le sfere celesti e corti angeliche: è al contempo centro e confine di tutto il creato.

L'Empireo appare quindi come un vero "contro-universo" rispetto a quello esplorato da Dante dalla Terra fino al *primum mobile*: in tale parte del paradiso, le sfere appaiono restringersi man mano che ci si avvicina a Dio, al contrario delle prime nove che appaiono più ampie man mano che si ascende.

Rappresentare razionalmente tutte queste caratteristiche mediante l'usuale geometria tridimensionale è impossibile, si incorre inevitabilmente in qualche paradosso. Ma esse possono essere razionalizzate e descritte con un linguaggio matematico in dimensioni spaziali superiori alle tre a cui si è abituati nel mondo in cui usualmente viviamo.

---

[11] Approssimando la circonferenza con un poligono regolare con un numero di lati grande a piacere o, al giorno d'oggi, troncando i decimali di π.

Spazi di qualunque dimensione

Matematicamente è possibile descrivere, estendendo opportunamente il linguaggio della geometria, spazi geometrici con più di 3 dimensioni. Raffigurarli nella propria mente, nello stesso modo in cui possiamo raffigurarci mentalmente un triangolo o un cubo, è impossibile, perché la raffigurazione mentale è inestricabilmente connessa con quanto siamo in grado di vedere con i nostri occhi, che sono "costruiti" per elaborare le immagini provenienti da un mondo tridimensionale. Tuttavia possiamo comunque descrivere le proprietà di questi spazi geometrici, e delle figure che essi contengono, mediante opportune analogie e l'uso delle coordinate cartesiane.[12]

Al fine di sviluppare più comodamente i concetti e le analogie che ci serviranno, dovremo studiare gli analoghi a più dimensioni dei cerchi e delle sfere. Per uniformità di linguaggio nel seguito useremo i seguenti termini

- n-*bolla* di raggio R: con questo termine indichiamo la porzione di uno spazio geometrico a n dimensioni che contiene tutti i punti dello spazio la cui distanza da un punto fisso, detto centro, è minore o uguale a R. Ad esempio, la zona di piano racchiusa da una circonferenza è una 2-bolla, la zona di spazio racchiusa da una sfera è una 3-bolla.[13]
- $(n-1)$-*sfera* di raggio R: con questo termine indichiamo il bordo di una n-bolla quindi, in altre parole, la porzione di uno spazio geometrico a n dimensioni che contiene tutti i punti dello spazio la cui distanza da un punto fisso, detto centro, è uguale a R. Ogni $(n-1)$-sfera è il bordo di una n-bolla. Ad esempio, la figura geometrica usualmente chiamata circonferenza è una 1-sfera, la figura geometrica usualmente chiamata sfera è una 2-sfera.[14]

I numeri anteposti al termine *bolla* o *sfera* indicano quante sono le dimensioni spaziali lungo cui ci si può muovere senza uscire dall'oggetto geometrico in questione: una n-bolla ha le stesse dimensioni dello spazio in cui è "immersa", una $(n-1)$-sfera ha una dimensione in meno dello spazio in cui è "immersa" (infatti la circonferenza è una linea e quindi è un insieme geometrico a una dimensione anche se appartiene ad un insieme geometrico bidimensionale, la sfera è una superficie e quindi è un insieme geometrico a due dimensioni anche se appartiene ad un insieme geometrico tridimensionale).[15]

Espansione: da un'n-bolla a un'n-sfera

Una cosa interessante che è ogni n-sfera (e quindi anche la n-bolla contenuta) può essere costruita a partire da una n-bolla all'interno di un $(n+1)$-spazio con un procedimento chiamato *espansione*.[16]

1) Consideriamo due copie identiche di una n-bolla sovrapposte in tutta la loro estensione.
2) Spostiamo ogni punto di ciascuna n-bolla lungo la direzione perpendicolare ad essa (da ciascuna n-bolla ci si sposta in un verso opposto a quello dell'altra) di una lunghezza dipendente dalla distanza dal centro: in particolare i punti della n-bolla a distanza r dal centro si spostano di una lunghezza $l=\sqrt{R^2-r^2}$

I punti dopo lo spostamento costituiscono una n-sfera. Di seguito due esempi.

---

[12] Del resto gli stessi termini "monodimensionale", "bidimensionale" e "tridimensionale" provengono, di fatto, dalla geometria analitica: il numero di dimensioni di uno spazio geometrico è il numero di coordinate cartesiane che servono per individuare la posizione di tutti i suoi punti. Su una retta, o una qualunque linea, possiamo scegliere un punto come origine e attribuire ad ogni punto della linea un numero corrispondente alla distanza dall'origine misurata lungo la linea, e attribuendo un segno in base al verso della misurazione. Su un piano, o una superficie, usiamo due numeri per individuare la posizione, dopo aver scelto due linee perpendicolari su cui misurare (in modo analogo al sistema monodimensionale descritto prima) la distanza dall'origine delle proiezioni di ogni punto sulle linee di riferimento (esempi: le coordinate del piano cartesiano, le coordinate geografiche sulla sfera ideale della Terra). Analogamente si può procedere all'interno di un volume solo che si avrà bisogno di tre linee di riferimento e quindi di tre numeri: ad esempio ogni stella dell'universo può essere individuata dalle sue coordinate celesti (del tutto analoghe a quelle geografiche) con l'aggiunta della distanza dalla Terra.

[13] Esiste anche la 1-bolla, che è un segmento di retta: tutti i segmenti di retta, in uno spazio unidimensionale coincidente con la retta stessa, sono 1-bolle, il cui centro coincide con il loro punto medio e il raggio con la loro semilunghezza.

[14] Esiste anche la 0-sfera, che è l'insieme dei due punti che delimitano un segmento di retta che, come detto nella nota precedente, è la 1-bolla.

[15] In appendice è riportata una breve disamina delle proprietà generali delle n-bolle e delle $(n-1)$-sfere.

[16] Il nome è dovuto al fatto che questa costruzione ricorda il processo di espansione di un palloncino quando viene gonfiato.

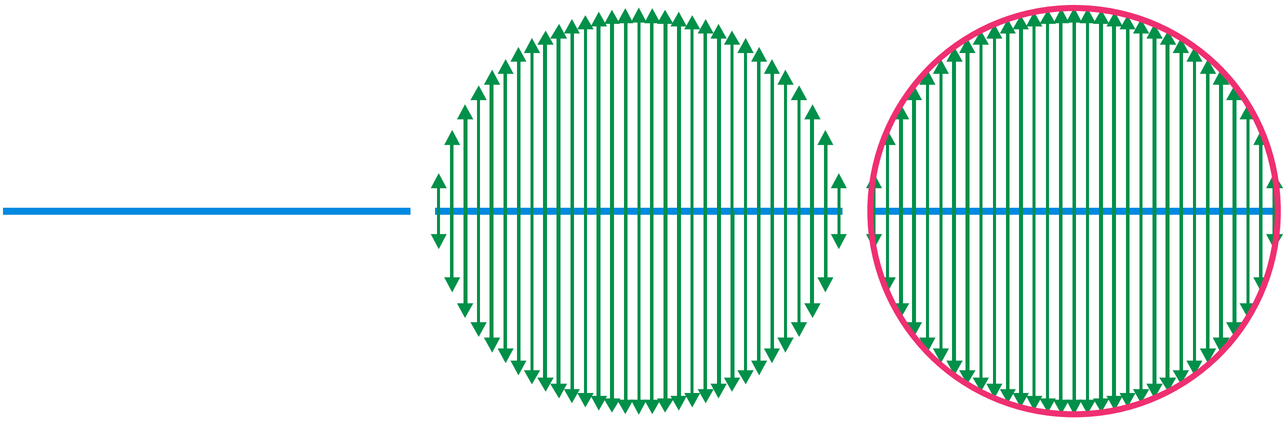


FIG. 1: Espansione di due 1-bolle (in azzurro) in una 1-sfera (in magenta).

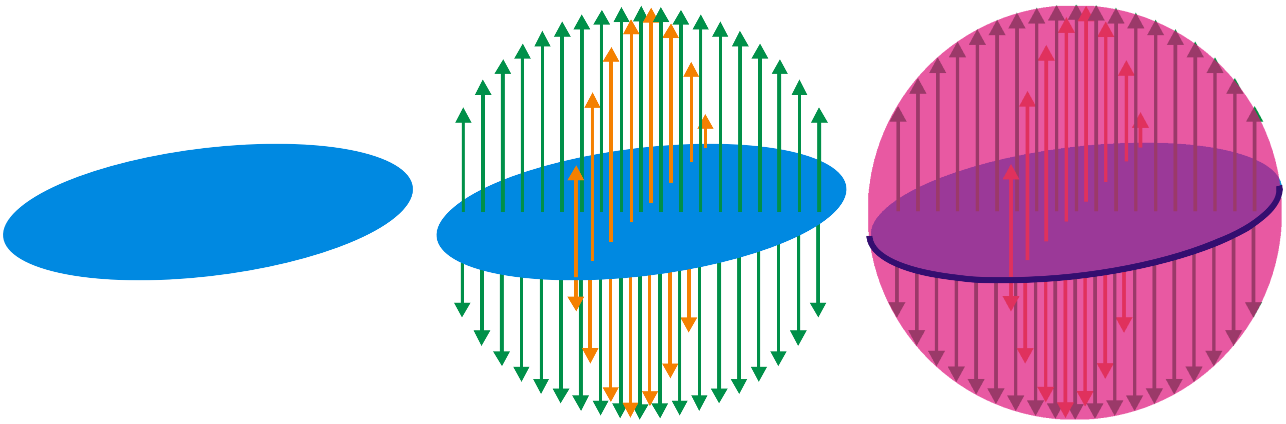


FIG. 2: Espansione di due 2-bolle (in azzurro) in una 2-sfera (in magenta). Sono mostrati solo i vettori spostamento lungo due diametri.

Il centro di ciascuna n-bolla, dopo l'espansione, diventa il centro della semi-n-sfera che genera, pur trovandosi sul bordo della $(n+1)$-bolla racchiusa dalla n-sfera. La quale, come oggetto n dimensionale, non ha bordo o confine,[17] in modo simile a quello che accade ai poli geografici della Terra.[18] Il bordo di ciascuna n-bolla (che è una $(n-1)$-sfera) resta sovrapposto a quello dell'altro, costituendo la zona di separazione tra le due semi-n-sfere, giocando un ruolo simile a quello della linea dell'Equatore per il pianeta Terra.

Ora immaginiamo di eseguire il processo di espansione su due 3-bolle che siano sovrapposte per tutta la loro estensione, cioè per tutto il loro volume, all'interno di un 4-spazio. Quindi tutti i punti interni delle 3-bolle sono sovrapposti, come se le due 3-bolle coincidessero in un 3-spazio, ma nel 4-spazio esiste una direzione e un verso lungo cui ogni punto di ciascuna 3-bolla può allontanarsi dall'altra 3-bolla senza attraversarla. Spostando i punti di queste 3-bolle perpendicolarmente a sé stesse (lungo la quarta dimensione del 4-spazio in cui sono immerse), secondo il processo di espansione, otteniamo una 3-sfera.

Un essere vivente tridimensionale non noterebbe alcuna differenza tra il vivere nel volume tridimensionale di una 3-bolla immersa in un 3-spazio e il vivere nel volume tridimensionale di una 3-sfera immersa in un 4-spazio, questo quanto meno finché le sue esperienze fossero limitate a distanze piccole rispetto all'estensione dell'intera figura che lo contiene. Si potrebbe riuscire a distinguere le due condizioni solo guardando quel che accade su distanze molto grandi nel proprio universo. Ma questo è ciò che ha fatto Dante (inteso come personaggio della Divina Commedia) descrivendo il Paradiso.

Per comprendere la struttura geometrica dell'universo di Dante (e in particolare del paradiso) modifichiamo leggermente la costruzione per espansione vista prima. Anziché partire da due 3-bolle semplici partiamo da due 3-bolle che siano suddivise in nove gusci 3-bollici e una 3-bolla più piccola, tutti concentrici tra loro.

---

[17] Una circonferenza fa da bordo ad un cerchio, ma essa non ha uno specifico punto di inizio o di fine. Una sfera fa da bordo allo spazio al proprio interno ma essa non ha uno specifico punto o una specifica linea di inizio o di fine.

[18] I quali, guardando la rotazione della Terra da un punto di vista puramente bidimensionale, appaiono entrambi come centri della rotazione.

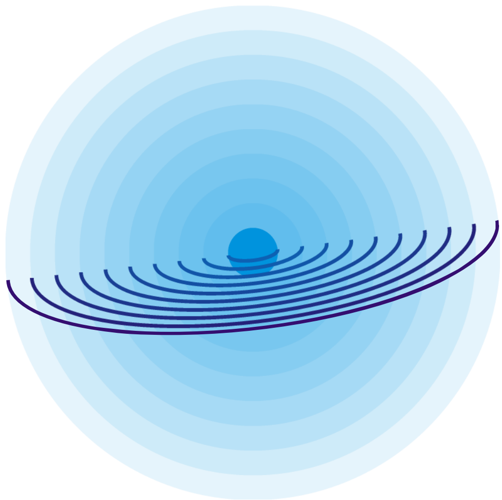


FIG. 3: una 3-bolla suddivisa in porzioni concentriche.

Procediamo ora all'espansione di queste due figure come si farebbe per una normale 3-bolla in una 3-sfera. Le due superfici 2-sferiche che circondano le due 3-bolle iniziali restano completamente sovrapposte e formano la zona di separazione tra le due semi-3-sfere che si sono create.

Se la costruzione fosse stata fatta con una dimensione in meno, otterremmo la struttura in FIG. 4

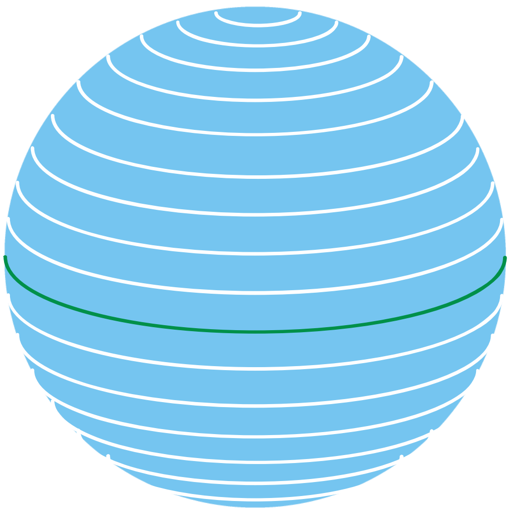


FIG. 4.

dove la linea verde corrisponderebbe alla separazione tra cieli inferiori ed Empireo e le linee bianche alle separazioni tra i diversi cieli inferiori (al di sotto della linea verde) e tra le corti angeliche (al di sopra della linea verde).

Per un essere bidimensionale che si muovesse su questa 2-sfera ciascuno dei due poli apparirebbe come il centro di una serie di 1-sfere racchiuse entrambe da una singola 1-sfera (quella in verde). Tale 1-sfera risulterebbe suddividere la 2-sfera in due parti separate, ciascuna con un proprio centro, ciascuno dei quali risulta essere centro della 1-sfera di separazione in base all'emisfero in cui ci si trova.

Nella nostra costruzione, l'espansione delle due figure iniziali produce le due zone principali dell'universo dantesco: la parte concentrica alla Terra, suddivisa quindi nella 3-bolla terrestre e in nove gusci 3-bollici che corrispondono ai nove cieli inferiori, e la parte concentrica a Dio, suddivisa nella 3-bolla che separa Dio dalle corti angeliche e i nove gusci 3-bollici che corrispondono alle nove corti angeliche. La superficie che separa il *primum mobile* dall'Empireo risulta quindi, agli occhi tridimensionali di Dante, sia contenere la Terra e i cieli inferiori da un lato, sia l'empireo e le corti angeliche dall'altro.

Ciò non sarebbe possibile se l'universo dantesco fosse una normale 3-bolla (come normalmente viene rappresentato), perché una 2-sfera non può, nello stesso tempo, separare la 3-bolla in due e apparire anche come il contenitore di entrambe le parti. Invece per una 3-sfera, come abbiamo visto, le due 2-sfere che racchiudono le due 3-bolle iniziali,

1. continuano entrambe a fare da bordo alla propria semi-3-sfera (per chi ha occhi tridimensionali),
2. restano sovrapposte,
3. quindi costituiscono un'unica superficie che separa in due parti la 3-sfera che si ottiene dall'espansione.

Quindi l'universo dantesco è in realtà una 3-sfera che circonda una 4-bolla. Questo permette di spiegare anche l'altra caratteristica del Paradiso di cui parlavamo all'inizio: la possibilità per i beati di apparire nei diversi cieli inferiori pur risiedendo nell'Empireo e senza attraversarne altri. Dall'Empireo i beati, essendo ormai enti che hanno superato i limiti tridimensionali umani, possono attraversare l'interno della 4-bolla esattamente come un essere tridimensionale, nell'universo della FIG. 4, potrebbe attraversare l'interno della 3-bolla e spostarsi da un emisfero all'altro senza necessariamente attraversa nessuna delle curve bianche o verdi presenti sul bordo.

Dante non aveva certamente in mente questi concetti matematici avanzati nella stesura della Divina Commedia, concetti che sarebbero stati sviluppati secoli e secoli dopo, ma deve intuire che la struttura che ha immaginato possa non essere contraddittoria, benché impossibile da descrivere nell'ambito della Geometria Euclidea del piano e dello spazio (uniche geometrie note all'epoca e considerate la corretta e precisa descrizione delle proprietà dello spazio fisico reale). Ne deve in qualche modo essere convinto data la sua adesione al pitagorismo che già in altri passi della Divina Commedia si è manifestata mediante la convinzione che la coerenza logica e matematica del mondo è una caratteristica imprescindibile anche per il Dio cristiano considerato onnipotente.[19]

La razionalizzazione qui presentata, mediante l'uso di geometrie euclidee di dimensione superiore, della struttura dell'universo dantesco, dimostra che non si sbagliava.

FONTI

- **TROMBETTI, G.**, *Dante e la Matematica*, seminario nell'ambito del ciclo "Come alla Corte di Federico II";
- **PETERSON, M.**, *Dante and the 3-Sphere*, American Journal of Physics v. 47 n. 12.

RINGRAZIAMENTI

Si ringrazia la collega Prof.ssa Carmosino per i preziosi consigli e la revisione del testo.

[19] Si veda a tal proposito, l'analisi dell'episodio del cherubino nero, in questo stesso lavoro.