Periodico di Matematiche

Organo della MATHESIS

Società italiana di scienze matematiche e fisiche fondata nel 1895

Volume 98 (2022)

Fascicolo 3

Autorizzazioni e supporti Autorizzazioni Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Il Periodico di Matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su www.mathesisnazionale.it

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia €60,00 - Per l'Estero €70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati: segreteria@mathesisnazionale.it

c/c postale, Codice IBAN:
IT05I0760104000000048597470

intestato a:
Mathesis Nazionale c/o Dipartimento di Matematica e Fisica
Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"
Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)
www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it

Fascicolo 3 Volume **98** (2022)

Periodico di Matematiche

Organo della MATHESIS

Società italiana di scienze fisiche e matematiche fondata nel 1895

Mathesis

Indice

Periodico di Matematiche **98** (2022), pp.79–106

Astrazione e Immaginazione

Abstraction and Imagination

Francesco de Giovanni[1] **e Carmela Musella**[2]

Lo spunto (emotivo) per queste riflessioni risale a due anni fa, e deriva dalla lettura dell'articolo "Quelle linee tra Mondrian e mia nonna" di Tomaso Montanari, apparso sul Venerdì di Repubblica nell'ottobre 2020. Per ricordare la nonna Maria, nata un secolo fa e mancata durante il suo centesimo anno di vita, Montanari sceglie un quadro dipinto proprio nel 1921: *Composizione con grande piano rosso, giallo, nero, grigio e blu*, in cui Piet Mondrian (1872–1944) costruì "un sistema di rette ortogonali e di colori puri che riuscisse a tenere in tensione armonica, in equilibrio, forze opposte" (fig.1). L'opera di Mondrian sembra perfetta a Montanari per ricordare la nonna, tra le poche laureate in matematica della sua generazione, e per rappresentarne la razionalità e la lucidità. Montanari suggerisce di leggere anche l'arte astratta con la stessa libertà con cui ci accostiamo alle opere figurative che l'hanno preceduta.

Una libertà finalizzata ad immaginare e capire, che sembra la stessa indicata da Ennio De Giorgi (1928-1996) come peculiare del matematico tra gli scienzati. In un'intervista del 1996, il grande matematico leccese infatti dichiarava: "Il matematico ha una libertà che forse altri scienziati hanno meno o non hanno, di pensare alle cose che lo interessano di più, scegliere gli argomenti che ritiene più belli e il modo che ritiene più bello di affrontarli, perfino fissare gli assiomi da cui vuole partire nelle sue successive elaborazioni [...] Io penso che all'origine della creatività in tutti i campi ci sia quella che io chiamo la capacità o la disponibilità a sognare, a immaginare mondi diversi, cose diverse, a cercare di combinarle nella propria immaginazione in vario modo. A questa capacità, forse alla fine molto simile in tutte le discipline (in matematica, in filosofia, in teologia, in arte, in pittura, in scultura, in fisica, in biologia, eccetera) si unisce poi la capacità di comunicare i propri sogni".

[1]francesco.degiovanni2@unina.it - Università degli Studi di Napoli Federico II
[2]carmela.musella@unina.it - Università degli Studi di Napoli Federico II

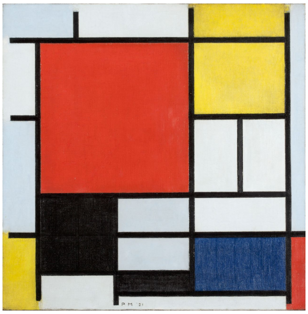


fig. 1 - P. Mondrian: Composizione con grande piano rosso ... (1921)

A noi pare che la *Composizione* in fig.1 rappresenti soprattutto la relazione tra i rettangoli colorati disposti sul piano. L'astrazione permette di prescindere dalla natura degli oggetti e quindi di prescindere dal particolare.

È questa l'impostazione dell'*algebra moderna* (astratta), che si è sviluppata a partire dai primi anni del Novecento, sostanzialmente come studio delle strutture algebriche, cioè di insiemi in cui siano definite operazioni. Non conta quali siano gli oggetti, ma quanti siano e il modo con cui essi si "compongono". Cercheremo di chiarire nel seguito questa affermazione.

Algebra moderna è il titolo dell'opera di Bartel Ludwig van der Waerden, in cui all'inizio degli anni trenta del secolo scorso trovò una prima sistemazione tale nuova teoria. In realtà la locuzione "algebra moderna" non è del tutto felice, nè è rigoroso il termine "astratta", perché la matematica è sempre astrazione (lo è anche il concetto di numero). Così affermava Lucio Lombardo Radice (1916–1982) in una trasmissione radiofonica del 1972, ricordando come l'opera di van der Waerden dopo qualche decennio fosse diventata un classico e che d'altra parte l'algebra classica che si studia nelle scuole secondarie superiori è essa stessa frutto di astrazioni di alto livello.

La sequenza di tele rappresentate nelle figure 2–5 fornisce un'immagine a nostro parere efficace di un processo evolutivo verso l'astrazione; in questo caso quello che ha portato Mondrian dalla sua fase figurativa a quella astratta, nel breve periodo che va dal 1909 al 1912.

Nel primo dipinto di questa serie è ancora chiara una certa adesione alla realtà, in particolare nella rappresentazione dei rami e del tronco e nella scelta dei colori.

fig. 2 - P. Mondrian: Albero rosso (1909)

fig. 3 - P. Mondrian: Albero blu (1910)

Un anno dopo, Mondrian rielaborò lo stesso soggetto in una forma ben più schematica e stilizzata; in questa nuova versione scompaiono molti dettagli e l'impostazione cromatica è radicalmente differente.

La ricerca formale di Mondrian procede nel terzo dipinto. L'allontanamento dal reale è ormai evidente: pur essendo ancora chiaro il soggetto, i rami si riducono a semplici linee quasi ricoperte dal colore denso.

fig. 4 - P. Mondrian: Albero grigio (1911)

fig. 5 - P. Mondrian: Melo in fiore (1912)

Nel "Melo in fiore" il processo di astrazione si è completato: l'albero non è più riconoscibile, i rami sono ormai sottili linee, il tronco è quasi scomparso, sostituito da macchie di colore al centro della tela.

Anche la storia dell'algebra è rappresentata da un'evoluzione verso livelli sempre più spinti di astrazione, rispetto ai quali gli oggetti e le conoscenze precedenti diventano casi concreti e particolari.

Nello studio della matematica è bene acquisire consapevolezza di tale processo evolutivo della disciplina, altrimenti gli argomenti possono apparire cristallizzati nel tempo e si rischia di non cogliere il movimento delle idee. Occorre avere uno sguardo di insieme, in modo da non percepire gli argomenti come staccati gli uni dagli altri, pericolo che si corre ad esempio quando nell'insegnamento si pone l'accento sui metodi piuttosto che sui concetti.

L'astrazione consiste, seguendo Kant, in un'operazione di estrazione: non si *astrae qualcosa*, ma *si astrae da qualcosa*. Ne *L'intuizione creativa* (2012), Andrea Gentile osserva che "per elaborare, formare e definire concetti sulla base delle rappresentazioni, bisogna essere in grado di comparare, riflettere e astrarre. Secondo Kant, queste tre operazioni logiche dell'intelletto, infatti, sono le condizioni *essenziali* e *universali* per la produzione di qualunque concetto in generale".

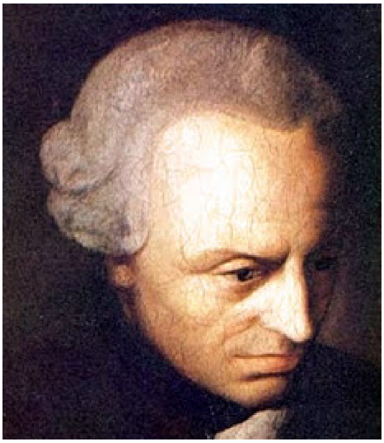


fig. 6 - Immanuel Kant (1724–1804)

Nella *Critica della Ragion Pura*, il grande filosofo tedesco scrive: "Io vedo, per esempio, un salice e un tiglio. Confrontando questi oggetti tra loro, innanzi tutto, noto che essi sono diversi l'uno dall'altro riguardo al tronco, ai rami, alle foglie, al colore; ma poi, riflettendo solo su ciò che essi hanno in comune tra di loro: il tronco, i rami e le foglie stesse, e astraendo dalle loro caratteristiche variabili particolari (dalla loro grandezza, dalla loro figura), ottengo il concetto di albero".

Riguardo agli albori della matematica, è chiaro che inizialmente la necessità fu quella di contare, legata a diversi aspetti della vita quotidiana. Un pastore, pur non avendo cognizione del numero delle sue pecore, per controllare che tutte rientrassero all'ovile, era solito fare una tacca su un bastone per ogni pecora al momento dell'uscita dall'ovile e al ritorno scorrere con un dito le tacche del bastone, una per ogni pecora che rientrava, e verificare così di averne quante ce n'erano alla partenza.

In un primo tempo le nozioni primitive di forma, grandezza e numero facevano forse riferimento più ai contrasti che alle somiglianze: la differenza tra una belva e molte belve, tra la dimensione di un cucciolo e di un adulto, tra la forma di un albero e della luna. Poi si acquisì la consapevolezza delle somiglianze, da cui la nascita della matematica. Un lupo, una pecora, un sasso hanno qualcosa in comune: la loro unicità. Le mani possono essere appaiate con i piedi, con gli occhi, con le narici. Da questo riconoscimento di una proprietà astratta che certi enti hanno in comune ha origine il processo graduale che porta alla formazione del concetto di numero.

Lo sviluppo di un linguaggio è stato essenziale per il sorgere di un pensiero matematico astratto. Le espressioni numeriche verbali primitive facevano riferimento a raggruppamenti concreti; solo con il tempo un'espressione del tipo "due pesci" fu usata per indicare un qualunque insieme con due elementi; l'evoluzione del linguaggio da forme concrete verso forme astratte si coglie in parecchie delle attuali unità di misura.

Probabilmente, all'inizio furono utilizzati dei segni per indicare i numeri; poi si passò ad usare le parole. La nozione di numero intero è tra i più antichi concetti matematici, rintracciabile all'inizio della Preistoria, mentre l'uso delle frazioni si può far risalire all'Età del Bronzo.

Sappiamo dalle fonti che gli Egiziani usavano le frazioni già nel secondo millennio a.C., ma solo di alcuni tipi. Erano ad esempio a loro agio con la frazione $2/3$, per la quale avevano un particolare segno ieratico. Per calcolare $1/3$ di una certa quantità, ne calcolavano i $2/3$ e poi ne sottraevano la metà.

Nel *Papiro di Ahmes*, il più esteso papiro egizio di argomento matematico giunto fino a noi e che deve il suo nome allo scriba che lo trascrisse verso il 1650 a.C., vengono esposti molti problemi che fanno uso di frazioni; altri quesiti propongono equazioni lineari della forma $x + ax = b$ oppure $x + ax + bx = c$. L'incognita viene indicata con il termine di *aha*, cioè *mucchio*: ad esempio il problema 24 chiede quale sia il valore del mucchio se il mucchio e un settimo del mucchio sono uguali a 19.

I babilonesi sapevano risolvere equazioni di secondo grado ed avevano sviluppato notevoli capacità di calcolo, usando un principio posizionale sia per gli interi che per le frazioni; essi però non disponevano di un simbolo per lo zero, non giunsero quindi ad un sistema in cui le cifre avessero un valore posizionale assoluto.

La matematica greca concepiva l'aritmetica come una disciplina intellettuale, oltre che come una tecnica; questa transizione avvenne soprattutto nell'ambito della scuola pitagorica, che si servì di essa come base di unificazione degli aspetti del mondo circostante.

Euclide nei suoi *Elementi* (la maggiore e più antica opera matematica greca che ci sia pervenuta, del terzo secolo a.C.) dedica alcuni libri all'algebra, in particolare alla teoria dei numeri. I numeri considerati sono sempre naturali e rappresentati da un segmento. Troviamo nel settimo libro l'argomento oggi noto come *Algoritmo di Euclide* per la determinazione di un massimo comune divisore di due numeri e nel nono libro una dimostrazione della famosa proposizione *i numeri primi sono più di qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi*.

Un contributo importante all'evoluzione del linguaggio simbolico dell'algebra venne dato da Diofanto di Alessandria, tra il terzo e il quarto secolo d.C. Nello sviluppo storico dell'algebra si possono distinguere tre fasi: una prima fase, in cui tutto è descritto a parole, una seconda in cui si usano abbreviazioni (fase sincopata), ed una terza, lo stadio simbolico o finale. Si tratta ovviamente di una semplificazione, ma in questo schema, l'opera di Diofanto va collocata nella seconda fase.

In tutti i libri della *Arithmetica* di Diofanto che ci sono pervenuti, vengono usate abbreviazioni e lettere per indicare le incognite e le loro potenze, si trovano polinomi scritti in una forma concisa tanto quanto quella usata oggi, ma mancano simboli specifici per operazioni e relazioni.

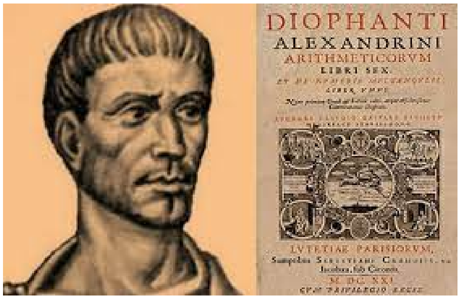


fig. 7 - Diofanto di Alessandria

fig. 8 - Muhammad al-Khwarizmi

Vero padre dell'algebra si può considerare il persiano Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, (IX secolo); dalla latinizzazione della parola *al-jabr* nel titolo della sua opera deriva la parola *algebra*. Anche se compie passi indietro rispetto ai greci nell'uso dei simboli (anche i numeri venivano scritti con le lettere), presenta spiegazioni chiare ed organizzate dei metodi di soluzione delle equazioni.

Per molti secoli lo studio dell'algebra fu soprattutto studio delle equazioni algebriche. L'obiettivo era quello di passare dal considerare casi particolari di equazioni, a risoluzioni generali.

I metodi di risoluzione delle equazioni di terzo e di quarto grado furono resi noti nell'*Ars magna* di Gerolamo Cardano nel 1545 e sono dovuti ai suoi contemporanei Nicolò Tartaglia e Ludovico Ferrari, rispettivamente. I risultati di Tartaglia e Ferrari servirono soprattutto come stimolo alle ricerche successive, ad esempio nello studio delle equazioni di quinto grado e delle sue connessioni con i numeri complessi coniugati.

Solo nel 1824 il norvegese Niels Abel dimostrò l'impossibilità di determinare una formula generale, espressa in termini di operazioni sui coefficienti dell'equazione (cioè una risoluzione per radicali), se questa ha grado superiore al quarto (una dimostrazione meno soddisfacente e meno nota di questo fatto era stata fornita da Paolo Ruffini nel 1799).

fig. 9 - Niels Abel (1802–1829)

Notevoli contributi allo sviluppo della matematica astratta vengono nel XIX secolo dalla scuola britannica, tra i cui esponenti citiamo George Peacock (soprattutto per il suo ruolo di docente e divulgatore), Augustus De Morgan e George Boole, che si può considerare il fondatore della logica matematica.

Nel suo *Trattato di Algebra* del 1830, Peacock cercò di dare all'algebra una struttura logica simile a quella della geometria negli Elementi di Euclide. Tentò di formulare le proprietà associativa e commutativa dell'addizione e della moltiplicazione e la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Questo metodo, sviluppato ulteriormente in un'opera in due volumi pubblicati nel 1842 e nel 1845, segnò l' inizio del metodo assiomatico dell'algebra. Tuttavia sembra che Peacock avesse in mente soprattutto l'insieme dei numeri naturali ed avesse la pretesa che le proprietà delle operazioni in tale insieme dovessero valere in qualsiasi ambiente, anche nel "sistema più astratto".

Peacock trovò un sostegno nell'opera di De Morgan, il quale si preoccupò non solo di attribuire un significato preciso alle lettere usate, ma anche ai simboli per le operazioni. Nel suo trattato *Logica formale*, De Morgan asserisce che "fatta eccezione per un solo caso, nessun termine o segno aritmetico o algebrico possiede il minimo significato in tutto questo capitolo, che tratta di simboli e di leggi delle loro combinazioni, e presenta un'algebra simbolica che può in seguito diventare la grammatica di centinaia di algebre differenti dotate di significati specifici". Boole portò avanti questa concezione formalista dell'Algebra, affermando che la caratteristica principale della matematica non è il suo il contenuto ma la sua forma.

Uno dei concetti più importanti del XIX secolo è la nozione di *gruppo* (un particolare tipo di struttura algebrica), la cui elaborazione è legata in maniera rilevante alla figura di Évariste Galois, il matematico francese morto tragicamente quando non aveva ancora ventuno anni.

fig. 10 - Évariste Galois (1811–1832)

Durante la notte che precedette il duello a seguito del quale perse la vita, Galois raccolse in una lettera inviata ad un amico i risultati delle sue scoperte. Lo scopo principale delle sue ricerche era stabilire in quali casi un'equazione sia risolvibile per radicali. Dimostrò un criterio legato alle proprietà del *gruppo delle permutazioni* dei coefficienti dell'equazione.

La teoria sviluppata da Galois può effettivamente fornire un metodo per determinare le radici delle equazioni, ma l'attenzione è posta principalmente sullo studio della struttura algebrica, più che sula trattazione di casi specifici. Galois non fu compreso dai matematici dei suoi tempi. Le sue idee si sono affermate solo dopo oltre un secolo dalla sua tragica fine e sono disseminate nella matematica attualmente insegnata.

Tra la fine del XIX secolo e l'inizio del secolo scorso, si rafforza l'idea che la matematica è una forma di pensiero assiomatico, in cui a partire da premesse arbitrarie si traggono conclusioni valide. I concetti fondamentali dell'algebra "moderna" vengono elaborati tra il 1920 e il 1940. Da commistioni con la topologia algebrica nasce in tale periodo una nuova disciplina, l'algebra omologica.

Nel secondo dopoguerra, nonostante lo sviluppo della matematica fosse stimolato soprattutto da problemi sorti al suo interno, si moltiplicarono le applicazioni alla fisica e alle altre scienze della natura, poiché anche nello studio delle altre scienze l'astrazione e la ricerca di schemi e di strutture era divenuto sempre più rilevante.

Nel 1934, un gruppo di matematici francesi, tra i quali André Weil e Jean Dieudonné, avviò un'opera di sistemazione dell'intera matematica, fondata sulla teoria degli insiemi; essi decisero di pubblicare i loro lavori collettivamente, utilizzando lo pseudonimo *Nicolas Bourbaki*.

"Da un punto di vista assiomatico, la matematica si presenta come un deposito di forme astratte: le strutture matematiche; ed accade cosí, senza che ne sappiamo il perché, che certi aspetti della realtà empirica si adattino a queste forme, quasi in virtú di una sorta di predisposizione" (Bourbaki, *The architecture of Mathematics*).

Weil sottolineò il ruolo centrale dell'analogia nell'investigazione matematica: cose diverse a un livello concreto possono essere interpretate come manifestazioni di una stessa cosa a un livello astratto; cogliere "gli indistinti riflessi tra una teoria e un'altra" porta al necessario tentativo di unificazione.

fig. 11 - André Weil (1906–1998)

È un momento storico nel quale la matematica riesce ad avere un impatto su altre discipline, ad interagire anche con la linguistica, la psicologia, la filosofia, le arti figurative. A Weil si ispirò l'antropologo Claude Lévi-Strauss per la sua opera *Le strutture elementari della parentela*; lo psicologo Jean Piaget, dopo un incontro con Dieudonné, pensò di utilizzare le strutture della matematica come modello di strutture psicologiche fondamentali (comuni al funzionamento di ogni mente umana).

Secondo Carlo Felice Manara (cfr. [4]), l'immaginazione, la formazione di un'immagine, interviene in tutte le costruzioni di oggetti mentali, talvolta anche limitando l'estensione teorica del concetto costruito. Si pensi alle immagini che più comunemente si associano ad un cilindro circolare retto, in confronto a quelle di un compact disc o di un segmento di capello teso, che pure sono a tutti gli effetti dei cilindri. Si pensi anche ai poligoni regolari di 17 e di 19 lati, difficilmente distinguibili se si considerano le loro immagini, ma che lo sono marcatamente in base alle loro proprietà (il primo è costruibile con riga e compasso, il secondo non lo è).

D'altra parte, la costruzione dei concetti astratti può realizzarsi proprio con la presentazione di esempi. È attraverso la presentazione di esempi che nell'insegnamento elementare vengono introdotti i numeri e gli algoritmi delle operazioni. Si potrebbe dire quindi che i numeri e le operazioni vengono acquisiti mediante un'operazione di astrazione che conduce dagli esempi particolari alla generalità del concetto.

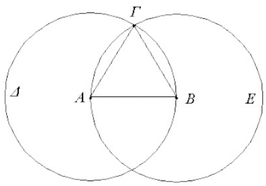
D'altra parte, non è possibile definire tutto. Non è possibile, in particolare, definire i numeri naturali mediante un sistema finito di assiomi.

"L'insieme dei numeri naturali è un insieme così complesso, così misterioso, che qualunque informazione noi riusciamo con le nostre capacità di linguaggio umano a dare sui numeri naturali non è ancora mai la descrizione esauriente della struttura dei numeri naturali" (Ennio De Giorgi).

La ragione può essere assistita dalla stimolo dell'immaginazione; a tale riguardo ci piace citare dal sito di Carlo Casolo

http://web.math.unifi.it/users/casolo/varie.html un'ode giovanile di Samuel T. Coleridge (1772–1834), inserita in una lettera al fratello, che riproduce l'argomento della prima proposizione del primo libro degli Elementi di Euclide:

"*Costruire un triangolo equilatero su un segmento dato*"



Astrazione e immaginazione si incontrano nell'opera di Italo Calvino e dello scultore Fausto Melotti. L'incontro con lo scultore stimola in Calvino l'invenzione di città "sottili come le sue sculture: città su trampoli, città ragnatela"; d'altra parte, si devono a Melotti le illustrazioni delle copertine di romanzi di Calvino per una nota collana editoriale. Il tratto comune è la leggerezza, cara a Calvino e tipica delle opere di Melotti. Fra le città-ragnatela, citiamo Ottavia, "dove la vita degli abitanti è meno incerta che in altre città. Sanno che più di tanto la rete non regge".

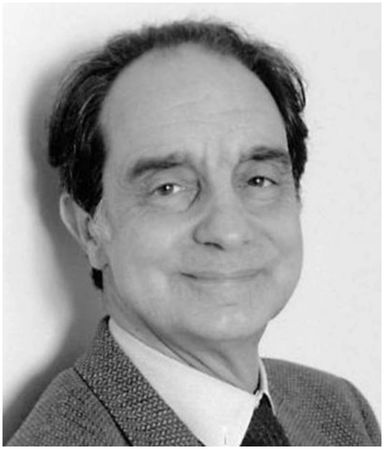


fig. 12 - Italo Calvino (1923–1985)

La leggerezza si può applicare anche ai concetti, levigandoli fino a lasciarne solo lo scheletro. Nella parte finale della raccolta di racconti *Ti con zero*, i testi non sono solo rigorosi ed astratti dal punto di vista stilistico, ma anche sul piano del contenuto, mettendo in luce la narrazione del ragionamento. "Ho cercato di far diventare racconto un mero ragionamento deduttivo", affermò Calvino stesso in un'intervista rilasciata a pochi mesi dall'uscita della raccolta (cfr. [1]).

Nella (ri)progettazione di una città o del suo centro storico, l'astrazione delle relazioni tra le parti che costituiscono le differenti spazialità porta alla formazione degli archetipi. L'astrazione prende forma, si concretizza ad esempio nel *Cretto di Gibellina* realizzato nel 1985 da Alberto Burri (1915–1995): su una distesa di cemento che ricopre le macerie del centro storico della cittadina distrutta dal terremoto, l'artista ne ricorda la pianta richiamando le strade con dei solchi. Così il *Cretto* restituisce solo i rapporti volumetrici di un centro storico che non c'è più, riportando fedelmente i pieni e i vuoti della città distrutta (si veda [3]).

Abbiamo visto come l 'astrazione possa essere declinata in tanti modi. In matematica il percorso verso l'astrazione ha condotto allo studio dell'algebra fondato sulla teoria degli insiemi e inteso come analisi delle strutture algebriche.

In questa seconda parte il nostro obiettivo è la realizzazione di una breve introduzione allo studio dell'algebra a livello universitario, sperando di agevolare una continuità di vedute con ciò che si studia nelle scuole secondarie superiori. Immagineremo di rivolgerci ad una studentessa o ad uno studente o che abbia appena concluso il proprio percorso scolastico e si affacci a quello universitario.

Abbiamo già detto che la base dell'*algebra moderna* è la *teoria degli insiemi*.

Talvolta, nei testi scolastici gli elementi di teoria degli insiemi vengono relegati ad un'appendice. Invece apprendere il linguaggio proprio della matematica, imparare simboli e notazioni, acquisire gli elementi basilari della teoria degli insiemi, è indispensabile per una comprensione matematica moderna e corretta.

Le nozioni di *ente*, *insieme* e *proprietà* non vengono definite, in quanto considerate *primitive* (cioè implicitamente acquisite) per ciascun individuo. Gli insiemi vengono indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino, mentre gli enti (o oggetti) con le lettere minuscole. La scrittura

$$A = \{x, y, z\}$$

indica che A è l'insieme costituito dagli oggetti x,y e z. Gli oggetti di un insieme possono essere elencati (eventualmente si possono usare i puntini sospensivi quando non possono essere elencati tutti gli elementi, ma da quelli indicati si può intendere senza possibilità di equivoci quali siano gli elementi non elencati) oppure possono essere individuati attraverso una proprietà. Ad esempio si può scrivere indifferentemente

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

oppure

$$A = \{\mathit{numeri\ naturali\ minori\ o\ uguali\ di\ 3}\},$$

mentre il simbolo

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

denota in maniera sufficientemente chiara l'insieme di tutti i numeri naturali. Qualunque sia il modo di assegnare un insieme (e il modo deve essere tale che sia possibile stabilire se un elemento appartenga a tale insieme oppure no), esso è individuato dagli elementi che lo costituiscono.

La teoria degli insiemi nei corsi del primo anno generalmente prescinde dalla formulazione esplicita degli assiomi (le regole del gioco) che vengono assunti; si parla allora di trattazione ingenua o naive. Collocandosi tra l'impostazione assiomatica e quella naive, quella che adotteremo qui (e nei nostri insegnamenti universitari), potremmo definirla semi-ingenua: non enunceremo tutti gli assiomi utilizzati (la scelta cadrà su alcuni di essi, per motivi di rilievo storico o contenutistico); in qualche occasione almeno avvertiremo che dietro una certa affermazione o costruzione c'è un assioma che non si sta esplicitando.

Bisognerà comunque tener presente che a seconda delle regole che si assumono, si possono costruire teorie matematiche anche alternative. I teoremi (i risultati che costituiscono una teoria) vengono dimostrati a partire dagli assiomi e dai risultati precedentemente noti, in una costruzione di concatenazioni. Se si cambiasse uno degli assiomi (una delle regole) tutto il castello crollerebbe. Tutto è opinabile! Tutto (anche i calcoli) dipendono dall'ambiente in cui ci collochiamo, altro che "la matematica non è un'opinione" .

D'altra parte, Alain Badiou, nel suo *Elogio delle matematiche* (2017), afferma che, poiché la matematica descrive il mondo che ci circonda, allora la fantasia dei matematici trova un suo argine proprio nella concretezza del mondo che li circonda. Secondo Badiou, l'espressione "la matematica non è un'opinione" è invece sensata in riferimento al fatto che le affermazioni in matematica non si basano su un presupposto di autorità; invece, nel linguaggio comune la stessa frase viene spesso usata in riferimento ad una presunta meccanicità dei processi matematici.

Nell'elencare gli oggetti di un insieme non conta l'ordine e non contano le ripetizioni. Si nasconde dietro questa affermazione un assioma: un insieme è individuato solo dagli oggetti che lo costituiscono, indipendentemente dal modo di assegnarlo; è già questa una *decisione* assunta. Gli insiemi S e T sono uguali e si scrive $S = T$ se S e T hanno gli stessi oggetti.

Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ sono proprietà, si dice che $\mathcal{P}$ implica $\mathcal{P}'$ (e si scrive $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'$) se non vi è nessun ente per cui $\mathcal{P}$ sia vera e $\mathcal{P}'$ sia falsa. Ad esempio, se $\mathcal{P}$ è la proprietà per un numero intero di essere multiplo di 6 e $\mathcal{P}'$ è la proprietà per un numero intero di essere multiplo di 2, allora $\mathcal{P}$ implica $\mathcal{P}'$ (non c' è nessun intero che sia multiplo di 6 ma non multiplo di 2), il viceversa non è vero, in quanto 4 è multiplo di 2 ma non di 6. Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ sono proprietà, si dice che $\mathcal{P}$ equivale a $\mathcal{P}'$ (e si scrive $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}'$) se $\mathcal{P}$ implica $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}'$ implica $\mathcal{P}$. Ad esempio, per un numero intero la proprietà di essere multiplo di 6 è equivalente a quella di essere multiplo sia di 2 che di 3.

L'*insieme vuoto* si denota con il simbolo $\emptyset$ e si può definire mediante una proprietà falsa (non verificata da nessun ente), per esempio dalla proprietà per un oggetto di essere diverso da sé ($x \neq x$).

L'insieme N_0 dei numeri naturali viene introdotto come conseguenza di un assioma che stabilisce l'esistenza di un insieme infinito. Che cosa significhi infinito, lo accenneremo più avanti. Dall'insieme dei numeri naturali si costruisce poi l'insieme Z dei numeri interi relativi e, a partire da Z, l'insieme Q dei numeri razionali. Un ulteriore ampliamento si ottiene con la costruzione dell'insieme R dei numeri reali. Vedremo tra poco qual è il modo formale di definire l'addizione e la moltiplicazione nell'insieme dei numeri naturali (e il concetto stesso di operazione ha una precisa formulazione). Tali operazioni vengono estese da N_0 a Z, da Z a Q, "guadagnando" in ogni ampliamento delle proprietà delle operazioni: l'esistenza dell'*opposto* in Z, l'esistenza dell'*inverso* in Q, per ogni elemento non nullo; la possibilità di estrarre le *radici quadrate* in R, per ogni elemento non negativo.

Ovviamente è possibile considerare insiemi i cui oggetti non siano numeri: l'insieme delle capitali europee, l'insieme delle lettere dell'alfabeto, l'insieme dei punti di un piano.

Si dice che S è *contenuto* in T (o anche che S è un *sottoinsieme* di T) se ogni oggetto di S appartiene a T e in tal caso si scrive $S \subseteq T$. In alternativa, possiamo descrivere questa situazione anche affermando che non c'è nessun oggetto che appartenga a S e non appartenga a T. Ad esempio, l'insieme dei numeri interi multipli di 6 è contenuto nell'insieme degli interi multipli di 2. Si ha subito che $S = T$ se e solo se $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$. Si dice che S è *contenuto propriamente* in T (e si scrive $S \subset T$)

se ogni oggetto di S appartiene a T ma c'è almeno un oggetto di T che non appartiene a S. Dunque $S \subset T$ se e solo se $S \subseteq T$ e $S \neq T$ (S è diverso da T).

Ogni insieme è contenuto in se stesso, ma ovviamente non è contenuto propriamente in se stesso. L'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme S: non esiste nessun oggetto che appartenga al primo insieme che non appartenga al secondo (il vuoto non ha oggetti!)

Mediante una proprietà $\mathcal{P}$ si può definire un sottoinsieme di un insieme A: si può infatti considerare l'insieme B degli oggetti di A che verificano $\mathcal{P}$. In questo caso si scrive

$$B = \{x \in A \mid \mathcal{P}\}$$

o anche

$$B = \{x \in A : \mathcal{P}\}$$

e si legge *B è l'insieme degli x appartenenti ad A che verificano $\mathcal{P}$.*

L'*insieme delle parti* di un insieme S è l'insieme i cui oggetti sono tutti i sottoinsiemi di S, e si denota con il simbolo $P(S)$. In particolare. l'insieme delle parti dell'insieme vuoto è $\{\emptyset\}$ (che ovviamente non è vuoto). Se S è non vuoto, $P(S)$ ha almeno due oggetti: S stesso e l'insieme vuoto. L'insieme delle parti di $\{1\}$ ha due elementi, $\emptyset$ e $\{1\}$, esattamente come l'insieme delle parti di $\{\emptyset\}$, in quanto $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. A scuola si incontra il problema di calcolare il numero di scelte possibili di k oggetti tra n (con $k \leq n$), indipendentemente dal loro ordine; tale numero coincide con il numero dei sottoinsiemi con k oggetti di un insieme con n elementi.

L'*unione* degli insiemi A e B è l'insieme degli oggetti che appartengono almeno ad uno tra A e B e si denota con $A \cup B$. Dualmente, l'*intersezione* $A \cap B$ di A e di B è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B.

Quando si risolve un sistema di equazioni, si determina l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna delle equazioni. Se una delle due equazioni non ammette soluzioni (l'insieme delle sue soluzioni è vuoto), il sistema non ammette soluzioni: l'intersezione di qualunque insieme con l'insieme vuoto è l'insieme vuoto.

Se A e B sono insiemi, l'*insieme differenza* $A \setminus B$ è formato dagli oggetti che appartengono ad A ma non appartengono a B. Se B è un sottoinsieme di A, la differenza $A \setminus B$ si chiama anche c*omplemento* di B in A.

Osserviamo che se X e Y sono sottoinsiemi di un insieme S, si ha $X \subseteq Y$ se e solo se $S \setminus Y \subseteq S \setminus X$. Infatti, se $X \subseteq Y$ e se z è un elemento di $S \setminus Y$, allora z non appartiene a Y e quindi neppure a X (poiché ogni oggetto di X appartiene a Y), sicché z appartiene a $S \setminus X$. Per l'altra inclusione: se un elemento x di X non appartenesse a Y, allora x starebbe in $S \setminus Y$ e quindi anche in $S \setminus X$, il che non è.

L'unione, l'intersezione e la differenza tra insiemi sono collegate dalle cosiddette *uguaglianze di De Morgan*: qualunque siano gli insiemi S, T e V , si ha

$$S \setminus (T \cup V) = (S \setminus T) \cap (S \setminus V) \quad \text{e} \quad S \setminus (T \cap V) = (S \setminus T) \cup (S \setminus V).$$

Per dimostrare la prima di tali uguaglianze, si consideri un qualunque elemento x di $S \setminus (T \cup V)$, sicché $x \in S$ e $x \notin (T \cup V)$; in particolare, x non appartiene né a T né a V, quindi x appartiene a $(S \setminus T)$ e a $(S \setminus V)$ e dunque a $(S \setminus T) \cap (S \setminus V)$. L'altra inclusione si prova analogamente.

Similmente, per quanto riguarda la seconda uguaglianza, sia x un qualunque elemento di $S \setminus (T \cap V)$, sicché $x \in S$ e $x \notin (T \cap V)$; in particolare, x non appartiene a T oppure x non appartiene a V, quindi x appartiene a $(S \setminus T)$ o a $(S \setminus V)$ e dunque a $(S \setminus T) \cup (S \setminus V)$. L'altra inclusione si dimostra analogamente.

Se, nel considerare degli enti x e y, vogliamo specificare l'ordine con cui li prendiamo, è necessario introdurre una nuova nozione in quanto l'insieme $\{x, y\}$ non è distinto dall'insieme $\{y, x\}$. Chiameremo allora *coppia ordinata* di prima coordinata x e seconda coordinata y l'insieme $\{\{x\},\ \{x, y\}\}$, che sarà denotato con il simbolo (x, y). Questa definizione potrebbe sembrare un po' artificiosa, ma è efficace, in quanto permette di stabilire quale tra gli elementi x e y sia stato scelto per primo.

Il prodotto cartesiano $S \times T$ degli insiemi S e T è l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate con prima coordinata in S e seconda coordinata in T. I concetti di coppia ordinata e di prodotto cartesiano vengono utilizzati per definire le fondamentali nozioni di corrispondenza tra insiemi e di funzione usando solo termini matematici. Non può andar bene affermare: una funzione è una *legge*, una corrispondenza è *qualcosa* che fa corrispondere elementi di un insieme a quelli di un altro. In qualunque modo si sia sentito parlare corrispondenze ed in particolare di funzioni, è acquisito che a partire da una corrispondenza si costruisce un *grafico*, considerando le coppie di elementi in "corrispondenza". Il problema può essere aggirato nel seguente modo. Se S e T sono insiemi non vuoti, una corrispondenza $\mathcal{R}$ tra S e T è una qualunque coppia del tipo $(S \times T, G)$, dove G è un sottoinsieme di $S \times T$; se $x \in S$ e $y \in T$, diremo che x è nella corrispondenza $\mathcal{R}$ con y (e scriveremo $x\mathcal{R}y$) se la coppia (x, y) appartiene al *grafico* G di $\mathcal{R}$. Si ritrova così il concetto di grafico come lo si conosce dalla scuola. Assegnare una corrispondenza significa fissare un *insieme di partenza* e un *insieme di arrivo* (mediante l'assegnazione del loro prodotto cartesiano) e un grafico (ripetiamolo, mediante l'assegnazione di un sottoinsieme del prodotto cartesiano dei due insiemi).

Una *funzione* f di S in T è una corrispondenza tra S e T tale che ad ogni elemento di S corrisponde uno ed un solo elemento di T. L'insieme S è detto *dominio* di f mentre T è chiamato *codominio* di f; se $x \in S$, l'unico elemento di T che corrisponda a x viene indicato con $f(x)$ e chiamato *immagine* di x mediante f. Il grafico G di f è dunque l'insieme delle coppie $\big(x, f(x)\big)$, dove x è un qualunque elemento di S. Per indicare che f è una funzione di S in T si usa il simbolo

$$f : S \longrightarrow T$$

e se vogliamo esprimere in maniera compatta qual è la posizione che definisce il grafico, scriveremo

$$f : x \in S \longmapsto f(x) \in T.$$

Ad esempio, sia $f = (R \times R, G)$, dove $G = \{(x, x^2) \mid x \in R\}$. Tale corrispondenza è una funzione perchè ad ogni numero reale corrisponde uno ed un solo numero reale; con la notazione precedente scriveremo

$$f : x \in R \longmapsto x^2 \in R.$$

Si osservi però che l'insieme G è anche grafico della corrispondenza $(C \times C, G)$, che non è una funzione in quanto ogni numero complesso non reale è privo di corrispondente. Un altro esempio: la scrittura

$$g : x \in Z \longmapsto -x \in Z$$

ci dice che g è la funzione di Z in Z che ad ogni numero intero fa corrispondere il suo opposto. Quindi il grafico di g è il sottoinsieme di $Z \times Z$ costituito dalle coppie $(x, -x)$, dove x è un qualsiasi numero intero.

Per rappresentare sul piano cartesiano i grafici di funzioni del tipo dei due esempi precedenti, ogni punto del piano viene identificato con una coppia di numeri reali: le sue coordinate. Rappresentare il grafico G di una funzione reale significa individuare sul piano cartesiano l'insieme dei punti le cui coordinate appartengono a G.

Nel primo degli esempi che abbiamo appena citato si ottiene un luogo geometrico noto: i punti che devo individuare sul piano hanno la seconda coordinata (l'ordinata, in genere denotata con y) che è il quadrato della prima; costituiscono la parabola di equazione $y = x^2$. Questa equazione ci dice appunto come l'ordinata di ciascun punto della parabola sia legata alla sua ascissa.

Nel secondo esempio, il grafico è il sottoinsieme

$$\{\ \dots, (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2), \dots\ \}$$

di $Z \times Z$ perchè, lo ripetiamo, rappresentare un grafico sul piano cartesiano significa individuare tutti i punti che hanno coordinate nel grafico stesso. Quindi non devo considerare ad esempio il punto $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, né il punto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; se prendo tutti i punti con coordinate del tipo $(x, -x)$, facendo variare x in R, disegno infatti la retta di equazione $y = -x$, che è il grafico della funzione

$$f : x \in R \longmapsto -x \in R.$$

Una funzione $f : S \longrightarrow T$ si dice *iniettiva* se ad elementi distinti di S corrispondono elementi distinti di T, cioè se da $f(x) = f(y)$ segue $x = y$.

Ad esempio, la funzione $f : N_0 \longrightarrow N_0$, definita ponendo $f(x) = x + 1$ per ogni $x \in N_0$, è iniettiva. Invece, se $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{a, b, c\}$, la funzione $g : S \longrightarrow T$, definita ponendo $g(1) = a$, $g(2) = a$, $g(3) = c$, il cui grafico quindi è l'insieme $G = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$, non è iniettiva.

Una funzione $f : S \longrightarrow T$ si dice *suriettiva* se per ogni elemento y di T esiste un elemento x di S tale che $f(x) = y$, cioè se ogni elemento di T compare come seconda coordinata di qualche coppia nel grafico di f. Se X è un sottoinsieme del dominio di una funzione $f : S \longrightarrow T$, l'immagine $f(X)$ di X mediante f è l'insieme degli elementi di T che sono immagine di qualche elemento di X. In paricolare, f è suriettiva se e solo se $f(S) = T$.

Una funzione $f : S \longrightarrow T$ si dice *biettiva* se è sia iniettiva che suriettiva. Qualunque sia l'insieme non vuoto S, la funzione di S in sé che fa corrispondere ad ogni elemento se stesso è ovviamente biettiva; tale funzione viene chiamata *funzione identica* di S e denotata con il simbolo i_S. Un esempio meno banale di funzione biettiva è fornito dalla funzione f che ad ogni $x \in N_0$ fa corrispondere $x + 1 \in N = \{n \in N_0 \mid n \geq 1\}$; in realtà f ha lo stesso grafico di una funzione (iniettiva ma non suriettiva) considerata poco prima, ma in questo caso la suriettività (e quindi la biettività) è garantita dall'aver sostituito il codominio con l'insieme delle immagini di oggetti del dominio.

Le funzioni biettive hanno un'importante proprietà: esse sono invertibili. A scuola si studiano le "funzioni trigonometriche inverse", la "funzione logaritmo" e la sua inversa, la "funzione esponenziale". Precisiamo quindi la nozione di inversa di una funzione biettiva. Occorre innanzitutto definire la composta di due funzioni. Se

$$f : S \to T \quad e \quad g : T \to V$$

sono funzioni tali che il dominio di g coincida con il codominio di f, di chiama *composta* di f e di g la funzione

$$g \circ f : x \in S \to g\big(f(x)\big) \in V.$$

È opportuno sottolineare che la possibilità di comporre due funzioni sussiste soltanto quando il codominio della prima coincide con il dominio della seconda. Ad esempio, se

$$f : x \in R \longmapsto x + 1 \in R \quad e \quad g : x \in R \longmapsto x^3 \in R,$$

allora si può considerare la funzione composta

$$g \circ f : x \in R \longmapsto (x + 1)^3 \in R.$$

Si osservi che, in questo esempio, le funzioni f e g si possono comporre anche nell'ordine opposto e si ha

$$f \circ g : x \in R \longmapsto x^3 + 1 \in R,$$

per cui $g \circ f \neq f \circ g$. Pertanto la composizione di funzioni (anche quando possibile nei due versi) non è in generale commutativa. Nello studio di una funzione è spesso utile riconoscere che essa si può ottenere come composta di altre funzioni, di cui risulti più facile analizzare le proprietà.

Se S e T sono insiemi non vuoti, una funzione $f : S \longrightarrow T$ si dice *invertibile* se esiste un'altra funzione $g : T \longrightarrow S$ tale che $g \circ f = i_S$ e $f \circ g = i_T$. Si dimostra che una funzione $f : S \longrightarrow T$ è invertibile se e solo se è biettiva ed in tal caso c'è un'unica funzione che l'inverte: è la funzione di T in S che associa ad ogni elemento y di T l'unico elemento di S di cui y è immagine mediante f. Tale funzione viene chiamata *inversa* di f e denotata con il simbolo f^{-1}. È allora chiaro che il grafico di f^{-1} è l'insieme

$$\{(f(x), x) \mid x \in S\}.$$

Siano S e T insiemi non vuoti. Si dice che S è *equipotente* a T se esiste una funzione biettiva di S in T. In tal caso c'è anche una funzione biettiva di T in S (l'inversa di f), e quindi anche T è equipotente a S. Banalmente ogni insieme non vuoto è equipotente a se stesso.

Gli insiemi distinti $S = \{a, b, c\}$ e $T = \{e, f, g\}$ sono equipotenti, e ciascuno di essi è anche equipotente a $\{1, 2, 3\}$, e ad ogni insieme contenente esattamente 3 oggetti. D'altra parte, il numero degli oggetti di T è maggiore di quello di $X = \{a, b\}$; in questo caso esiste una funzione iniettiva di X in T, ma non esiste alcuna funzione suriettiva di X su T. In questo modo abbiamo di fatto confrontato gli insiemi S, T e X contando i loro oggetti.

fig. 13 - Equipotenza tra insiemi

Questo confronto tra insiemi mediante le funzioni può essere esteso agli insiemi infiniti. Un insieme non vuoto si dice i*nfinito* se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Ad esempio, si è già notato che gli insiemi N_0 e N sono equipotenti, per cui N_0 è infinito (nel senso formale della definizione).

Siano S e T insiemi non vuoti. Si dice che S ha *potenza minore o uguale* a T se esiste una funzione iniettiva di S in T; se la potenza di S è minore o uguale a quella di T e in più S e T non sono equipotenti, si dice che che S ha *potenza strettamente minore* di T. Si può allora dimostrare che S ha potenza strettamente minore di T se e solo se esiste una funzione iniettiva di S in T ma non esiste alcuna funzione suriettiva di S su T (teorema di Cantor-Bernstein).

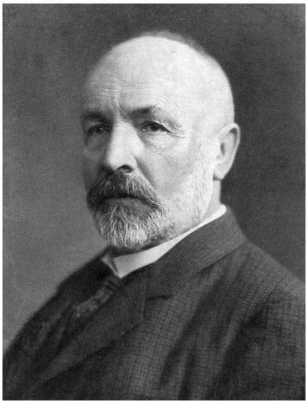


fig. 14 - Georg Cantor (1845–1918)

Un altro importante teorema dovuto a Cantor assicura che ogni insieme non vuoto S ha sempre potenza strettamente minore del suo insieme delle parti $P(S)$. Questo risultato ci permette di considerare insiemi di potenza sempre più grande. Ad esempio, partendo dall'insieme dei numeri naturali si ottiene una *gerarchia illimitata* di insiemi infiniti: $N_0, P(N_0), P\big(P(N_0)\big)$, $P\big(P\big(P(N_0)\big)\big), \dots$

Se S è un insieme non vuoto, una corrispondenza tra S e S si chiama anche *relazione* in S. Una relazione $\mathcal{R}$ in S si dice di *equivalenza* se verifica le seguenti condizioni:

- $x\mathcal{R}x$ qualunque sia l'elemento x di S ($\mathcal{R}$ è *riflessiva*);
- se x e y sono elementi di S e $x\mathcal{R}y$, allora $y\mathcal{R}x$ ($\mathcal{R}$ è *simmetrica*);
- se x, y, z sono elementi di S tali che $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, allora $x\mathcal{R}z$ ($\mathcal{R}$ è *transitiva*).

Se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in S, la *classe di equivalenza* di un elemento $x \in S$ è l'insieme di tutti gli oggetti y di S tali che $x\mathcal{R}y$.

Ad esempio, si consideri in Z la relazione $\mathcal{R} = (Z \times Z, G)$, dove G è l'insieme delle coppie (x, y) di numeri interi tali che $x - y$ sia un numero pari (cioè un multiplo di 2); si può verificare facilmente che $\mathcal{R}$ è riflessiva, simmetrica e transitiva, e quindi è una relazione di equivalenza. La relazione $\mathcal{R}$ determina esattamente due classi di equivalenza: la classe di 0, che contiene tutti i numeri interi pari, e quella di 1, che contiene tutti i numeri interi dispari (cioè della forma $2q + 1$, con $q \in Z$).

Se S è un insieme non vuoto, una relazione binaria $\mathcal{R}$ in S si dice di *ordine* se verifica le seguenti condizioni:

- $x\mathcal{R}x$ qualunque sia l'elemento x di S ($\mathcal{R}$ è *riflessiva*);
- se x e y sono elementi di S tali che $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$,allora $x = y$ ($\mathcal{R}$ è *asimmetrica*);
- se x, y, z sono elementi di S tali che $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, allora $x\mathcal{R}z$ ($\mathcal{R}$ è *transitiva*).

Si dice invece che $\mathcal{R}$ è una relazione di *ordine stretto* se è *transitiva* e *antiriflessiva* (cioè se ogni elemento di S non è in relazione con se stesso) .

Un importante esempio di relazione d'ordine si ottiene considerando, nell'insieme $P(S)$ delle parti di un insieme S, la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo $X\mathcal{R}Y$ se X e Y sono sottoinsiemi di S e $X \subseteq Y$ (cioè assegnando come grafico l'insieme delle coppie (X, Y) di sottoinsiemi di S tali che X sia contenuto in Y). Tale relazione è riflessiva ($X \subseteq X$, per ogni $X \in P(S)$), è asimmetrica (se X e Y sono sottoinisiemi di S tali che $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, allora $X = Y$), è transitiva (se X,Y e Z sono sottoinsiemi di S tali che $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, allora $X \subseteq Z$). Se invece in $P(S)$ poniamo $X\mathcal{R}'Y$ se $X \subset Y \subset S$, allora definiamo una relazione di ordine stretto $\mathcal{R}'$.

Usualmente una qualunque relazione d'ordine viene denotata con il simbolo $\leq$, mentre il simbolo $<$ si utilizza per denotare una generica relazione di ordine stretto. Considerare un insieme S munito di una relazione di ordine $\leq$, significa sostanzialmente prendere in esame la coppia $(S, \leq)$, che prende il nome di *insieme ordinato*; in questo caso si dice anche che S è *ordinato* mediante $\leq$.

Negli insiemi ordinati si introducono le nozioni di minimo, massimo, minorante, maggiorante, sottoinsieme limitato, estremo inferiore ed estremo superiore; è utile focalizzare bene tali nozioni, in particolare per comprendere diverse questioni che riguardano le funzioni reali e che sono utili per lo studio dell'analisi matematica.

Sia $(S, \leq)$ un insieme ordinato e sia X un sottoinsieme non vuoto di S. Un elemento $a \in X$ si dice *minimo* di X se $a \leq x$ per ogni $x \in X$. Se X ha minimo, questo è unico; nfatti, se a e a' sono entrambi minimi di X, si ha $a \leq a'$ e $a' \leq a$, e quindi $a = a'$ per la proprietà asimmetrica. Ad esempio, nell'insieme ordinato $\big(P(S), \subseteq\big)$, l'intero insieme $P(S)$ ha minimo, e questo è l'insieme vuoto. D'altra parte, se $S = \{1, 2, 3\}$, allora

$$P(S) = \big\{\emptyset, S, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\big\}$$

e il suo sottoinsieme $\big\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\big\}$ non ha minimo, poiché $\{1, 3\}$ non è contenuto in $\{2, 3\}$ e $\{2, 3\}$ non è contenuto in $\{1, 3\}$.

Dualmente, un elemento b di X si dice *massimo* di X se $x \leq b$, per ogni $x \in X$. Come nel caso del minimo, se X ha massimo, questo è unico. Negli esempi precedenti, S è il massimo dell'insieme $P(S)$ ordinato mediante l'inclusione, mentre se $S = \{1, 2, 3\}$, il sottoinsieme $\big\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\big\}$ di $P(S)$ non ha massimo.

Un elemento y di S si dice un *minorante* di X in S se $y \leq x$ per ogni $x \in X$; il sottoinsieme X si dice *inferiormente limitato* in S se ha minoranti in S. Se X è inferiormente limitato in S, l'eventuale massimo dell'insieme dei minoranti di X in S è chiamato *estremo inferiore* di X in S. Ovviamente, se X ha minimo, questo è anche il suo estremo inferiore.

Dualmente, un elemento z di S si dice un *maggiorante* di X in S se $x \leq z$ per ogni $x \in X$, e X si dice *superiormente limitato* in S se ha maggioranti in S. Se X è superiormente limitato, l'eventuale minimo dell'insieme dei maggioranti di X in S prende il nome di *estremo superiore* di X in S. Come prima, se X ha massimo, questo è il suo estremo superiore.

Fin qui abbiamo considerato insiemi e funzioni tra insiemi. Se negli insiemi sono definite delle relazioni di ordine, ci si chiede come una funzione tra di essi si comporti rispetto a tali relazioni, se *conservi* l'ordine tra elementi del dominio quando si passa alle loro immagini; se questo avviene, diremo che la funzione è crescente. Più precisamente, se $(S, \leq)$ e $(S', \leq')$ sono insiemi ordinati, una funzione $f : S \longrightarrow T$ si dice *crescente* se da $x \leq y$ in S segue $f(x) \leq f(y)$ in S', mentre si dice che f è *strettamente crescente* se da $x < y$ segue $f(x) < f(y)$. Si dice poi che f è *decrescente* se da $x \leq y$ segue $f(x) \geq f(y)$, e che f è *strettamente decrescente* se risulta $f(x) > f(y)$ ogni volta che $x < y$.

Un insieme ordinato $(S, \leq)$ si dice *naturalmente ordinato* se ogni sua parte non vuota è dotata di minimo e, se superiormente limitata, anche di massimo. Si può dimostrare che esiste un insieme naturalmente ordinato e privo di massimo, e che tra due insiemi di questo tipo c'è sempre un'unica funzione biettiva e crescente, sicché essi sono equipotenti e hanno lo stesso comportamento rispetto all'ordine. Fondamentale in questo ambito è stato il contributo dell'italiano Giuseppe Peano (1858–1932). È in base a questo risultato che è possibile introdurre l'insieme N_0 dei *numeri naturali* come un qualunque insieme naturalmente ordinato e privo di massimo, ed assumerlo come modello per lo studio degli insiemi ordinati con tale proprietà. Fissato in questo modo N_0, il simbolo 0 denoterà il suo minimo, 1 il *successivo* di 0, cioè il minimo del sottoinsieme di N_0 costituito dagli elementi maggiori di 0, 2 il successivo di 1 e così via.

Nell'insieme N dei numeri naturali diversi da 0, è possibile introdurre un'altra interessante relazione d'ordine (diversa da quella usuale), ponendo $a \leq b$ se a e b sono elementi di N ed esiste $c \in N$ tale che $b = ac$, cioè se a divide b. Ad esempio, se abbiamo ordinato N mediante la divisibilità, il suo sottoinsieme $X = \{2, 6, 8\}$ ha come minimo 2 (che è anche il suo minimo rispetto alla relazione d'ordine usuale), ma non ha massimo. È facile rendersi conto che il minimo, rispetto alla divisibilità, tra i maggioranti di X in N, cioè l'estremo superiore di X, è il *minimo comune multiplo* dei numeri in X, ovvero 24.

Sulle proprietà della divisibilità tra numeri interi torneremo più avanti.

Se S è un insieme non vuoto, un'*operazione* in S è una funzione

$$\diamond : S \times S \longrightarrow S.$$

L'immagine di una coppia di elementi $(x, y) \in S \times S$ mediante $\diamond$ viene denotata con il simbolo $x \diamond y$ (ed è il *composto* di x e y mediante $\diamond$). L'operazione $\diamond$ è *commutativa* se $x \diamond y = y \diamond x$ qualunque siano gli oggetti x e y di S, mentre è *associativa* se risulta $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$ per tutti gli elementi x, y, z di S. Come esempio di operazione sia commutativa che associativa si può considerare, per un qualunque insieme S, la funzione

$$\cap : (X, Y) \in P(S) \times P(S) \longmapsto X \cap Y \in P(S).$$

Sia $\diamond$ un'operazione in un insieme non vuoto S. Si dice che un elemento $u \in S$ è *neutro* rispetto a $\diamond$ se

$$x \diamond u = x = u \diamond x$$

per ogni $x \in S$. Supponiamo che u e u' siano elementi in S con questa proprietà; allora risulta $u = u \diamond u' = u'$, e quindi l'elemento neutro, se esiste, è unico.

Supponiamo $\diamond$ associativa ed esista in S l'elemento neutro u rispetto a $\diamond$. Un elemento x di S si dice *invertibile* (rispetto a $\diamond$) se esiste $x' \in S$ tale che

$$x \diamond x' = x' \diamond x = u;$$

in questo caso, l'elemento x' è unico perchè, se x'' è un qualunque elemento di S con la stessa proprietà, si ha

$$x' = x' \diamond u = x' \diamond (x \diamond x'') = (x' \diamond x) \diamond x'' = u \diamond x'' = x''.$$

L'elemento x' viene detto *inverso* di x (rispetto a $\diamond$). In questa situazione, se per l'operazione si usa il simbolo $\cdot$ anzichè $\diamond$, l'inverso di x si denota col simbolo x^{-1}; analogamente, se $\diamond$ è sostituito dal simbolo $+$, l'inverso di x si denota con $-x$ ed è chiamato *opposto* di x.

Se X è un insieme non vuoto e $\mathcal{A}$ è l'insieme delle funzioni di X in sé, l'operazione

$$\circ : (f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longmapsto g \circ f \in \mathcal{A}$$

non è commutativa (a meno che X non sia costituito da un solo elemento), ma si può facilmente verificare che è associativa.Inoltre la funzione identica di X è elemento neutro in $\mathcal{A}$ rispetto a $\circ$ in quanto, se x è un qualunque elemento di X e $f \in \mathcal{A}$, si ha

$$(i_X \circ f)(x) = i_X\big(f(x)\big) = f(x) \quad \text{e} \quad (f \circ i_X)(x) = f\big(i_X(x)\big) = f(x).$$

Gli elementi di $\mathcal{A}$ invertibili rispetto a $\circ$ coincidono con le funzioni biettive di X in sé, cioè con le *permutazioni* di X. Se allora denotiamo con S_X l'insieme delle permutazioni di X e restringiamo l'operazione $\circ$ a $S_X \times S_X$, otteniamo un'operazione associativa in S_X, rispetto alla quale S_X è dotato di elemento neutro ed ogni elemento di S_X è invertibile. Queste sono esattamente le proprietà che definiscono un gruppo: un *gruppo* è un insieme in cui sia definita un'operazione associativa e dotata di elemento neutro, rispetto alla quale ogni elemento sia invertibile. Quindi l'insieme S_X è un gruppo rispetto a $\circ$, chiamato *gruppo simmetrico* su X. Si osservi che il gruppo S_X è *abeliano* (cioè l'operazione in S_X è commutativa) soltanto se X è costituito da al più due elementi.

Un *isomorfismo* tra gruppi è una funzione biettiva che *conservi le operazioni*, cioè tale che l'immagine del composto di due elementi coincida con il composto delle loro immagini. In tal caso i due gruppi possono essere portati a *combaciare*. Prescindendo dai nomi assegnati ai loro oggetti, i due gruppi diventano *indistinguibili*; conta solo la loro *potenza* (la quantità degli oggetti che li costituiscono) e il modo in cui si compongono gli oggetti.

L'operazione di addizione $+$ nell'insieme N_0 dei numeri naturali si può definire nel seguente modo. Qualunque sia il numero naturale k, il sottoinsieme N_k di N_0 costituito dai mumeri naturali $n \geq k$ è naturalmente ordinato e privo di massimo (rispetto alla relazione d'ordine usuale), e quindi esiste un'unica funzione biettiva e crescente di N_0 in N_k, che chiameremo t_k. Ad esempio, per $k = 1$, la funzione t_1 è quella che porta 0 in 1, 1 in 2, e in generale ogni numero naturale n nel suo successivo. Queste funzioni vengono usate per definire l'addizione in N_0: la *somma* di due numeri naturali m ed n è per definizione il numero naturale $m + n = t_n(m)$. In particolare, $m + 1 = t_1(m)$ è proprio il successivo di m.

Questa definizione è la formalizzazione di quanto si fa nella scuola primaria, quando si eseguono le addizioni *facendo i salti sulla linea dei numeri*.

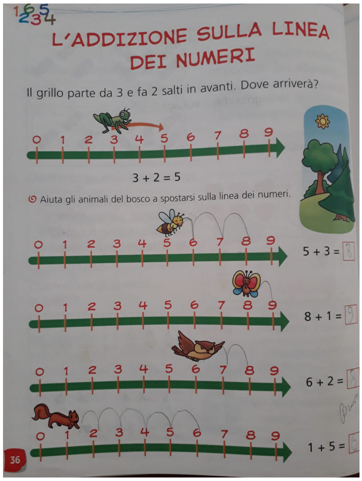


fig. 15 - L'addizione

fig. 16 - L'addizione e l'unione di insiemi

È opportuno osservare che, se S è un insieme con m oggetti, T è un insieme con n oggetti e $S \cap T = \emptyset$, allora l'insieme $S \cup T$ ha esattamente $m + n$ oggetti. Allora la somma di due numeri naturali può essere utilizzata per rappresentare la quantità di oggetti che si trovano nell'unione di due insiemi disgiunti.

Siano m ed n numeri naturali tali che $m \geq n$. Esiste allora un unico numero naturale k tale che $t_n(k) = m$, perché m appartiene a N_n e t_n è la funzione biettiva; il numero naturale k si chiama *differenza* di m e n e si denota con il simbolo $m - n$. Poichè $n + k = m$, si ha $n + (m - n) = m$.

Se m ed n sono numeri naturali tali che $m \geq n$, S è un insieme con m oggetti e X è un sottoinsieme di S con n oggetti, la differenza $m - n$ è il numero degli oggetti che si trovano nel complemento $S \setminus X$ di X in S.

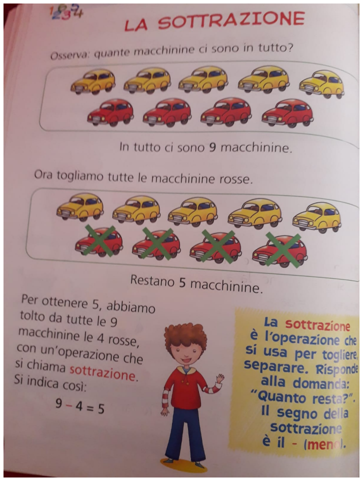


fig. 17 - La sottrazione

Il seguente risultato è un importante strumento molto usato in matematica, in particolare per dimostrare proprietà dei numeri naturali.

Principio di induzione *Sia X un insieme non vuoto di numeri naturali con minimo m. Se, per ogni n in X, anche $n+1$ appartiene a X, allora ad X appartiene ogni numero naturale maggiore o uguale ad m, cioè $X = N_m$.*

Come esempio per illustrare la rilevanza del principio di induzione proviamo, utilizzandolo, la seguente uguaglianza che permette il calcolo immediato della somma dei primi n numeri interi positivi, qualunque sia $n \in N$:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Occorre evidentemente provare che l'insieme X, costituito dai numeri naturali n per i quali tale uguaglianza è vera, coincide con N. Certamente X contiene il minimo 1 di $N = N_1$ (questo passo di verifica per il minimo si chiama *base dell'induzione*). Il secondo passo riguarda la verifica che se un certo numero naturale n appartiene a X (cioè se l'uguaglianza è vera per n), anche $n + 1$ appartiene a X (cioè l'uguaglianza da provare è vera per anche per $n + 1$). Questo significa che stiamo supponendo

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(la cosiddetta *ipotesi induttiva*) e dobbiamo provare che l'analoga uguaglianza sussiste anche quando sostituiamo n con $n + 1$. Infatti si ha

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = (1 + 2 + ... + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

il che conclude la dimostrazione.

Il principio di induzione può anche essere usato efficacemente per dare delle definizioni: si parte dal minimo da definire, si dà la *ricetta* su come passare dal caso di un numero naturale a quello del suo successivo, e questo basta per completare la definizione.

Anche l'operazione di moltiplicazione $\cdot$ in N_0 si definisce usando il principio di induzione. Si pone infatti $m \cdot 0 = 0$ per ogni numero naturale m, e supposto di aver definito il prodotto $m \cdot n$, si pone $m \cdot (n+1) \cdot n = m \cdot n + m$. In questo modo il prodotto risulta definito per ogni coppia di naturali. È facile verificare che in N_0 la moltiplicazione è *distributiva* rispetto all'addizione, cioè che risulta $(m+n)r = mr + nr$ qualunque siano i numeri naturali m, n, r.

Abbiamo già menzionato che a partire da N_0 si costruisce l'insieme Z dei numeri interi relativi, mediante un procedimento che viene detto di *simmetrizzazione*. Si definisce nell'insieme $N_0 \times N_0$ delle coppie di numeri naturali una opportuna relazione di equivalenza, e i numeri interi non sono altro che le classi di equivalenza rispetto a tale relazione; in particolare, i numeri naturali possono essere identificati con le classi di equivalenza di coppie del tipo (a, b) con $a \geq b$, mentre i numeri negativi sono le classi di equivalenza delle coppie (a, b) con $a < b$.

All'insieme Z si estendono la relazione di ordine e le operazioni di addizione e moltiplicazione definite in N_0. Rispetto all'addizione ogni numero intero x è dotato di opposto $-x$, e la *sottrazione* – si può definire in Z ponendo $x - y = x + (-y)$ qualunque siano i numeri interi x e y. Gli unici numeri interi dotati di inverso rispetto alla moltiplicazione sono 1 e -1; per guadagnare gli inversi degli altri elementi non nulli occorre ampliare Z costruendo l'insieme Q dei numeri razionali. Ogni numero razionale si può rappresentare come una *frazione* $\frac{a}{b}$, con a e b interi e $b \neq 0$. Formalmente le frazioni sono classi rispetto alla relazione di equivalenza $\mathcal{R}$, definita nell'insieme $Z \times \big(Z \setminus \{0\}\big)$ ponendo $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ se e solo se $ad = bc$, il che assicura che $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

se e solo se $ad = bc$. Le operazioni e la relazione di ordine in Q sono definite a partire da quelle in Z, ponendo

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

e $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ se e solo se $ad \leq cb$.

Le operazioni in Q sono commutative e associative, e Q è dotato di elemento neutro rispetto a ciascuna di esse; inoltre ogni numero razionale ha opposto rispetto all'addizione e, se non nullo, inverso rispetto alla moltiplicazione. La moltiplicazione in Q è distributiva rispetto all'addizione e, se x e y sono numeri razionali tali che $x \leq y$ si ha $x + z \leq y + z$ per ogni $z \in Q$ e $xz \leq yz$ se $z \geq 0$. Conseguentemente, con tali operazioni e tale ordinamento, Q è quello che si chiama un *campo ordinato*.

In Q vale la *legge di cancellazione* rispetto alla moltiplicazione, cioè da $xy = xz$ e $x \neq 0$ segue $y = z$; si può infatti moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza per l'inverso di x, e quindi cancellare x. Questa proprietà è vera anche in Z, pur non sussistendo l'invertibilità degli elementi non nulli e ciò dipende dalla cosiddetta *legge di annullamento del prodotto*: in conseguenza della sua definizione, un prodotto di due interi è nullo se e solo se tale è uno dei fattori. Di conseguenza, se $ab = ac$, con a, b, c in Z e $a \neq 0$, si ha $0 = ab - ac = a(b - c)$, per cui $b - c = 0$ e $b = c$.

In Z vale il seguente rilevante teorema riguardante la divisibilità.

Algoritmo della divisione euclidea *Se m e n sono numeri interi e $n \neq 0$, esistono e sono unici dei numeri interi q ed r tali che $m = nq + r$ e $0 \leq r < |n|$.*

Nell'enunciato precedente $|n|$ denota il *valore assoluto* di n, cioè il massimo dell'insieme $\{n, -n\}$; gli interi q ed r sono chiamati rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di m per n.

I resti possibili della divisione di un numero intero per 2 sono 0 e 1; hanno resto 0 gli interi del tipo $2q$, hanno resto 1 gli interi del tipo $2q + 1$. Se si esegue la divisione di un qualunque intero m per 3, i resti possibili sono 0, 1 e 2; nel primo caso m è un intero del tipo $3q$, nel secondo del tipo $3q + 1$, nel terzo del tipo $3q + 2$. Ogni intero appartiene ad uno (e ad uno soltanto) dei sottoinsiemi cosí individuati.

Se nella divisione di m per n il resto è nullo, si ha $m = nq$, dove q è il quoziente della divisione; in tal caso si dice che n è un *divisore* di m o anche che m è un *multiplo* di n. Un numero intero m ha tra i suoi divisori almeno $1, -1, m, -m$, che si chiamano *divisori banali*. Un numero intero diverso da 0, da 1 e da -1 si dice *primo* se i suoi unici divisori sono quelli banali. I numeri primi sono i mattoni su cui è costruita l'aritmetica, come mostra il seguente importante risultato.

Teorema fondamentale dell'aritmetica *Un qualunque numero intero diverso da 0, da 1 e da -1 è primo oppure prodotto di numeri primi, e tale decomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori e del loro segno.*

Su questo risultato si basa il procedimento per la determinazione di un massimo comune divisore e di un minimo comune multiplo di due numeri interi non nulli, che già si insegna nella scuola secondaria inferiore. Si ricordi che, se a e b sono numeri interi non nulli, un *massimo comune divisore* di a e b è un numero intero che divida sia a che b ed è diviso da ogni loro divisore comune, mentre un *minimo comune multiplo* di a e b è un multiplo sia di a che di b e divida ogni loro multiplo comune.

Il teorema fondamentale dell'aritmetica ha come conseguenza che è possibile decomporre i numeri interi non nulli a e b nel prodotto di potenze di numeri primi; per esprimersi in maniera più compatta, si può scegliere di far comparire in queste decomposizioni potenze degli stessi numeri primi, eventualmente con esponente nullo. Ad esempio, se si considerano i numeri 75 e 36, si ottengono le decomposizioni $75 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$. Il numero $2^0 \cdot 3 \cdot 5^0$ è allora un massimo comune divisore di 75 e 36, perché divide tali numeri ed è diviso da ogni loro divisore comune; similmente $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ è un minimo comune multiplo di 75 e 36, perchè è un multiplo dei due numeri e divide ogni loro multiplo comune. Nel caso generale, se $a = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{m_t}$ e $b = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{n_t}$, con $p_1, \ldots, p_t$ numeri primi, ci si rende conto facilmente che un massimo comune divisore di a e b si ottiene considerando il prodotto $p_1^{u_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{u_t}$, dove u_i è il minimo tra m_i e n_i per ogni $i = 1, \ldots, t$, mentre un minimo comune multiplo di a e b è fornito dal prodotto $p_1^{v_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{v_t}$, dove v_i è il massimo tra m_i e n_i per ogni $i = 1, \ldots, t$.

Quanti sono i massimi comuni divisori e i minimi comuni multipli di una coppia di numeri interi non nulli? Evidentemente 3 non è il solo massimo comune divisore di 36 e 75, in quanto anche -3 ha la proprietà di dividere entrambi i numeri considerati e di essere diviso da ogni loro divisore comune. In generale, per ogni coppia di interi non nulli, individuiamo almeno due massimi comuni divisori di a e b, perchè se d è un loro massimo comune divisore, anche $-d$ lo è. Osserviamo che non possono essercene altri. Infatti, se d' è un qualunque massimo comune divisore di a e b, si ha che d divide d' e d' divide d, per cui $d = d'c$ e $d' = dc'$ con c e c' in Z; allora $d = d(c'c)$, sicchè $c'c = 1$, da cui segue $c = c' = 1$ oppure $c = c' = -1$ e quindi $d' = d$ oppure $d' = -d$.

È interessante vedere come, utilizzando argomenti elementari di aritmetica in Z, si possa provare che:

Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia 2.
Si supponga infatti per assurdo che esista $m/n \in Q$ tale che $(m/n)^2 = 2$. È possibile assumere che m e n siano coprimi (dividendo numeratore e denominatore per eventuali fattori primi comuni). Poichè $m^2 = 2n^2$, si ha che m^2 è pari e quindi anche m deve essere pari, cioè $m = 2k$, con k intero; allora $4k^2 = 2n^2$, per cui $n^2 = 2k^2$, e di conseguenza n^2 è pari. Pertanto n è pari, il che è una contraddizione, in quanto m e n sono coprimi.

Da questo risultato segue che l'insieme costituito da tutti i numerali razionali positivi x tali che $x^2 < 2$, pur essendo ovviamente dotato di maggioranti in Q, non ha estremo superiore in Q. Per superare questo ostacolo, a partire da Q si costruisce l'insieme R dei numeri reali, a cui si estendono le operazioni e la relazione di ordine di Q con tutte le loro caratteristiche, ma con una proprietà aggiuntiva: è un insieme ordinato *completo*, cioè ogni suo sottoinsieme limitato inferiormente è dotato di estremo inferiore e ogni suo sottoinsieme limitato superiormente è dotato di estremo superiore. A questo punto, usando la completezza di R, è possibile dimostrare che

per ogni numero reale positivo y e per ogni numero intero positivo n, esiste un unico numero reale positivo x tale che $x^n = y$.

Tale numero reale x si chiama *radice n-sima* di y; in particolare la *radice quadrata* di y è l'unico numero reale positivo il cui quadrato è y. Quindi l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in Q, mentre ha soluzioni in R.

Quando si affronta lo studio di un'equazione, occorre tenere ben presente a quale insieme appartengono i coefficienti e in quale insieme si stanno cercando le soluzioni. Ad esempio, l'equazione $x^2 = 4$ ha una sola soluzione in N_0 ma ne ha due in Z, l'equazione $x + 2 = 1$ non ha soluzioni in N_0 ma ha una soluzione in Z, $3x = 1$ non ha soluzioni in Z ma ha una soluzione in Q.

Più in generale, in Q o in R l'equazione $ax = b$, con $a \neq 0$, si risolve moltiplicando entrambi i membri per l'inverso di a, ricavando $x = a^{-1}b$. Anche quando si risolve un'equazione a coefficienti interi della forma $x + a = b$, usiamo le proprietà dell'operazione; infatti possiamo sommare ad entrambi i membri l'opposto di a, ottenendo $x + a + (-a) = b + (-a)$ e quindi $x = b - a$.

Il *grado* di un polinomio non nullo $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ è il massimo indice i tale che $a_i \neq 0$. I numeri reali $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono chiamati *coefficienti* del polinomio. I polinomi di grado 0 sono detti *costanti*. Assumiamo qui noti dalla scuola secondaria i procedimenti per sommare e moltiplicare due polinomi a coefficienti reali., cioè l'introduzione delle operazioni usuali nell'insieme $R[x]$ dei polinomi (in una indeterminata) a coefficienti reali.

Le operazioni in $R[x]$ godono delle stesse proprietà delle operazioni in Z. I numeri interi con l'addizione e la moltiplicazione e gli elementi di $R[x]$ con la somma e il prodotto costituiscono lo stesso tipo di struttura algebrica. È per questo motivo che ci sussistono importanti analogie tra i risultati sui numeri interi e quelli sui polinomi: decomposizione, algoritmo della divisione, massimo comune divisore e minimo comune multiplo ...

Ad esempio, la divisione tra polinomi poggia sul seguente risultato.

Siano f e g elementi di $R[x]$, con $g \neq 0$. Allora esistono e sono unici dei polinomi q ed r a coefficienti reali tali che $f = gq + r$, dove $r = 0$ oppure il grado di r è minore del grado di g.

I polinomi q ed r così ottenuti vengono chiamati rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di f per g. La dimostrazione di tale teorema fornisce di fatto un procedimento concreto per la determinazione del quoziente e del resto in una divisione tra polinomi. Dall'enunciato appare evidente come il ruolo svolto dal valore assoluto nella divisione tra numeri interi sia assunto, nella divisione tra polinomi, dal grado.

Se $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ è un polinomio a coefficienti in R, un numero reale c si dice *radice* di f se risulta

$$f(c) = a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0.$$

Le radici di un polinomio sono caratterizzate dal seguente importante risultato dovuto a Paolo Ruffini (1765–1822).

Teorema. *Un numero reale c è radice di un polinomio $f \in R[x]$ di grado positivo se e solo se f è divisibile per il polinomio $x - c$ (cioè se e solo se il resto della divisione di f per $x - c$ è 0).*

Al fine di provare il teorema di Ruffini, siano q ed r il quoziente ed il resto della divisione di f per $x - c$. Allora $f = (x-c)q + r$, e r è nullo oppure ha grado 0 (cioè r è un polinomio *costante*). Poichè risulta

$$f(c) = (c - c)q(c) + r = r,$$

si ha che c è radice di f, ovvero che $f(c) = 0$, se e solo se $r = 0$, il che prova l'enunciato.

Il teorema di Ruffini assicura che, se si riesce a determinare una radice di un polinomio f di grado $n > 0$, allora f può essere decomposto nel prodotto di polinomi di grado minore di n, il che ovviamente ne semplifica lo studio. In particolare, se f ha grado 2 ed è stata individuata una sua radice, è possibile decomporre f nel prodotto di due polinomi di grado 1. Quando, come in questo caso, un polinomio f è prodotto di polinomi di primo grado, lo studio del *segno* di f (cioè la determinazioni dei valori c per i quali $f(c)$ sia maggiore di 0), può essere ricondotto allo studio del segno di polinomi di grado 1. D'altra parte, se un polinomio f è decomponibile nel prodotto di polinomi di grado 1, si determinano facilmente le sue radici: sono i numeri reali che annullano uno di tali fattori. Ad esempio, se $f = (x-1)(x-3)$, i valori di x che annullano f sono 1 e 3.

Supponiamo invece $f = x^2 - 7x + 10$. Poiché $\Delta = 7^2 - 10 \cdot 4 = 9 > 0$, la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado con $\Delta > 0$, permette di determinare le due radici di f, che sono 2 e 5. Per il teorema di Ruffini, f è divisibile per $x-2$ e $x-5$; ne segue che $f = (x-2)(x-5)$ e i numeri reali c per i quali $f(c) > 0$ sono quelli per i quali $c-2$ e $c-5$ sono entrambi positivi o entrambi negativi, quindi $f(c) > 0$ se e solo se $c < 2$ oppure $c > 5$.

Bibliografia

[1] L. BIANCHI: "Il grafico e la mappa. Astrazioni e deduzioni in *Ti con zero*", *Italies* 16 (2012), 121–140.

[2] C.B. BOYER: "Storia della Matematica", *Mondadori* (1990).

[3] F. FERRARA: "Le forme dello spazio pubblico", tesi di dottorato in *Composizione Architettonica e Progettazione Urbana*, Napoli (2005).

[4] C.F. MANARA: "Il concetto di «astrazione» in matematica", *Scuola Italiana Moderna* 13 (1994), 24–27.

Matematica, letteratura, e l'ossessione per Musil

Mathematics, literature and the obsession with Musil

Bruno Carbonaro[1]

Abstract

In the framework of present studies about the relationship between mathematics and literature, the attention is mainly directed to the texts in which mathematics appears among the objects of discourse or among the expressive tools. In this perspective, a reference to Musil and to his The man without qualities seems to be considered mandatory. The aim of the present paper is twofold: (a) on one hand, we try to show that such a reference is rather forced; (b) on the other hand, we suggest that there could be other perspectives, perhaps more interesting, to understand and describe the interplay between mathematics and literature.

Dubbi introduttivi

Da parecchi anni (almeno quasi trenta, a quanto ci risulta [20], e qualche testo pionieristico sull'argomento era già apparso quasi settant'anni fa [15]) è andato esplodendo, tanto tra i matematici quanto tra un discreto numero di letterati, un interesse intensissimo per lo studio delle relazioni tra matematica e letteratura, quasi come se si volesse in questo modo finalmente riparare la frattura tra le due culture, umanistica e scientifica, e da un lato i letterati volessero valutare cos'hanno perso trascurando la matematica e il mondo delle sue nozioni non solo come oggetto di narrazione ma anche come arsenale di strumenti tecnici per la concezione e la strutturazione dei testi letterari [9,15,19] (e si vedano anche i pionieristici scritti di E. Colerus [2,3]), e come la letteratura possa nutrirsi del linguaggio e almeno di alcune nozioni matematiche di base per arricchire tanto le proprie capacità espressive quanto i contenuti della propria immaginazione [15], e i matematici volessero non solo da un lato rivendicare il ruolo della loro disciplina nella cultura umanistica, ma dall'altro anche studiare la possibilità di adottare toni, metafore e strutture linguistiche narrative per comunicare

[1]Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania "L. Vanvitelli", Viale Lincoln 5, I- 81100 Caserta, Italy; email: bruno.carbonaro@unicampania.it

i contenuti della matematica con la massima immediatezza possibile [7,10,20], per superare l'avversione, o almeno la paura, che la matematica suscita tanto spesso negli studenti 17. In questa prospettiva, ed obbedendo a queste sanissime istanze, è stato prodotto di recente nell'ambiente matematico italiano un certo numero di scritti nei quali si analizza e sottolinea come e quanto in un gran numero di opere letterarie classiche o importanti si citino nozioni matematiche (per esempio π), o problemi e teoremi, o si usino conoscenze matematiche, per quanto perlopiù elementari, come mezzi espressivi (per esempio, come metafore o analogie, o per descrivere ambienti e situazioni in termini particolarmente precisi, almeno nelle intenzioni) [11,12] (ma si veda soprattutto l'interessantissimo volumetto [16], l'unico nel quale quest'uso sia inquadrato, senza banalizzarne ma senza esaltarne il significato, nelle sue reali proporzioni).

Seguendo questo atteggiamento mentale, sembra che alcuni matematici coi quali ho avuto occasione di discutere ritengano essenziale, se non quasi obbligatorio, in qualsiasi saggio sui rapporti tra matematica e letteratura che voglia essere riconosciuto come «serio» e '«completo», un riferimento al grande scrittore Robert Musil (nato a Klagenfurt am Worthersee il 6 novembre 1880 e morto a Ginevra il 15 aprile 1942) e al suo monumentale libro *L'uomo senza qualità* [14]. Ora, a parte il fatto che ogni occasione per parlare di questa grande opera può essere la benvenuta, è comunque opportuno, se non doveroso, tentare anzitutto di capire fino in fondo la connessione del libro con l'oggetto della nostra analisi. Ebbene, a quanto possiamo vedere, i motivi di questo apparente imperativo categorico sono due.

Il primo, più vistoso ma più banale (e che speriamo non essere l'unico per qualcuno), sembra essere che Ulrich, il protagonista del racconto, è un matematico! E, sia detto per la gioia dei sostenitori della rilevanza della matematica nella letteratura, è presentato da Musil come un matematico importante, uno che – al momento in cui comincia la storia narrata nel libro – ha già pubblicato alcuni lavori che gli hanno dato una certa fama internazionale tra i colleghi studiosi.

Sorge allora spontanea la domanda: e con questo? Ne segue un particolare impatto della matematica, non diremo sulla letteratura nel suo complesso, ma sull'economia del libro e sul suo significato? Mastro Geppetto è un falegname, e questo è fondamentale nell'economia del racconto di Collodi [4], poiché, se fosse stato un ceramista, il suo Pinocchio sarebbe stato troppo fragile, e se fosse stato un pittore, Pinocchio sarebbe stato bidimensionale, e in ogni caso, troppo poco mobile. Ne concluderemo a favore dell'importanza della falegnameria nella letteratura? Moby Dick [13] si svolge tutto su una nave baleniera: ne inferiremo una particolare importanza per la letteratura dei metodi di caccia alla balena nel XIX secolo? Certo, se non fosse esistita questa attività, dove avrebbe trovato Melville la metafora giusta per l'ossessione della lotta al mostro gigantesco e apparentemente invincibile che adombra il destino dell'uomo? E comunque, si tratta di incontri rubati, momentanei, non possono – ovviamente – istituire un intreccio tra la letteratura e le attività descritte.

Si deve dire, in effetti, che la risposta più probabile alla precedente domanda sarà che l'aver attribuito a Ulrich la professione di matematico ha un profondo significato ed è destinata a suggerire un'importante chiave di lettura del libro (e si spera che a nessuno venga in mente di parlare *della* chiave di lettura). Questa affermazione va discussa, e lo sarà nella prossima Sezione. Ma, ammesso per il momento che essa sia vera, in analogia con quanto abbiamo osservato a proposito di Pinocchio [4] e Moby Dick [13] sui rapporti tra falegnameria (o baleneria) e letteratura, resta la domanda: questo incontro isolato tra matematica e letteratura, in questo particolare testo fra le migliaia e migliaia (almeno) che si annoverano nella letteratrura mondiale degli ultimi due secoli basterà a gettare una luce significativa sulla relazione tra matematica e letteratura? E, più in generale, basterà contare e descrivere le apparizioni, anche limitate e momentanee, e ridotte a pura menzione, della matematica nei testi narrativi o poetici noti di ogni tempo e luogo per comprendere, o definire, l'importanza della matematica per la letteratura? Come vedremo nelle Sezioni 3 e 4, ci vuol ben altro, com'è stato convincentemente mostrato con grande chiarezza in [10,16].

Ulrich matematico: ha davvero importanza?

Chi si desse realmente la pena di leggere davvero *L'uomo senza qualità* (e prima di parlare di un'opera letteraria bisognerebbe sempre leggerla, o anche solo consultarne brani scelti a caso in vari punti) scoprirebbe – forse con sorpresa – che la professione matematica di Ulrich, contrariamente a quanto forse ci piacerebbe pensare, gioca un ruolo molto limitato nel complesso delle sue esperienze, che costituiscono il romanzo volutamente senza trama e senza evoluzione temporale, e quasi nessun ruolo nello sviluppo della sua analisi critica della vita e del suo senso. Ulrich nomina la matematica sei volte in tutto il libro (esclusi i frammenti che dovevano servire come base per completarlo), e perlopiù di sfuggita: una sola volta con vero trasporto;, espone nozioni matematiche soltanto quando spiega a Gerda – in termini volutamente superficiali – la funzione della legge dei grandi numeri; nomina un teorema una sola volta in tutto il libro, nel capitolo 22 della Parte Terza, discutendo con la dottoressa Strastil, un'astronoma di sua conoscenza, di un'inesistente dimostrazione e di tre . . . matematici? fisici? filosofi? . . . altrettanto immaginari; dalle discussioni che di quando in quando affronta nel corso della sua vicenda, è sempre assente – anche solo come allusione – qualsiasi articolazione di un ragionamento da ipotesi a tesi; e, fortunatamente, non càpita mai di leggere che pronunci la terribile, banalizzatissima frase «come volevasi dimostrare». Il suo essere un matematico (e, fatto non secondario, un matematico ampiamente rispettato e riconosciuto tra i suoi colleghi) si esplicita di rado, soprattutto nelle sue analisi introspettive, nei suoi intermittenti dialoghi con se stesso, e mai come metodo di pensiero, ma solo come dato di fatto, destinato a concorrere alla definizione precisa delle sue attitudini e dei suoi scopi. Ma nella definizione delle attitudini, quegli aspetti della matematica che ci sembrerebbero più caratteristici non si considerano mai.

Perché dunque Ulrich è un matematico? Senza dubbio, come vedremo meglio nella Sezione 3, dev'essere un personaggio dotato di cultura matematica, affinché gli sparsi riferimenti alla matematica nel testo, per quanto non numerosi (né profondi, per la verità) risultino dotati di un senso preciso. Ma probabilmente, al di sotto di questa, e per assicurare la coerenza delle scelte narrative, possiamo trovare un'altra ragione, forse più profonda. Esaminiamo il carattere e le condizioni di vita del personaggio. Sappiamo che è agiato, che non ha bisogno di lavorare per guadagnare, e gode della massima libertà nel decidere l'impiego del suo tempo. A dispetto del titolo che lo definisce, è ben lungi dall'esser privo di qualità, a anzi è intelligente e profondo, ma è disincantato nei confronti di persone e fatti, e – sebbene non privo di affettività – il costante esercizio del suo spirito critico particolarmente acuto lo rende estremamente cauto nel prendere decisioni e lento nel realizzarle. In quasi tutte le vicende nelle quali è coinvolto, nelle sue relazioni col mondo esterno, al di fuori dell'inevitabile isolamento che ogni lavoro puramente intellettuale comporta, egli è più uno spettatore che un attore. Più che un uomo senza qualità è (nella maggior parte dei casi, non sempre, e certamente sempre meno nello svolgimento della sua storia) un uomo privo di conseguenze: ma poiché le qualità di ogni oggetto dell'esperienza, vivente o no, si definiscono tramite le sue interazioni, la mancanza di conseguenze si traduce in mancanza di qualità.

Ora, qualcuno potrebbe sostenere che il precedente sintetico ritratto si attaglia con particolare precisione all'iconografia popolare del matematico come persona persa dietro le proprie fantasie e con la testa fra le nuvole, priva di ogni spirito pratico. Ma dovrebb'essere chiaro che ci sono differenze profonde tra questo prototipo e il personaggio di Ulrich come sopra descritto, e che perciò, mentre da un lato sarebbe offensivo nei confronti di Musil anche solo prospettare che egli abbia scelto per Ulrich quest'attività anche solo in parte per aderire a uno schema ritrito, dall'altro sarebbe grossolanamente ingenuo considerare in qualche modo «naturale» la corrispondenza tra l'essere matematico e l'essere Ulrich. È sin troppo evidente che tantissimi matematici, di qualsiasi livello, non somigliano ad Ulrich quasi in alcun modo, e che esistono individui caratterialmente molto simili a Ulrich che detestano la matematica. L'essere un matematico non è in alcun modo condizione necessaria né sufficiente per essere Ulrich. Associare la scelta di Musil per l'attività di Ulrich all'economia del racconto, ovvero a particolari obiettivi comunicativi, comincia a sembrarci perciò pretestuoso e pretensioso. Se proprio vogliamo trovare una spiegazione alla scelta di Musil del lavoro di Ulrich, dobbiamo proprio riflettere sulle condizioni iniziali di vita di quest'ultimo, condizioni che devono da un lato rendere necessari il suo ingresso nella società e la sua ricerca di «conseguenze» e dall'altro configurare lo sviluppo di questa ricerca e i risultati che essa può produrre. All'inizio della storia, Ulrich – che, come abbiamo visto, è agiato – non dev'essere un fannullone, ma svolgere un lavoro non remunerativo (per Musil è evidentemente necessario sottolineare che Ulrich non ha bisogno di lavorare per guadagnare), che semplicemente lo appaghi e metta in luce le sue vere qualità, che possano essere riconosciute da coloro che condividono i suoi interessi ma restino invisibili o scarsamente decifrabili in ambito sociale (e, si badi bene, specialmente all'interno della classe agiata, tradizionalmente considerata anche colta, nella quale, non a caso, l'attività di matematico di Ulrich è del tutto ignorata e quasi mai nominata). Nessun'altra attività, per quanto intellettuale e altrettanto poco remunerativa della ricerca matematica svolta al di fuori dell'ambito accademico, avrebbe funzionato così bene: pittura, musica, scultura, letteratura, avrebbero comunque avuto, sulla società nella quale Ulrich va inserendosi da emphoutsider (come figlio di un senatore, non come matematico) un impatto percettibile. Occorreva un'attività «senza conseguenze» (apparenti) come il personaggio. Così se proprio vogliamo trovare nella scelta di Musil un messaggio riguardante la matematica, questo sarà proprio il riconoscimento della frattura tra «le due culture» nella società alto-borghese e aristocratica austriaca del primo Novecento, che peraltro Musil si guarda bene dal lamentare esplicitamente. Se ne serve, ma sembra non esserne affatto toccato. Il suo interesse è un altro: l'analisi filosofica, politica, sociale e, incidentalmente, economica della morente Austria imperiale, come vissuta da questo spettatore, che – avviandosi a farne parte come attore – deve scegliere che ruolo svolgervi; e, attraverso questa, la ricerca etica sulla vita dell'uomo nella società e quella sui rapporti tra razionalità e «istintività».

Musil e la matematica

In realtà, l'analisi precipuamente morale condotta da Musil nel suo libro [14] va ben aldilà dell'Austria, che serve solo, come si direbbe in un libro di matematica, «per fissare le idee» trattando una porzione di mondo che Musil conosce bene: è una ricerca sul posto dell'uomo del mondo, sul crollo delle convenzioni sociali spazzate via dal secolo XX (e dalla cosiddetta Grande Guerra), e su come queste convenzioni vadano sostituite, e soprattutto come si possa trovare un equilibrio tra l'individualità più ignara del mondo (rappresentata dall'assassino Moosbrugger e, a livelli meno intensi, da Clarisse e da Gerda Fischel), l'assoluta *soggettività*, e l'appartenenza al consorzio umano, costruendo un'*oggettività* che non si riduca al conformismo borghese del XIX secolo o alla morale religiosa («mistica»), e soprattutto ne eviti la rigidità, il cui risultato non può essere che l'asfissia.

È una ricerca estremamente attuale, che probabilmente resterà tale fino all'inevitabile implosione del capitalismo (o, in alternativa, all'estinzione del genere umano), ma soprattutto sembra costituire la base più solida per considerare Musil un imprescindibile esempio di interazione tra matematica e letteratura. A tal proposito, va anzitutto sottolineato che secondo Musil la vita umana, nel mondo che egli conosce e intende criticare attraverso la sua ironica narrazione, si svolge invariabilmente tra due poli: (1) la «soggettività», che può riguardarsi tanto come una sorta di culto dell'Io, dei suoi impulsi e dei suoi scopi, quanto come il rifiuto di valutarli «oggettivamente» alla luce degli schemi dettati dalla società (o dai diversi tipi di aggregazioni sociali e religiose), e (2) l'«oggettività», che è la razionalità tecnologica ed economica, ma anche ogni tipo di schema ideologico e di comportamento sociale codificato. Alla razionalità correttamente intesa spetta il compito di stimolare e regolare l'interazione dialettica di questi due opposti, che in troppi convivono ignorandosi e concedendosi reciprocamente spazi rigidamente. definiti. E l'importannza della matematica per Musil è espressa nei capitoli 10 e 11 della Parte Prima del libro, che di fatto – sottilmente, allusivamente – raffrontano le capacità progettuali e le abilità matematiche degli ingegneri, tutte rivolte alla tecnica e al calcolo, con la pratica della matematica come studio di oggetti che essa stessa definisce e come strumento fondamentale del modo di pensare scientifico e del suo carattere autocorrettivo.

Ma, dopo questa sorta di dichiarazione d'amore per il metodo scientifico (principalmente, ma non solo, matematico) e questa risoluzione di dedicarsi alla matematica e alla fisica per conquistare, e possibilmente diffondere, la capacità di pensare, ogni esplicito riferimento a questo ruolo della matematica scompare dal libro, se non in un altro punto importante:

> «Ma forse credo che fra un po' di tempo gli uomini saranno parte molto intelligenti e parte dei mistici. Forse avverrà che anche ai nostri giorni la morale si divida in queste due componenti. Potrei anche dire: in matematica e mistica. In miglioramento pratico e avventura ignota!» ([14], Parte terza, Capitolo 12)

Nell'*Uomo senza qualità*, la presenza della matematica è elusiva e fantomatica, e il fatto che essa abbia una valenza letteraria appare dubbio. Dobbiamo renderci conto che *L'uomo senza qualità* è un racconto molto speciale, anzi, più che un racconto, lo si potrebbe definire un saggio di filosofia morale sviluppato con molti esempi. Le vicende del libro sono perlopiù narrate alquanto brevemente, e quasi regolarmente commentate da lunghe digressioni sui temi psicologici e filosofici emersi dai comportamenti e dai dialoghi dei loro protagonisti. E questi temi sono tutti subordinati al problema filosofico che anima e motiva il libro, un problema al tempo stesso etico ed epistemologico, che potrebbe riassumersi così: come possiamo definire i limiti e le reciproche interazioni tra la nostra soggettività (impulsi, desideri, affetti) e l'oggettività (regole sociali e legge morale) per stabilire il modo migliore di vivere? Il mezzo per giungere all'obiettivo è l'esercizio della razionalità non limitata alla pura pratica. E in un paio di punti del romanzo (sopra citati), Musil allude al potere della matematica come forma più perfetta e generale di razionalità. In diverse occasioni (interviste, conversazioni, lettere) Musil esplicita ed argomenta questa tesi, ma nel romanzo se ne astiene. Così ogni connessione tra la matematica e il progresso del pensiero cui Musil ambisce sta più nella mente di coloro che interpretano la sua opera nel suo complesso che nel romanzo. Quando N. Engelhardt [8] descrive gli scopi e gli sforzi di Ulrich sostituendo sistematicamente la parola «matematica» alla parola «razionalità», fa una scelta personale, che non è in alcun modo conseguenza necessaria della lettura del libro.

Tutto ciò stabilito, o almeno ammesso in buona parte, riconosciamo che l'intervento della matematica nell'*Uomo senza qualità* si riduce a pura menzione. E questo ci riporta all'altro problema adombrato nell'introduzione: in quale prospettiva desideriamo discutere i rapporti tra matematica e letteratura?

Interazioni tra matematica e letteratura

Sembra dunque che non dobbiamo chiederci tanto se sia essenziale citare Musil come esempio capace di illustrare i rapporti tra matematica e letteratura, ma addirittura se ne valga la pena o se abbia senso. Più in generale, ha senso considerare in questa prospettiva tutti i testi nei quali alcune nozioni matematiche siano occasionalmente utilizzate come mezzi espressivi o anche semplicemente menzionate? O magari si faccia un occasionale riferimento alla matematica come oggetto di studio o di pratica da parte di qualche personaggio? Riterremo importante la matematica per Arthur Conan Doyle perché il professor Moriarty, genio del crimine avversario di Sherlock Holmes, era un fisico matematico autore di un celebre trattato, *Dinamica di un asteroide* [5]? Oppure per Michael Crichton, perché uno dei personaggi di rilievo del romanzo *Jurassic Park* [6] è il matematico Ian Malcolm, esperto di caos («chaotician»)? Certo, se ci va, possiamo applicarci (considerando soltanto narrativa e poesia, perché se includiamo anche la saggistica, di saggi sulla matematica ce ne sono ovviamente un'infinità) a fare un catalogo il più possibile completo dei testi letterari in cui la matematica compare a vario titolo, e magari a compilare una graduatoria: prima i testi nei quali si rappresenti il valore culturale della matematica secondo l'autore; poi quelli in cui si usino, all'occorrenza, metodi matematici, per quanto elementari, per risolvere problemi particolari (in *Guerra e Pace* [18], Tolstoij proponeva l'uso del linguaggio matematico delle funzioni per interpretare la storia dell'umanità); poi quelli in cui si usino similitudini e metafore matematiche; quindi quelli che narrano la biografia di qualche grande matematico (e che poi sono trasposti per il cinema, si vedano per esempio *A beautiful mind*, o *L'uomo che vide l'infinito* (*The man who knew infinity*) o *The imitation game*); infine, quelli che semplicemente menzionino la matematica un certo numero di volte, magari soltanto per far dire a un personaggio che a scuola la odiava, o per etichettarne un altro come «scienziato» soltanto perché conosce cinque cifre decimali di π. Ma cosa impariamo da questo? Con questa procedura si arriva soltanto alla banalizzazione. Come ha bene e molto opportunamente sottolineato G. I. Schini [16], quando uno scrittore (e, dualmente, un lettore) ha imparato una buona dose di matematica a livello scolastico, essa entra a far parte del suo linguaggio, e di conseguenza del suo modo di descrivere, e perciò di pensare, il mondo (e, dualmente, di comprenderne questa descrizione). Perciò, non dovrebbe meravigliarci, ma neppure esaltarci, il fatto che vi siano moltissimi scrittori che hanno studiato abbastanza matematica elementare da utilizzare occasionalmente metafore o descrizioni geometriche o aritmetiche, e che il nostro catalogo possa risultare sorprendentemente ricco. In conclusione, un'analisi approfondita dei rapporti tra matematica e letteratura sembrerebbe doversi concentrare su un diverso ordine di problemi: quanto la prima risulti – in quanto tale – elemento fondamentale della cultura umana nel suo complesso, e quanto la letteratura – considerando anche la saggistica – riesca ad esprimere questo carattere (ad esempio, nel romanzo *Noi* di E. Zamiatin [21], per quanto in una visione iperbolica e deformata, o nei libri di Zellini [22-24], volti a sottolineare e analizzare la costante interazione tra la nozioni di numero e di infinito e gli aspetti più profondi della riflessione filosofica e del sentire mistico dell'umanità); oppure quanto matematica e letteratura interagiscano di fatto nella realizzazione delle strutture dei testi, siano essi opere narrative oppure esposizioni didattiche o tecniche di risultati matematici (interessante a questo proposito, anche se rivolto soprattutto alla matematica che sta alla base dei nuovi strumenti di comunicazione, è il libro di A. Cappello [1]). Ancora una volta, qualche interessante passo su questa strada si trova in [16], dove – non a caso – i capitoli più interessanti sono quelli su Pirandello, Calvino, Sinisgalli e Saramago (ma anche le riflessioni su Orwell, Volponi e il presidente Lincoln meritano attenta lettura).

La bellezza della matematica e il rigore della buona letteratura sono due punti di contatto, ed anzi di mutua integrazione, che attendono ancora di essere esplicitati e completamente descritti.

Bibliografia

[1] CAPPELLO, A. P.: Matematica della letteratura, Mimesis, Milano, 2021.

[2] COLERUS, E.: Du point à la quatrième dimension, ou La Géometrie pour tous, Flammarion, Paris, 1992.

[3] COLERUS, E.: Mathematics for Everyman: From Simple Numbers to the Calculus (English Edition), Dover, New York, 2013.

[4] COLLODI, C.: Le avventure di Pinocchio. Storia di un burattino, Einaudi, Torino, 2014.

[5] CONAN DOYLE, A.: The valley of fear, Harper, London, 2016 (trad. it. Sherlock Holmes. La valle della paura, Newton Compton, Milano, 2015).

[6] CRICHTON, M.: Jurassic Park: A Novel, Ballantine Books, New York, 2012 (trad. it. Jurassic Park, Garzanti, Milano, 2018.

[7] D'AMBROSIO, U.: Mathematics and Literature, in A. White (a cura di), Essays in Humanistic Mathematics, Mathematical Association of America.

[8] ENGELHARDT, N.: Modernism, Fiction and Mathematics, Edinburgh University Press, Edinburgh, 2019.

[9] ENZENSBERGER, H. M.: Der Zahlenteufel: Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben, Carl Hanser, Munchen-Wien, 1997 (trad. it., Il mago dei numeri, Einaudi, Torino, 1997).

[10] LOLLI, G.: Matematica come narrazione, Il Mulino, Bologna, 2018.

[11] MAROSCIA, P., TOFFALORI, C., TORTORIELLO, F. S., VINCENZI, G. (eds.): Letteratura e matematica. Analogie e convergenze, UTET, Torino, 2016.

[12] MAROSCIA, P., TOFFALORI, C., TORTORIELLO, F. S., VINCENZI, G. (eds.): Letteratura e matematica. Spiragli d'infinito, UTET, Torino, 2019.

[13] MELVILLE, H.: Moby Dick: or, the Whale, Penguin Classics, London, 2015 (trad. it. Moby Dick, Feltrinelli, Milano, 2013).

[14] MUSIL, R.: Der Mann ohne Eigenschaften, Penguin Random House Verlagsgruppe GmbH, Anaconda Verlag, Munchen, 2013 (trad. it., L'uomo senza qualità, Einaudi, Torino, 1972).

[15] PLOTZ, H. (A cura di): Imagination's Other Place: Poems of Science and Mathematics, Crowell, New York, 1955.

[16] SCHINI, G. I.: Matematica e letteratura. Dalla Divina Commedia al Noir, Collana AL1C3&B08, Egea, Milano, 2015.

[17] SIETY, A.: Mathématiques, ma chère terreur, Hachette Littératures, "Pluriel", Paris, 2002 (trad. it. Matematica, mio terrore. Alla scoperta del lato umano della matematica, Salani, Milano, 2001).

[18] TOLSTOIJ, L. N.: Guerra e Pace (trad. it.), Mursia, Milano, 1966.

[19] TUBBS, R., JENKINS, A., ENGELHARDT, N. (eds.): The Palgrave Handbook of Literature and Mathematics, Palgrave Macmillan, New York, 2020.

[20] WHITE, A. M. (ed.): Essays in Humanistic Mathematics, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1993.

[21] ZAMJATIN, E.: Noi, Oscar Mondadori, Milano 2020.

[22] ZELLINI, P.: Breve storia dell'Infinito, Adelphi, Milano, 2021.

[23] ZELLINI, P.: Gnomon, Adelphi, Milano, 1993.

[24] ZELLINI, P.: Numero e Logos, Adelphi, Milano, 2010.

Periodico di Matematiche **98** (2022), pp.117–120

Le coniche: origine di una definizione

Conics: the origin of a definition

Carlo Maturo[1]

Abstract

The study of a conic section requires a definition that characterizes it not only as an intersection line of two surfaces but also as a curve on a plane. The construction that we present below eludes the use of trigonometry and justifies, thanks to simple transformations, the link between the different elements that characterize the usual definitions of these curves.

Premessa

La natura geometrica delle ellissi, delle iperboli e delle parabole viene messa in luce dalle sezioni (intersezioni) di una superficie conica circolare con un piano[2].
Lo studio di una sezione conica richiede una definizione che la caratterizzi oltre che come *linea* intersezione di due superfici anche come *curva* su un piano.
A partire da Apollonio di Perga, per giungere al matematico di origine franco-belga G. P. Dandelin, le diverse costruzioni prese in considerazione, per definire queste curve, coinvolgono solo alcuni degli oggetti geometrici utili allo scopo; per esempio, nell'opera di Apollonio non compare il concetto di *direttrice*.
Quella che presentiamo di seguito elude l'uso della trigonometria e giustifica, grazie a semplici trasformazioni, il legame esistente fra i diversi elementi che caratterizzano le abituali definizioni di queste curve.

La sezione di una superficie conica circolare

Sia K una superficie conica circolare retta di vertice v e apertura ϑ, Π un piano che la interseca lungo una linea C, Σ una superficie sferica di centro o tangente sia a K che al piano Π.

[1]carlomaturo@outlook.it - Miur.

[2]Escludiamo le sezioni con un piano che passa per il vertice della superficie.

Σ incontra Π in un punto f e K secondo una circonferenza Γ che ha per centro un punto c dell'asse. Il piano Ω che include Γ taglia il piano Π secondo una retta D. Il piano Φ, che contiene l'asse della superficie conica e passa per il punto f, è ortogonale sia al piano Ω che al piano Π. La retta A, comune ai piani Π e Φ, forma con l'asse della superficie conica un *angolo acuto* φ di vertice h; A è ortogonale alla retta D in un punto s e risulta asse di simmetria della sezione conica che interseca in punti detti *vertici*.

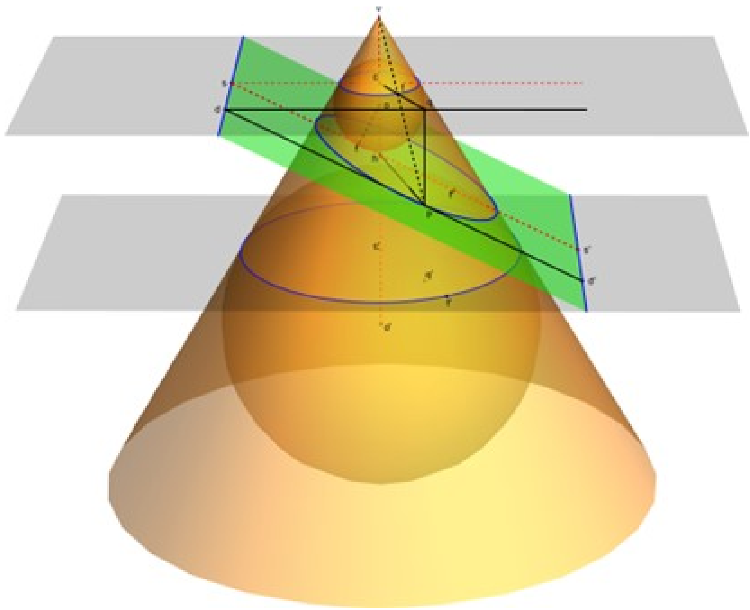


Figura 1: Immagine realizzata con Wolfram Mathematica

Indicato con p un punto generico di C, consideriamo due piani, di particolare interesse, che passano per questo punto:

- il piano Ψ parallelo al piano Φ: esso è ortogonale alla retta D in un punto d;
- il piano Φ che contiene l'asse della superficie conica: esso interseca K lungo una generatrice che è tangente alla superficie sferica Σ in un punto t del cerchio Γ.

I piani Ψ e Θ non sono paralleli e risultano entrambi ortogonali al piano Ω; la retta in comune non può che risultare ortogonale a quest'ultimo. L'intersezione di Ψ e Θ contiene la proiezione q di p sul piano Ω.
L'omotetia che ha centro sulla retta D e porta il punto d nel punto s, porta i punti q e p rispettivamente nei punti c e h. I triangoli rettangoli $\Delta(hcs)$ e $\Delta(pdq)$ sono omotetici, quindi

$$\frac{hc}{hs} = \frac{pq}{pd}$$

Al piano Θ appartengono le rette parallele pq e cv, nonché una loro trasversale, vp. L'omotetia di centro t che porta il punto v nel punto p, porta il punto c nel punto q. I triangoli rettangoli $\Delta(tvc)$ e $\Delta(tpq)$ sono omotetici, per cui risulta

$$\frac{vt}{vc} = \frac{pt}{pq}$$

Se si tiene presente che $pt = pf$, allora la costante $\varepsilon = \frac{vt}{vc} \times \frac{hc}{hs}$, detta *eccentricità* della conica, è uguale al rapporto $\frac{pf}{pd}$.

Siamo giunti a una proprietà che presa come definizione caratterizza la sezione conica come "curva" su un piano: *una conica è il luogo geometrico dei punti* p *del piano per i quali la distanza da un punto fisso* f*, detto fuoco, e la distanza da una retta fissata* D*, detta direttrice, stanno in un rapporto costante.*

Le diverse sezioni

La forma di una conica dipende dall'eccentricità, cioè dal rapporto $\frac{pt}{pd}$. Nei triangoli rettangoli $\Delta(pqt)$ e $\Delta(pqd)$, con il cateto pq in comune, tale rapporto è determinato dal confronto delle lunghezze delle rispettive ipotenuse o, ciò che è lo stesso, da quello delle ampiezze degli angoli θ e ϕ. Abbiamo:

$pt < pd$	$pt = pd$	$pt > pd$
$\varepsilon < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon > 1$
$\vartheta < \phi$	$\vartheta = \phi$	$\vartheta > \phi$

Supponiamo che l'angolo ϑ sia minore dell'angolo ϕ.
In questo caso, il piano Π incontra tutte le generatrici di K. Le due superfici sferiche, tangenti sia a K che a Π, appartengono ciascuna a un semispazio di Π. La proprietà $\frac{pf}{pd} = \varepsilon$, dedotta ragionando con una delle due superfici sferiche, può essere dedotta ripercorrendo lo stesso ragionamento con l'altra; si tratta di sostituire la direttrice D con la direttrice D', il fuoco f con il fuoco f', ecc. Quindi, $\frac{pf'}{pd'} = \varepsilon$.
I punti d, p e d' sono allineati e p è interno al segmento dd' di lunghezza L costante[3], donde l'equazione geometrica:

$$pf + pf' = \varepsilon L$$

che caratterizza l'*ellisse*. La grandezza εL esprime la distanza tra i vertici della conica che appartengono al tratto della retta A interno alla striscia determinata dalle due direttrici.
Analizziamo il caso in cui l'angolo ϑ è uguale all'angolo ϕ.
Il piano Π è parallelo a una delle generatrici che appartengono al piano Φ e quindi interseca tutte le generatrici della superficie conica tranne quella. Vi è una sola superficie sferica tangente sia a K che a Π.

[3] L esprime la distanza fra le rette parallele D e D'.

I triangoli rettangoli $\Delta(hcs)$ e $\Delta(vct)$ risultano *simili*. Si ha $\frac{hc}{hs} = \frac{vc}{vt}$; ε assume il valore 1, la sezione conica prende il nome di *parabola*.
Sia l'ampiezza di ϕ minore di quella di ϑ.
Il piano Π incontra una parte delle generatrici della superficie conica su una falda, mentre delle altre incontra i prolungamenti sull'altra falda; la sezione consiste di due rami separati. Le superfici sferiche, tangenti sia a K che a Π, appartengono a falde diverse ma allo stesso semispazio di Π.
Il punto p è allineato con d e d' ma, a differenza dell'ellisse, è esterno al segmento che li unisce, quindi $L = |pd - pd'|$. L'equazione geometrica:

$$|pf - pf'| = \varepsilon L$$

definisce l'*iperbole*. La grandezza εL esprime la distanza tra i vertici della conica che appartengono ciascuno a una delle parti della retta A esterna alla striscia determinata dalle due direttrici.

Un caso particolare

Se ϕ è nullo, allora il piano Π è parallelo all'asse della superficie conica e ortogonale al piano Ω; il rapporto $\frac{hc}{hs}$ si è ridotto all'unità e l'eccentricità a $\frac{vt}{vc}$. Se il triangolo rettangolo $\Delta(vct)$ è isoscele, l'iperbole si dice *equilatera*.

Bibliografia

[1] ALEKSANDROV, A.D, KOLMOGOROV A.N., LAVRENT'EV M.A.: Le Matematiche, Boringhieri, 1977.

[2] KLINE, M.: Storia del pensiero matemativo, G. Einaudi Editore, 1999.

[3] COURANT, R., ROBBINS H.: Che cos'è la Matematica? Boringhieri, 2020.

Periodico di Matematiche **98** (2022), pp.121--126

Rette, piani, pianeti

Lines, Planes, Planets

Sergio Savarino[1]

Abstract

Here are some simple astronomical observations made with the naked eye or with the help of an amateur telescope or with the "Star Walk 2" application. Considerations are drawn from this on the Earth's rotation, on lines and planes, on their reciprocal positions in space.

Le osservazioni

Il cielo dell'estate 2020 è stato segnato dalla vicinanza (angolare) di Giove e Saturno. Poi, verso mezzanotte, compariva anche Marte. Tre pianeti, ben visibili, distribuiti su un grande arco in cui si percepiva il piano dell'eclittica. Giove e Saturno sono vicinissimi, ben visibili anche a occhio nudo sin dalle prime ore della sera, prima con Saturno in basso e Giove in alto, poi alla stessa altezza, poi con Saturno in alto e Giove in basso, come in Fig. 1, 2, e 3. Con il passar del tempo le posizioni reciproche cambiavano, nel modo detto prima.
Inoltre, osservazioni con un telescopio amatoriale (da 400 mm con una lente Barlow 2x), ripetute a intervalli, evidenziano cambiamenti nella distribuzione dei satelliti di Giove e degli anelli di Saturno secondo la stessa sequenza: da sinistra a destra prima crescente, poi parallela all'orizzonte, poi decrescente.

Giove e Saturno

Nelle Fig. 1, 2, 3 sono riportate rilevazioni dei due pianeti fatte da Roma (latitudine 42°). Si vede chiaramente come le rispettive posizioni cambiano nel tempo. Alle ore 20 Giove è più alto di Saturno sull'orizzonte dell'osservatore, dopo qualche ora sono quasi alla stessa altezza, poi Saturno è più alto di Giove.

[1]Mathesis Roma, s.savarino@tiscali.it

Ore 20, ora legale, 7 settembre 2020. La linea da Saturno a Giove è crescente, da sini-stra a destra. Le freccette indicano i due pianeti.

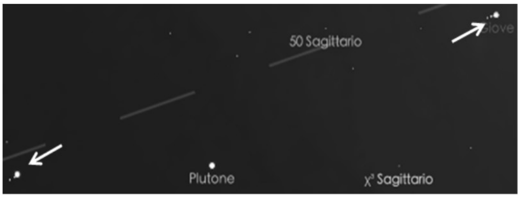


Figura 1

Ore 22, ora legale, 7 settembre 2020. La linea da Saturno a Giove è quasi orizzontale.

Figura 2

Ore 23, ora legale, 7 settembre 2020. La linea da Saturno a Giove è decrescente

Figura 3

Le immagini di Fig. 1, 2 e 3 sono tratte dalla appli-cazione "Star Walk 2".

Una cosa del tutto analoga si osserva con gli anelli di Saturno e con i satelliti di Giove: Io, Europa, Ganimede, Callisto (i cosiddetti satelliti galileiani).

Ore 20. Ora legale, 7 settembre 2020 L'altezza di Saturno: 22°

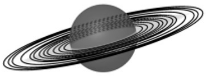


Figura 4

Ore 22. L'altezza di Saturno: 26°.

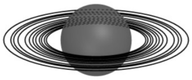


Figura 5

Ore 23. L'altezza di Saturno: 25°. Elaborazione grafica GeoGebra.

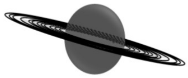


Figura 6

Ore 20. Altezza di Giove: 23°.

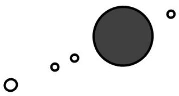


Figura 7

Ore 22. Altezza di Giove: 25°.

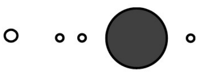


Figura 8

Ore 24. Altezza di Giove: 21°.

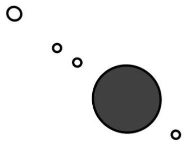


Figura 9

Osservazioni fatte con un telescopio (400 mm e lente Barlow 2x). Elaborazioni grafiche GeoGebra.
La cosa si spiega con il fatto che l'orizzonte dell'osservatore è inclinato rispetto al piano dell'eclittica, quello su cui ruotano "quasi" tutti i corpi del sistema solare.
La posizione dell'osservatore, e quindi il piano del suo orizzonte, cambia con la rotazione della Terra (Fig. 10, 11, 12).

Rette e piani

La percezione di oggetti nello spazio 3D non è mai scontata; perché non è possibile farne una chiara rappresentazione sul piano, perché facilmente si hanno illusioni ottiche, perché ci possono essere deformazioni prospettiche. Stelle e pianeti appaiono tutti alla stessa distanza dall'osservatore, tutti su un'unica volta celeste. E li vediamo ruotare, mentre è la Terra a farlo.
La percezione delle posizioni reciproche è diversa da un'ora all'altra, ed è fortemente influenzata dal fatto che l'osservatore terrestre si trova su una superficie sferica in rotazione.
Il piano dell'orizzonte è inclinato su quello dell'eclittica, con un angolo che dipende dalla latitudine dell'osservatore e dal momento dell'osservazione. Le figure seguenti (10, 11, 12) si riferiscono alle osservazioni di cui sopra, a latitudine 37°, e schematizzano le situazioni delle Fig. 1, 2, 3.
Giove si sta alzando sull'orizzonte dell'osservatore (puntino rosso). Saturno è sotto il piano dell'orizzonte, non è ancora visibile. Elaborazione grafica "Geogebra".

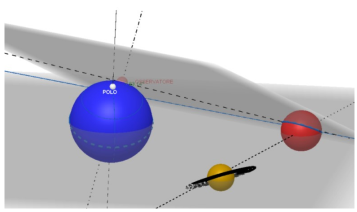


Figura 10

Giove è in culminazione, la linea immaginaria congiungente i due pianeti è quasi orizzontale, parallela allo spigolo del diedro “piano eclittica-piano orizzonte”. Elaborazione grafica “Geogebra”.

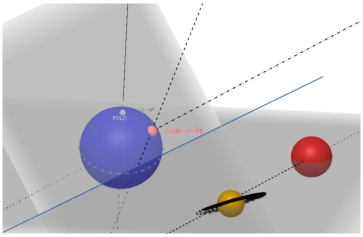


Figura 11

Giove è scomparso sotto il piano dell’orizzonte. Saturno è sul filo dell’orizzonte. Elaborazione grafica “Geogebra”.

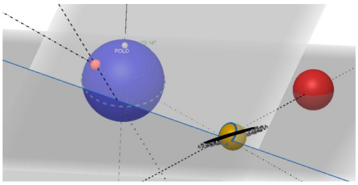


Figura 12

Considerazioni del tutto analoghe si possono fare sulle posizioni dei satelliti di Giove (Fig. 7, 8 e 9) e degli anelli di Saturno (Fig. 4, 5, 6).

I due piani, orizzonte ed eclittica, formano quello che nella geometria 3D si chiama “diedro”.
Due "rette" sono rilevanti: la congiungente Giove-Saturno e lo spigolo del diedro “orizzonte-eclittica”.
Sono sghembe, tranne quando Giove è in culminazione, in quel momento le due “rette” sono parallele. E la congiungente i due pianeti è parallela al piano orizzonte dell’osservatore.

Conclusioni

La percezione di oggetti e di configurazioni tridimensionali non è mai banale. La teoria della Gestalt ne ha studiato le difficoltà e i criteri organizzativi.
Lo studio, anche solo di pochi aspetti del sistema solare, pone subito qualche problema. Per es. un osservatore “ingenuo” si aspetterebbe che due pianeti abbiano sempre la stessa differenza di altezza e che i satelliti di Giove e gli anelli di Saturno fossero disposti sempre nello stesso modo rispetto all’orizzonte.

Osservazioni astronomiche, pur fatte con mezzi poveri, possono risultare formative: la percezione delle cose secondo diversi punti di vista, i piani e le rette nello spazio, la sfericità e la rotazione della Terra, lo sviluppo di una visione geometrica, una palestra per le rappresentazioni mentali tridimensionali.

Bibliografia

[1] HERMANN, J.: Atlante di astronomia, Oscar Mondadori, 1975.

Periodico di Matematiche **98** (2022), pp.127--141

Un'analisi razionale sugli oroscopi: un esempio di educazione civica scientifica

A rational analysis on the horoscope: a scientific civic education example

Domenico Liguori [1] **e Pasquale Barone**[2]

Abstract

This work aimed to raise questions in students about the reliability of horoscopes and their pseudo-scientific nature. To this end, an analysis of the random nature of the horoscopes and the analogies with some characteristics of the random walk are carried out. This study is inserted in the context of interdisciplinary teaching of civic education, in accordance with the law no. 92 of 20 August 2019, in order to expand the educational offer of students and give them scientific tools for the reality and information analysis, and the choices they will make in their life.

Introduzione

Viviamo un'epoca dominata dalla tecnologia, ma è altrettanto vero che la cultura scientifica fatica a diffondere attraverso le nostre menti e soprattutto fra quelle dei giovani. I prodotti tecnologici sono alla portata di tutti, ma spesso si usano ignorando perfino le basi dei processi scientifici che li hanno partoriti. In un'epoca in cui il metodo scientifico troppo spesso viene sostituito dalla credulità e dalla superstizione, investire maggiormente sulla formazione scientifica dei giovani significa assicurare, per tutta l'umanità, un futuro migliore contribuendo a "...formare cittadini responsabili e attivi ed a promuovere la partecipazione piena e consapevole alla vita civica, culturale e sociale delle comunità..."[3].

[1] mim_lig@alice.it - Liceo Scientifico "Stefano Patrizi" di Cariati (CS).

[2] pasquale.barone@unical.it – Liceo Scientifico Linguistico Classico Statale "Enrico Medi" - Battipaglia (SA).

[3] Art. 1, comma 1, Legge 20 agosto 2019, n. 92: https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2019/08/21/19G00105/sg.

Come si può, quindi, in questa ottica prendere sul serio gli oroscopi e non dubitare della loro attendibilità? Con questo percorso si è cercato di fornire, agli studenti coinvolti, una serie di strumenti scientifici per rispondere in modo rigoroso a queste domande. Sul pubblico, l'astrologia riscuote un notevole successo ed in questo, purtroppo, viene aiutato anche dai canali di comunicazione. La vaghezza con cui vengono formulati gli oroscopi non è percepita dalla massa, gli astrologi fanno affermazioni vaghe oppure valide per tutti, nelle quali è facile riconoscersi e vedere rappresentata la propria situazione personale e questo viene confuso come predizione. Una analisi scientifica degli oroscopi può evidenziare tutte le contraddizioni presenti e l'abilità degli autori nel nasconderle attraverso l'utilizzo di un linguaggio vago studiato appositamente per colpire i meccanismi psicologici della percezione umana che tendono a selezionare, interpretare ed adattare, inconsapevolmente, anche solo una minima parte di ciò che si legge o si ascolta per poi crearne una falsa convinzione di veridicità[4], [1]. Acuire la mente al senso critico ed abituarla al ragionamento rigoroso con l'utilizzo del metodo scientifico può e deve costituire il vaccino alla pandemia dell'ignoranza scientifica che dilaga ancora oggi. L'analisi statistica sugli oroscopi che viene qui proposta vuole essere un piccolo esempio in questa direzione ed inserito nell'ambito dell'insegnamento trasversale dell'educazione civica come educazione civica scientifica[5].

Verifica statistica della natura casuale degli oroscopi

Per 44 giorni, sono stati somministrati ad un campione di 200 studenti i 12 oroscopi dello zodiaco facilmente reperibili su numerose riviste o più semplicemente in rete[6]. Ciascun profilo è stato privato dell'indicazione del segno zodiacale e contrassegnato da un codice che ne permette il riconoscimento in fase di analisi. Ogni partecipante è stato invitato ad indicare l'oroscopo che riteneva proprio comunicando il proprio segno zodiacale. Durante l'esperimento sono stati utilizzati fonti di oroscopi differenti allo scopo di avere un campione statistico dei dati più rappresentativo e non fortemente dipendente dalla singola fonte. I dati relativi all'esperienza condotta sono sintetizzati nella tabella I.

Partecipanti (n. alunni $\times$ n. giorni)	8800
Risposte corrette (casi in cui l'oroscopo selezionato coincide con quello del proprio segno zodiacale)	747
Risposte errate (casi in cui l'oroscopo selezionato non coincide con quello del proprio segno zodiacale)	8053

Tab.1: Dati dell'esperimento.

[4]https://www.cicap.org/n/articolo.php?id=200263

[5]https://www.sif.it/static/SIF/resources/public/files/congr20/ri/Sapia.pdf, https://www.cicap.org/n/articolo.php?id=274804

[6]http://www.gallito.eu/oroscopo-del-giorno/

La teoria della probabilità [2] indica che estraendo a caso uno dei 12 segni si ottiene una frequenza teorica favorevole ad indovinare il proprio segno zodiacale pari a $p = 1/12$, corrispondente a circa l’8.3%, mentre la probabilità contraria è $q = (1 - p) = 11/12$ pari a circa il 91.7%. Con i dati del nostro esperimento (vedi tabella I), possiamo calcolare la frequenza sperimentale[7], pS, delle risposte corrette come rapporto tra il numero delle risposte corrette ed il numero dei casi totali, quindi: $pS = 747/8800$ pari a circa l’8.5%. Il valore medio atteso (μ) ed il valore dello scarto quadratico medio[8] (σ), [2,3], sono, rispettivamente, pari a

$$\mu = np \ , \quad \sigma = \sqrt{npq} \tag{1}$$

dove n è il numero dei partecipanti, p è la probabilità teorica favorevole e q quella contraria: $\mu = 8800 \cdot 1/12 = 733$ e $\sigma = \sqrt{(8800 \cdot 1/12 \cdot 11/12)} = 26$.

Il numero delle risposte corrette indovinate a caso, pertanto, può cadere nell’intervallo tra $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$ che nel nostro caso risulta essere 733 ± 26 e la frequenza sperimentale, pS, è confrontabile con la probabilità p che gli eventi siano casuali. Possiamo, pertanto, affermare che gli eventi di risposte corrette dell’oroscopo rientrano nel puro ambito della casualità e che la statistica dimostra l’incoerenza e la non scientificità degli oroscopi evidenziando, invece, la loro natura puramente casuale ed ingannevole.

Il random walk

In questa esperienza ci siamo occupati anche dello studio di alcune caratteristiche del random walk, di seguito analizzate, per determinare delle eventuali analogie con il processo di associazione dei contenuti degli oroscopi alla propria personalità. Il random walk, noto anche come *passeggiata aleatoria* o *cammino dell’ubriaco*, è un processo stocastico a parametro discreto, nel quale si ipotizza che una variabile casuale (o aleatoria) X_t descriva la posizione assunta al tempo t da un punto in movimento. Nel caso di moto monodimensionale se immaginiamo che inizialmente il punto si trovi nella posizione $X_0 = 0$, al tempo $t = 1$ il punto può compiere un salto o in avanti (raggiungendo la posizione $X_1 = 1$) o all’indietro (raggiungendo la posizione $X_1 = -1$) con eguale probabilità pari ad $1/2$ per entrambi i casi e così via al variare di t perché la probabilità di andare avanti o indietro ai diversi tempi rimane costante e non dipende dai risultati precedenti. I valori della variabile X_t (cioè le possibili posizioni del punto al periodo t) rappresentano gli *stati del processo* e l’insieme dei possibili stati costituisce lo *spazio degli stati*. La successione delle X_t costituisce la traiettoria di questo processo stocastico, cioè una possibile traiettoria della passeggiata

[7] La *legge dei grandi numeri*, nota anche come *legge empirica del caso o teorema di J. Bernoulli*, ci assicura che all’aumentare del numero delle prove eseguite il valore della frequenza tende sempre più al valore teorico della probabilità.

[8] Per il teorema del limite centrale e nell’ipotesi che n sia grande a piacere, la distribuzione binomiale può essere approssimata da quella normale con media np e varianza $np(1-p)$. La regola operativa secondo la quale n deve essere grande abbastanza per avere $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$ (nel nostro caso con $n = 836$, $p = 1/12$ e $(1-p) = q = 11/12$ le suddette condizioni sono soddisfatte).

aleatoria. La distribuzione della variabile X_t può essere simulata con una macchina di *Galton*[9], [4], e, all'aumentare di t, essa tende ad avere distribuzione normale. Il modello random walk viene applicato in diversi campi di ricerca: dalla descrizione fisica dei *moti browniani*[10,11], [5,6], ad applicazioni in campo economico ad esempio per lo studio dell'andamento dei prezzi[12,13].
Le variabili principali che caratterizzano il tipo di random walk sono: il passo del camminatore e la probabilità di spostamento nelle varie direzioni.
Il passo (Δx) può essere:

- discreto con lunghezza costante L, oppure variabile di passo in passo;
- continuo con lunghezza del passo distribuita casualmente.

Se la probabilità di spostamento nelle varie direzioni è sempre uguale il random walk si dice simmetrico, altrimenti è non simmetrico. Nel nostro esempio tratteremo un random walk discreto e simmetrico e attraverso delle simulazioni abbiamo cercato delle risposte alle seguenti domande:

1. Qual è la distanza media percorsa, dal punto di partenza, che ci si aspetta dopo N passi?
2. Qual è lo scarto quadratico medio dello spostamento che ci si aspetta in media dopo N passi?
3. Cosa si può dire sulla probabilità che un singolo camminatore si trovi ad una distanza x dal punto di partenza dopo N passi?

Consideriamo il caso di random walk monodimensionale, con passo costante L, in cui il moto può avvenire, a partire dalla posizione iniziale $x_0 = 0$, verso destra con probabilità p, oppure verso sinistra con probabilità $q = (1 - p)$ con $p + q = 1$ (condizione di normalizzazione). Nel caso simmetrico sarà $p = q = 1/2$. Dopo N passi la posizione x_N sarà data dalla somma algebrica dei singoli passi verso destra e sinistra ed in generale lo spostamento medio dopo N passi sarà:

---

[9] https://www.asimmetrie.it/illuminazioni-testa-o-croce

[10] I moti browniani furono descritti per la prima volta, nel 1827, dal naturalista inglese Robert Brown osservando il comportamento casuale di corpuscoli, ad esempio dei granelli di polline, in sospensione su dell'acqua. La teoria del moto browniano proposta da Einstein nel 1905 (http://www.massimobanfi.it/Sito/fisicamatematica/maturita/Studio%20del%20moto%20Browniano.pdf), [5], divenne poi una fondamentale conferma del modello atomico e molecolare della materia e quindi una dimostrazione indiretta dell'esistenza degli atomi indirizzando la fisica a non considerare soltanto fenomeni di tipo deterministico.

[11] http://www.fisica.unipg.it/~luca.gammaitoni/fisen/Document/Boffetta-Vulpiani-Cap4-MotoBrowniano.pdf,
https://viaggionellascienza.it/materia/fisica/einstein-e-il-moto-browniano/,
http://www.massimobanfi.it/Sito/fisicamatematica/maturita/Studio%20del%20moto%20Browniano.pdf

[12] In base a questo modello vi è uguale probabilità che la variazione dei prezzi nel tempo sia positiva o negativa per cui le fluttuazioni del prezzo delle azioni, le quali compiono una serie di movimenti aleatori, possono salire o scendere, ma in media oscilleranno intorno al punto di partenza.

[13] https://www.startingfinance.com/approfondimenti/nascita-finanza-moderna-fisica/

$$\langle x_N \rangle = N_+L + N_-(-L) = NL(p-q) \tag{2}$$

Dove N_+ ed N_- rappresentano, rispettivamente, il numero medio di passi verso destra e sinistra (tutti indipendenti tra di loro) con $N_+ = Np$, $N_- = Nq$ e $N_+ + N_- = N$. Si può dimostrare[14], invece, che la varianza può essere scritto nella seguente forma:

$$\left\langle (\Delta x_N)^2 \right\rangle = \langle x_N^2 \rangle - \langle x_N \rangle^2 = 4pqNL^2 + [NL(p-q)]^2 \tag{3}$$

Risulta immediato verificare che nel caso di random walk simmetrico con $p = q = 1/2$ la (2) e la (3) diventano:

$$\langle x_N \rangle = 0 \tag{4}$$

e

$$\left\langle (\Delta x_N)^2 \right\rangle = NL^2 \tag{5}$$

Le equazioni (4) e (5) mostrano la regolarità e la caratteristica di questo tipo di random walk analizzato. Lo spostamento medio è nullo rispetto alla posizione di partenza, mentre lo spostamento quadratico medio (la varianza) è proporzionale al numero di passi (vedi figura 4). Quindi la radice della distanza quadratica media (deviazione standard) cresce con la radice del numero di passi e non con il numero di passi come in un cammino ordinato sulla stessa direzione. Questo risultato, inoltre, ricorda quello trovato da Einstein[15] nella sua formulazione del modello del moto browniano [5,6] in cui lo spostamento quadratico medio dipende linearmente dall'intervallo di tempo entro cui la particella compie i suoi "passi" nel moto browniano.

Consideriamo un random walk monodimensionale e simmetrico, con passo costante $L = 1$, che parta dalla posizione iniziale zero, quindi con probabilità $P = 1$ di essere in $x = 0$ all'inizio della camminata. Dallo schema riportato nella figura 1 si evince che al passo 1 ci possiamo trovare o nella posizione $x = 1$ o in quella $x = -1$, a seconda se ci siamo mossi verso destra o verso sinistra, con entrambe le probabilità pari ad $1/2$. In questo caso è impossibile ($P = 0$) ritrovarsi nella posizione $x = 0$. Al passo 2 le posizioni possibili sono $x = -2$, $x = 0$ oppure $x = 2$ con le rispettive probabilità $P = 1/4$, $P = 2/4$ e $P = 1/4$. Lo schema può essere interpretato notando che le posizioni estreme, ad un certo passo, sono raggiungibili da una sola posizione

[14] https://math.stackexchange.com/questions/285377/null-recurrence-of-a-random-walk, https://medium.com/swlh/random-walk-a-comprehensive-illustration-aa13373830d1, https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.59.8014&rep=rep1&type=pdf

[15] Nella sua teoria sul moto browniano [5,6], Einstein ricava la seguente equazione per la diffusione, in un liquido, di particelle sospese: $P(x,t) = \sqrt{1/(4\pi Dt)}e^{-x^2/(4Dt)}$ con deviazione standard (scarto quadratico medio) $\sigma = \sqrt{2Dt}$, dove D rappresenta il coefficiente di diffusione. La distribuzione di probabilità delle particelle in moto browniano è gaussiana con spostamenti che hanno un valore quadratico medio proporzionale alla radice quadrata di t che, in questo caso, rappresenta il tempo tra due urti consecutivi quindi simile al passo del random walk, nell'ipotesi di un tempo t discreto e più piccolo del tempo di interazione tra le stesse particelle in sospensione.

del passo precedente, mentre le altre sono raggiungibili dalle posizioni precedente e seguente del passo precedente. Ad esempio la posizione $x = 0$ al passo 2 è raggiungibile sia dalla posizione $x = -1$ che dalla posizione $x = 1$ del passo 1. Nel primo caso la probabilità di essere nella posizione x ad un dato passo è data dalla probabilità della posizione precedente moltiplicata $1/2$ mentre negli altri casi bisogna prima sommare le probabilità delle due posizioni, al passo antecedente, che contribuiscono a raggiungere la posizione x al nuovo passo e poi moltiplicare per $1/2$. Ad esempio la probabilità di essere in $x = 3$ al passo 3 è $P_3(3) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8$ cioè $P_2(2) \cdot 1/2$ (la probabilità di essere in $x = 2$ al passo 2 per la probabilità di spostarsi a destra che è pari ad $1/2$) mentre la probabilità di essere in $x = 1$ al passo 3 è $P_3(1) = (2/4 + 1/4) \cdot 1/2 = 3/8$ cioè $P_2(0) \cdot 1/2 + P_2(2) \cdot 1/2$ (la probabilità di essere in $x = 0$ al passo 2 moltiplicata per la probabilità di andare verso destra, pari ad $1/2$, sommata alla probabilità di essere in $x = 2$ al passo 2 moltiplicata per la probabilità di andare verso sinistra, in questo caso pari sempre ad $1/2$).

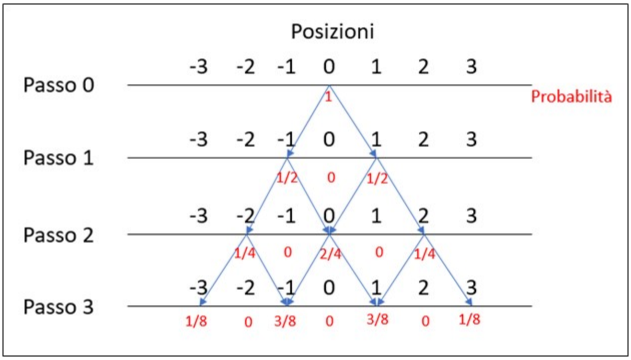


Figura 1: Schema del random walk monodimensionale simmetrico. Da notare la somiglianza del triangolo di Tartaglia al triangolo formato con i valori delle probabilità relative ad ogni posizione raggiunta nel random walk. In questo caso, però, ogni riga è moltiplicata per il fattore $1/2$ e tra due valori successivi, su ogni riga, c'è sempre uno zero.

Generalizzando, quindi, avremo:

$$P_{N+1}(x) = P_N(x-1)p + P_N(x+1)q \tag{6}$$

ed applicando la (6) in modo ricorsivo si ottiene[16]:

$$P_N(x) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+\frac{x}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}-\frac{x}{2}\right)!}p^{\frac{N}{2}+\frac{x}{2}}q^{\frac{N}{2}-\frac{x}{2}} \tag{7}$$

[16]https://medium.com/swlh/random-walk-a-comprehensive-illustration-aa13373830d1, https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.59.8014&rep=rep1&type=pdf, https://slideplayer.com/slide/4515153/

che nel limite di N molto grande e per probabilità uguali, permette di ricavare (con l'ausilio dell'approssimazione di Stirling[17]) l'espressione della distribuzione di probabilità valida nel caso del random walk simmetrico semplice[18]:

$$P_N(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{x^2}{2N}} \tag{8}$$

ovvero una gaussiana centrata intorno alla posizione di partenza con varianza pari ad N, che si allarga quindi all'aumentare di N (vedi figura 4). Anche in questo caso la (8) ricorda l'equazione di diffusione ricavata da Einstein nella sua teoria del moto browniano [5,6].
La figura 2 mostra una simulazione, per il random walk monodimensionale simmetrico, dell'andamento del quadrato della posizione finale al variare del numero di passi effettuati. Nel nostro caso la posizione iniziale è $x = 0$. Si nota che al variare del numero dei passi la variazione delle posizioni (distanza totale percorsa) varia in funzione della radice quadrata del numero N di passi o, come illustrato nella figura 2, il quadrato della distanza percorsa varia linearmente come il numero N dei passi compiuti. La figura 3 mostra che la distribuzione delle posizioni finali è gaussiana come previsto dalla (8). Questo non significa che ci troviamo sempre nella posizione $x = 0$, ma che la distribuzione di probabilità di trovarci in un punto qualsiasi è centrata in $x = 0$ e che questa distribuzione di probabilità si allarga con l'aumentare del numero di passi N. La figura 4, infatti, mostra come la varianza cresce linearmente con il numero dei passi N, in accordo con l'equazione (8). In questo caso, quindi, la distanza totale percorsa, mediamente dopo N passi, è proporzionale a $\sqrt{N}$. A parità di distanza percorsa, quindi, in condizioni di random walk occorrono N^2 passi e non soltanto gli N che occorrerebbero in caso di moto rettilineo orientato sempre nella stessa direzione. In altre parole, se immaginiamo che un ubriaco (il cui moto sarà un random walk che, per semplicità, assumiamo essere monodimensionale e simmetrico) e un passeggiatore sobrio (il cui moto è rettilineo sempre nella stessa direzione) debbano andare da un punto A ad un punto B con lo stesso passo, se quest'ultimo impiegherà ad esempio 100 passi l'ubriaco ne dovrà fare mediamente 10000.

[17] https://mathworld.wolfram.com/RandomWalk1-Dimensional.html,
https://it.wikipedia.org/wiki/Passeggiata_aleatoria,
https://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/5399-formula-di-stirling.html,
https://www.matematicamente.it/forum/una-dimostrazione-elementare-della-formula-di-stirling-t107369.html#p705979

[18] https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.59.8014&rep=rep1&type=pdf,
https://slideplayer.com/slide/4515153/.

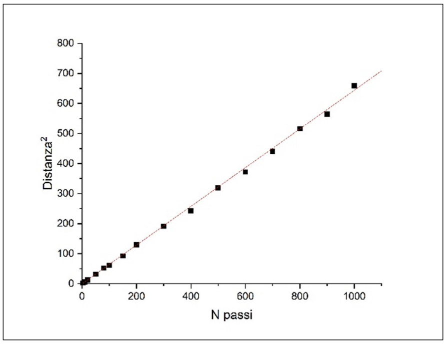
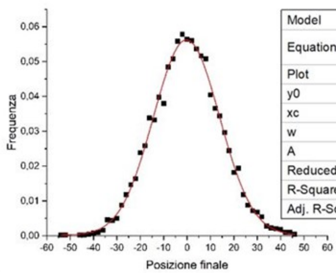


Figura 2: Andamento del quadrato della distanza in funzione del numero N dei passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk monodimensionale e simmetrico.



Model	Gauss
Equation	y=y0 + (A/(w*sqrt(pi/2)))*exp(-2*((x-xc)/w)^2)
Plot	B
y0	1,89494E-4 ± 4,76822E-4
xc	-0,24411 ± 0,1661
w	28,23451 ± 0,47088
A	1,98293 ± 0,0409
Reduced Chi-Sqr	2,71898E-6
R-Square (COD)	0,99369
Adj. R-Square	0,99326

Figura 3: Distribuzione delle posizioni finali dopo 200 passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk monodimensionale e simmetrico.

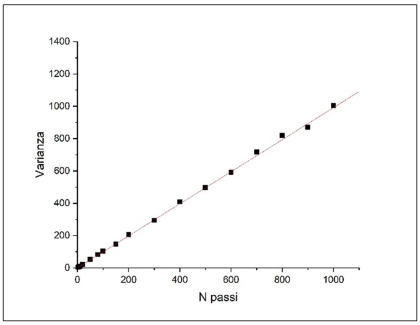


Figura 4: Dipendenza lineare della varianza dal numero N di passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk monodimensionale e simmetrico.

Lo stesso algoritmo di simulazione[19] è stato adattato al caso di due e tre dimensioni. I risultati sono sintetizzati nelle figure 5, 6 e 7 per il random walk simmetrico in due dimensioni e nelle figure 8, 9 e 10 per quello tridimensionale. Come si può vedere dai grafici le proprietà suddette rimangono inalterate: il quadrato della distanza percorsa è una funzione lineare del numero di passi N e le distribuzioni finali delle coordinate x, y e z sono gaussiane con varianza direttamente proporzionale al numero dei passi N.

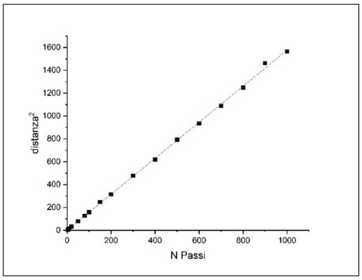
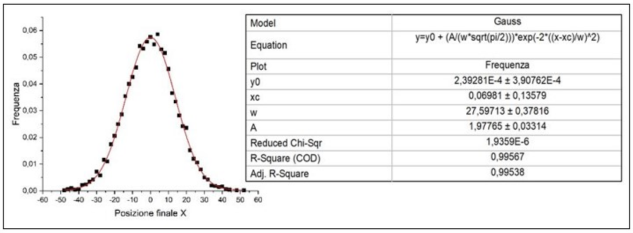
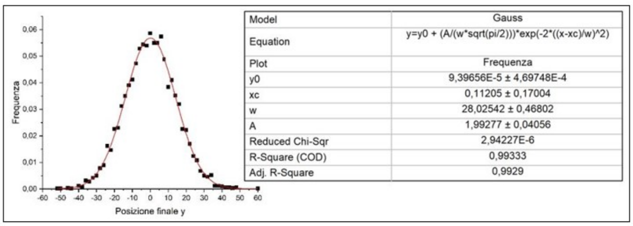


Figura 5: Andamento del quadrato della distanza in funzione del numero N dei passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk bidimensionale e simmetrico.



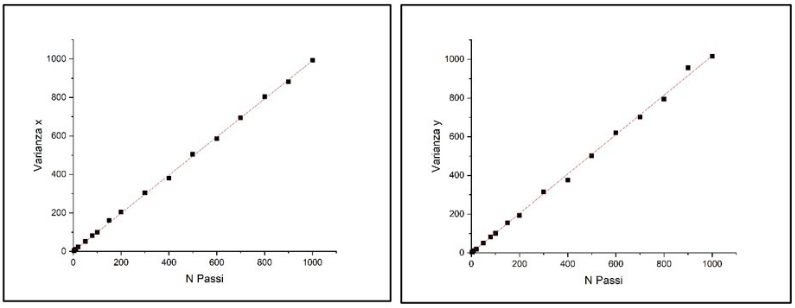
(a)



(b)

Figura 6: Distribuzione delle posizioni finali x ed y dopo 200 passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk bidimensionale e simmetrico

[19] L'algoritmo utilizzato in tutte le simulazioni crea le coordinate degli spostamenti $(x, y$ e $z)$ in modo random con possibilità discreta di movimento in avanti $(+1)$ ed indietro (-1).



(a) (b)

Figura 7: Dipendenza lineare della varianza di x e di y dal numero N di passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk bidimensionale e simmetrico.

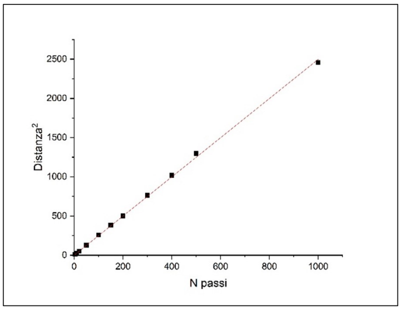
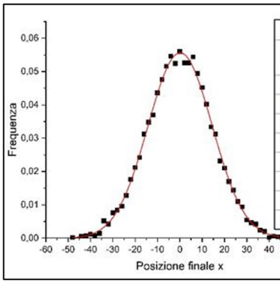
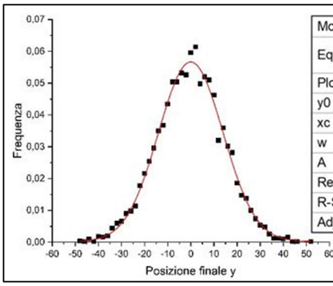


Figura 8: Andamento del quadrato della distanza in funzione del numero N dei passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk tridimensionale e simmetrico.



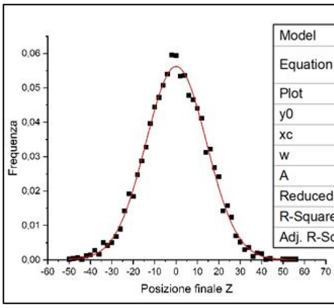
Model	Gauss
Equation	y=y0 + (A/(w*sqrt(pi/2)))*exp(-2*((x-xc)/w)^2)
Plot	Frequenza
y0	-3,55975E-5 ± 3,67126E-4
xc	0,13641 ± 0,12139
w	28,73973 ± 0,35707
A	2,00552 ± 0,03145
Reduced Chi-Sqr	1,40855E-6
R-Square (COD)	0,99667
Adj. R-Square	0,99645

(a)



Model	Gauss
Equation	y=y0 + (A/(w*sqrt(pi/2)))*exp(-2*((x-xc)/w)^2)
Plot	Frequenza
y0	2,51122E-4 ± 5,87207E-4
xc	-0,02646 ± 0,20433
w	27,95677 ± 0,57596
A	1,97648 ± 0,05012
Reduced Chi-Sqr	4,21095E-6
R-Square (COD)	0,99038
Adj. R-Square	0,98974

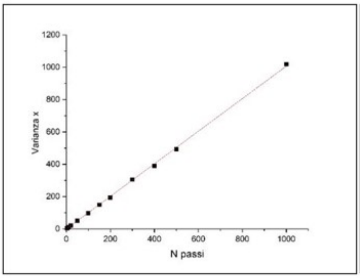
(b)



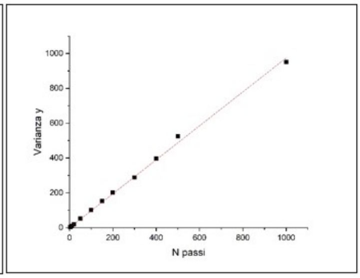
Model	Gauss
Equation	y=y0 + (A/(w*sqrt(pi/2)))*exp(-2*((x-xc)/w)^2)
Plot	Frequenza
y0	1,07327E-4 ± 4,28507E-4
xc	0,10283 ± 0,16593
w	28,30076 ± 0,44826
A	1,99014 ± 0,03791
Reduced Chi-Sqr	2,71405E-6
R-Square (COD)	0,99367
Adj. R-Square	0,99328

(c)

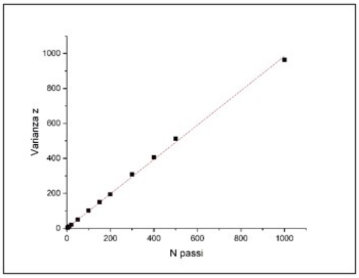
Figura 9: Distribuzione delle posizioni finali x, y e z dopo 200 passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk tridimensionale e simmetrico.



(a)



(b)



(c)

Figura 10: Dipendenza lineare della varianza di x, y e di z dal numero N di passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk tridimensionale e simmetrico

Gli oroscopi come random walk

Come seconda verifica della natura casuale degli oroscopi è stato studiato il random walk per determinare delle eventuali analogie nel processo di associazione dei contenuti degli oroscopi alla propria personalità.
Consideriamo un dodecagono ai cui lati vengono associati i dodici segni dello zodiaco (vedi figura 11). Nella prima parte ogni studente, dei 200 partecipanti a questa esperienza, ha generato una sequenza di 44 oroscopi (una scelta al giorno) ritenuti attribuibili alla propria personalità. Se numeriamo i segni zodiacali da 1 a 12 avremo 200 sequenze di 44 valori, compresi tra 1 e 12, corrispondenti alle scelte personali di ciascun alunno. Adesso si procede centrando il dodecagono nell'origine di un sistema di assi ortogonali cartesiani con il punto medio del lato 1 sull'asse delle ascisse. Per comodità il dodecagono viene costruito con l'apotema (altezza dei dodici triangoli isosceli che compongono il dodecagono) pari ad una unità. I dodici angoli al centro sono pari a 30° ciascuno. Il percorso, derivante dalle scelte degli oroscopi, viene costruito spostando di volta in volta il centro del dodecagono sul punto medio del lato corrispondente allo zodiaco selezionato. Se, ad esempio, uno studente riconosce come proprio oroscopo il numero 2, 10 e 7 in tre tentativi diversi su tre panieri di 12 oroscopi diversi (nel nostro caso una scelta al giorno), il percorso che ne deriva si costruisce unendo i punti O, A, B, C. Il punto O coincide con l'origine degli assi, il punto A con

il punto medio del lato 2. Si centra il dodecagono, senza cambiarne l'orientamento, sul punto A e il punto medio del lato 10 diventa il punto B. Si centra nuovamente il dodecagono, senza cambiarne l'orientamento, sul punto B e il punto medio del lato 7 diventa il punto C. Si procede in questo modo fino a completamento della sequenza.

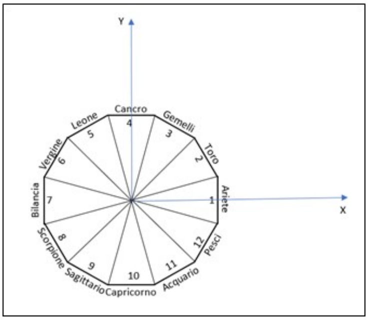


Figura 11: Dodecagono con l'associazione dei segni dello zodiaco.

La distanza d del punto finale della sequenza dal centro degli assi (punto di partenza) può essere calcolata come:

$$d = \sqrt{(x_{tot})^2 + (y_{tot})^2} \tag{9}$$

Dove x_{tot} ed y_{tot} rappresentano le componenti della posizione finale (rispetto all'origine degli assi), rispettivamente sull'asse x ed y, ottenuti come somma algebrica dei singoli spostamenti che compongono tutta la sequenza del percorso. Se il lato interessato è l'ennesimo si può verificare che $x_n = cos[30(n-1)]$ ed $y_n = sin[30(n-1)]$. Gli angoli sono misurati in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle ascisse. Utilizzando i dati raccolti in precedenza sono state create 200 sequenze, una per ogni studente partecipante, di 44 passi ciascuna. La figura 12 riporta l'andamento del quadrato della distanza in funzione del numero N di passi mentre le figure 13a e 13b mostrano le distribuzioni delle coordinate x ed y dopo 44 passi, mediati su 200 sequenze.

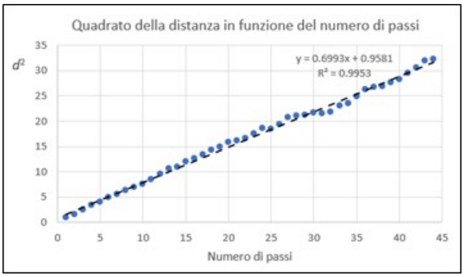
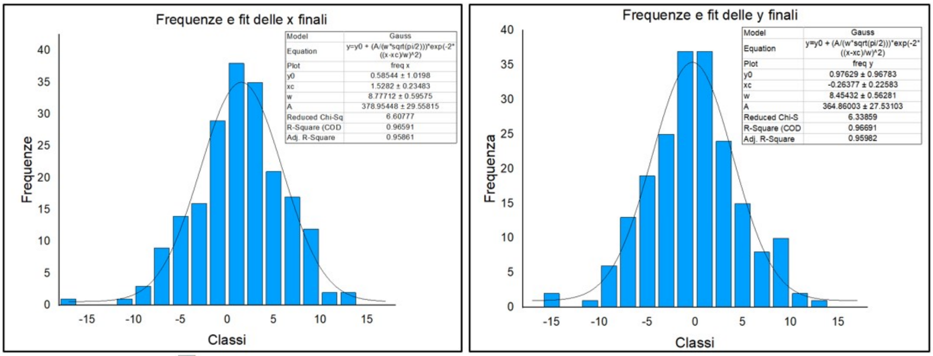


Figura 12: Linearità tra il quadrato della distanza ed il numero dei passi con i dati reali, 200 sequenze da 44 passi.



(a) (b)

Figura 13: Distribuzione delle posizioni x ed y finali ricavati con l'algoritmo del dodecagono applicato ai dati reali, 200 sequenze da 44 passi.

La figura 14 mostra, invece, un grafico a dispersione delle posizioni x ed y. Ogni punto su questo grafico rappresenta una posizione finale a distanza d dall'origine, di coordinate x ed y, al 44-esimo passo per ognuno delle 200 sequenze (una per alunno). La figura mostra un addensamento centrale le cui dimensioni dipendono dalla deviazione standard delle distribuzioni di x e di y (vedi figure 13a e 13b).

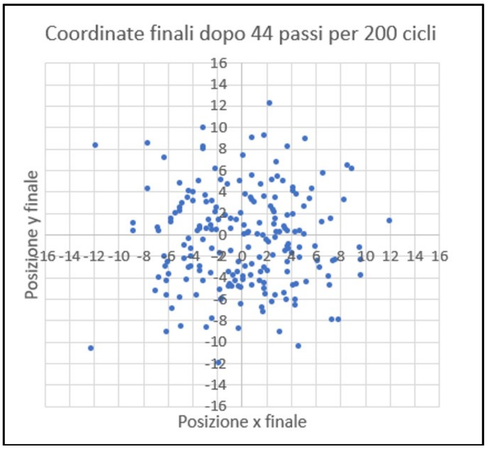


Figura 14: Coordinate x ed y finali dopo 44 per tutti i 200 cicli. La distanza di ogni punto dall'origine rappresenta la distanza finale percorsa dopo 44 passi. Si può dimostrare che al crescere del numero di passi aumenta il numero di volte che si ripassa dal punto di partenza.

Conclusioni

L’andamento lineare del quadrato della distanza in funzione del numero N dei passi, illustrato in figura 12 e l’andamento gaussiano, evidenziato dal fit della distribuzione dei dati x ed y nelle figure 13a e 13b, mostrano un accordo con le caratteristiche del random walk bidimensionale analizzato in precedenza (vedi figure 5, 6a e 6b). Possiamo quindi concludere che il processo di associazione dei contenuti degli oroscopi alla propria personalità, analizzato con l’algoritmo del dodecagono come descritto in questo lavoro, è del tutto casuale e del tipo random walk. Il metodo sperimentale e gli strumenti di analisi scientifica hanno permesso, a tutti gli studenti partecipanti al progetto, di verificare, sperimentare e rendersi conto dell’inattendibilità degli oroscopi. Questo percorso ha dato la possibilità anche di riflettere su quanto i fenomeni pseudoscientifici siano divaganti, diffusi e di come attecchiscano facilmente nell’immaginario collettivo rafforzando, così, la propria percezione di veridicità. Constatare con gli studenti che questi fenomeni potranno essere contenuti e combattuti solo investendo sulla cultura scientifica e sull’educazione dei giovani al dubbio scientifico, ha rappresentato il miglior successo formativo che questo percorso di educazione civica scientifica sperava di ottenere.

Bibliografia

[1] LIGUORI D. et al. “Progetto interdisciplinare: Scienza e Profezia”, Giornale di Astronomia, F. Serra Vol. 38 n°4 dicembre 2012.

[2] TAYLOR, J. R., “Introduzione all’analisi degli errori”, Zanichelli, Bologna (1986).

[3] LIGUORI, D., SERAFINI G.: “Fisica in Laboratorio” (Editoriale Progetto 2000, Cosenza) 2009.

[4] LIGUORI D.: “La statistica con la macchina di Galton”, La Fisica nella Scuola, Anno XLVII n°4, Ott.- Dic. 2014.

[5] STACHEL J.: “L’anno memorabile di Einstein”, Edizione Dedalo, pp. 97-109, Bari (2001)

[6] Annalen der Physik, 17, 1905, pp. 549-560

Periodico di Matematiche **98** (2022), pp.143–155

Matematica e Musica: una piacevole sinfonia[1]

Mathematics and Music: a pleasant symphony

Nicola Fusco[2]

Abstract

In the 2020/2021 school year, in the first class of the Liceo Scientifico "A. Scacchi" in Bari with a specialization in Mathematics, an intertwined path between Mathematics and Music has developed. The pupils initially followed, in laboratory mode, the path of the Pythagorean construction of the musical scale, through analysis and comparisons on musical pieces chosen ad hoc and through the construction of a "sound box" which, with poor material, reproduces the monochord of Pythagoras. We then moved on to creative interweaving: geometric transformations and the basics of substitute cryptography were presented, concepts used later to generate or vary phrases on scores. In groups, pupils composed completely original pieces using these mathematical tools and their creativity.

Presentazione

Il progetto di cui parleremo nasce per mettere in evidenza il legame tra la Matematica e la Musica: la Matematica come strumento per conoscere meglio la Musica e la Musica come laboratorio per la Matematica. Si è costruito un percorso che ha oscillato tra Matematica, Musica e Fisica per mostrare la Matematica non fine a sé ma dialogante con le altre discipline. Il seguente quadro sinottico riassume gli argomenti che sono stati affrontati.

[1] *Per questo articolo all'autore è stato assegnato il premio Bruno Rizzi 2022.*

[2] Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "A. Scacchi" di Bari (BA), nicola.fusco@gmail.com, fusco.nicola@liceoscacchibari.it.

Musica	Matematica	Fisica
Le note e la scala dodecafonica	Prodotto e potenza di frazioni	Le onde in un oggetto elastico
Il timbro degli strumenti musicali	Suddivisione in parti uguali di un segmento	La frequenza fondamentale e gli armonici superiori delle onde stazionarie
La notazione musicale sul pentagramma	Le trasformazioni geometriche, la crittografia per sostituzione	I grafici orari

Il progetto ha coinvolto una classe prima di Liceo Scientifico ad Indirizzo Matematico, composta da 24 alunni, di cui circa la metà studiava uno strumento musicale o lo aveva fatto nel recente passato, ed è stato integrato completamente nel curricolo didattico della classe, svolto con una calendarizzazione di due ore settimanali in orario antimeridiano con il docente di Matematica e Fisica della classe.
L'attività è iniziata con la classe in presenza ma, con il procedere delle condizioni sanitarie regionali, la classe ha finito per seguire completamente a distanza. Le attività non ne hanno comunque risentito in quanto si è riusciti a svolgere le attività manuali anche da casa (grazie alla scelta dei materiali poveri) mentre la parte finale prevedeva l'utilizzo di software e quindi questa fase è stata facilitata dall'accesso degli alunni ai propri PC. La distanza non ha penalizzato l'aspetto laboratoriale dell'attività, anzi sono stati valorizzati il lavoro individuale e l'interazione interna ai gruppi.

Passo 1: le note e le corde

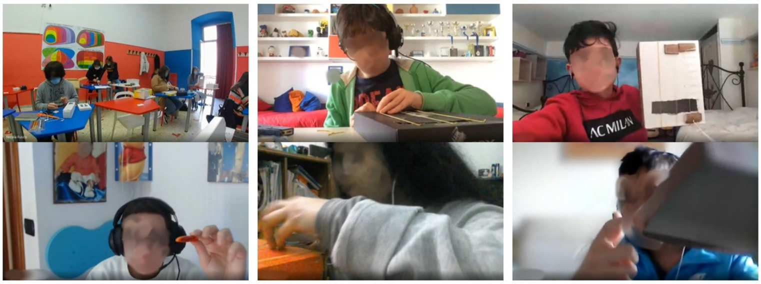
L'attività è iniziata con l'ascolto di un brano musicale[3] e successivamente la classe è stata stimolata a riflettere e rispondere alle seguenti domande:

- Perché l'acqua del pesce rosso vibra quando la chitarrista si avvicina?
- Perché il violino e la chitarra sembrano suonare bene insieme anche se emettono suoni molto diversi tra loro?
- Che legame può esserci tra matematica e musica?

Gli studenti si sono confrontati sulle domande e le risposte che ognuno di loro ha elaborato. Quasi tutti hanno messo in relazione l'evento del pesce rosso (la cui acqua inizia ad agitarsi all'avvicinarsi della chitarrista) con l'emissione del suono, sebbene nessuno abbia parlato di onde. Anche riguardo alla seconda domanda la classe si è ritrovata concorde nel giustificare l'armonia dei suoni perché gli strumenti suonavano le stesse note. Ma a questo punto è sorta un'altra domanda: cosa significa suonare la stessa nota? La risposta a questa domanda è stata rinviata al passo successivo del progetto. La terza domanda ha lasciato tutti un po' spiazzati, nessuno ha dato delle risposte sicure, solo qualcuno ha ipotizzato un collegamento tramite il ritmo o la metrica musicale. L'attività è proseguita con la costruzione di una "scatola sonora" con materiale povero: scatola da scarpe, elastici di gomma e nastro adesivo[4].

[3] "Canon Rock" di Jerry Chang, nella versione punk della band Golden Salt https://tinyurl.com/canonrockGS.

[4] Video tutorial: https://tinyurl.com/scatolasonora.



La classe al lavoro sulla scatola sonora, a scuola e a casa.

In prima battuta, avendo fatto tagliare gli elastici a lunghezze diverse, la scatola è stata utilizzata per fissare il lessico: in particolare la distinzione tra suoni acuti e gravi. Successivamente agli studenti è stato assegnato il compito di "giocare" a casa con la propria scatola sonora e annotare tutte le osservazioni e intuizioni a riguardo. L'incontro successivo è iniziato con la relazione da parte degli alunni su tali esperimenti che hanno provato a suonare la scatola pizzicando gli elastici in punti diversi, a pizzicarli con il foro aperto e chiuso, a pizzicarli tenendoli bloccati ad una lunghezza più corta rispetto a quella determinata dalla scatola. In tutti i casi sono state notate variazioni nel suono emesso: gli alunni già in possesso di un background musicale hanno riconosciuto facilmente le condizioni in cui venivano emesse note più alte e note più basse. A questo punto erano pronti per il passo successivo.

Passo 2: le scale, le onde, la frequenza

Questo passo del progetto è iniziato con un'introduzione generale al personaggio di Pitagora e al suo ruolo filosofico/mistico nella Grecia classica che va al di là del suo famoso teorema di geometria. Successivamente si è approfondito il ruolo di Pitagora nella storia della musica con la visione del video "Paperino e la Matemagica"[5] e narrando l'origine del suo interesse per la musica: passando vicino ad un'officina di un fabbro aveva sentito i colpi dei martelli su un'incudine, martelli che avevano dimensioni diverse e che producevano suoni diversi, aveva quindi osservato che, quando due martelli colpivano insieme l'incudine, a volte i due suoni producevano un accordo armonioso, a volte dissonante e aveva notato che questo accadeva in base al rapporto tra le dimensioni dei martelli.

Pitagora aveva quindi cercato di riprodurre il fenomeno con uno strumento apposito. A questo punto in classe è stato mostrato un monocordo di Pitagora, regolato e suonato in diversi modi per mostrare il legame tra tensione e lunghezza delle corde con le note emesse e si è fatto notare come la scatola sonora costruita dagli alunni non fosse altro che una sua versione meno precisa. Dopodiché tale strumento è stato usato per approfondire i dettagli di quanto visto nel video Disney riguardo al collegamento dei numeri razionali con le note musicali e la costruzione della scala musicale dodecafonica. Agli alunni è stato quindi chiesto di calcolare una successione di frazioni nel modo seguente: partendo da 1 ogni termine della successione è ottenuto dal termine

[5] https://tinyurl.com/paperinomatemagica dal minuto 2:47 al minuto 6:59.

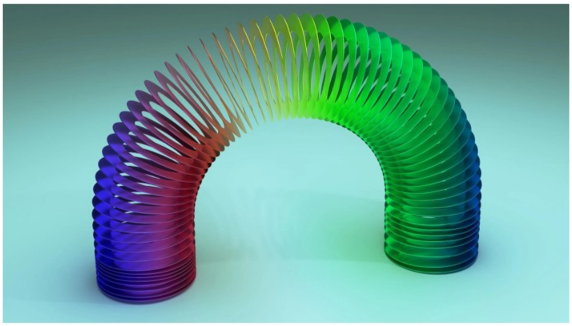
termine precedente moltiplicandolo per $\frac{2}{3}$ e poi attuando il seguente controllo,

- Se il risultato ottenuto è maggiore di $\frac{1}{2}$ lo si lascia invariato,
- Se il risultato ottenuto è minore di $\frac{1}{2}$, il termine della successione lo si ottiene raddoppiando il risultato appena calcolato.

Ogni termine va anche valutato in forma decimale con la calcolatrice in modo da arrestare la procedura quando gli alunni ritenevano di aver ottenuto una frazione praticamente indistinguibile da $\frac{1}{2}$.

Gli alunni hanno quindi determinato la seguente successione di frazioni: $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{64}{81}, \frac{128}{243}$. Tutti gli alunni hanno valutato di arrestare la procedura a questa frazione dato che $\frac{128}{243} = 0.5267\ldots$ ed è distante da 1/2 per meno di tre centesimi. A questo punto agli alunni è stato chiesto di misurare una delle corde della scatola sonora e segnare sul cartone della scatola le frazioni ottenute in relazione a tale lunghezza. Facendo suonare la corda prima libera e poi tenendola bloccata in corrispondenza dei diversi segni (seguendo non l'ordine della successione ma in ordine decrescente di lunghezza), gli alunni hanno potuto verificare che la successione dei sei suoni ottenuti con queste lunghezze corrisponde ad una scala musicale. I musicisti hanno poi osservato che le note corrispondenti a 1 e $\frac{1}{2}$ sono in realtà la stessa nota di due ottave consecutive.

A questo punto è stato posto alla classe il problema di capire cosa determina il suono e cosa cambia da una situazione all'altra quando si sentono note diverse. Dal confronto tra gli alunni è emerso che dovesse essere la vibrazione delle corde a produrre il suono, dato che quella è l'unica cosa che differenziava la scatola sonora quando è silenziosa da quando emette suoni e che dovesse esserci un collegamento diretto tra la lunghezza o la tensione della corda e la nota emessa. Tuttavia, forse comprensibilmente, la classe non è arrivata in modo del tutto autonomo a stabilire come il suono poi si propaghi dalla corda all'orecchio e come la lunghezza o la tensione della corda influenzino la nota. Di conseguenza, per fornire uno spunto di riflessione su questi punti rimasti in sospeso, si è passati all'analisi di un sistema meccanico che permette di visualizzare più facilmente questi elementi che appaiono "invisibili" su una corda tesa vibrante: la molla slinky.



Un esempio di molla slinky.

Questa molla è molto lunga e presenta una costante elastica molto piccola, per cui può essere allungata e perturbata senza troppi sforzi. La piccolezza della costante elastica genera inoltre una propagazione molto lenta delle perturbazioni attraverso di essa, e pertanto si presta benissimo a visualizzare le caratteristiche costitutive delle onde elastiche: frequenza, lunghezza d'onda e interferenza. Dopo aver posizionato la molla slinky in orizzontale sul piano della cattedra (come mostrato nella figura seguente), la molla è stata perturbata in vari modi in modo da mostrare la propagazione ondosa mediante il meccanismo della successione di compressioni e dilatazioni e successivamente il fenomeno dell'interferenza di onde che giungono in uno stesso punto da sorgenti diverse (fenomeno che è alla base della localizzazione delle sorgenti sonore).[6]
Dopodiché ogni alunno ha sperimentato autonomamente (sul banco o a casa) quanto eseguito alla cattedra dal docente, mediante molle slinky fornite dalla scuola o che gli alunni a casa si erano procurati su richiesta del docente.

La molla slinky disposta sul tavolo.

A questo punto gli alunni, dopo una semplice sollecitazione, hanno collegato quanto sperimentato sulla slinky al suono e immaginato che tale meccanismo di compressione e dilatazione potesse avvenire anche attraverso l'aria (era già noto, dagli studi effettuati nella scuola media di I grado, che il suono ha bisogno della presenza dell'aria per propagarsi) e, riprendendo in mano la scatola sonora, hanno prestato attenzione che a lunghezze o tensioni diverse delle corde corrispondevano oscillazioni più o meno lente e quindi a frequenze diverse delle onde emesse in aria.
Ecco cosa distingue le note musicali tra loro! Ecco perché le stesse note emesse da strumenti diversi "suonano bene insieme"!
Su questa scoperta si è chiuso il secondo passo e la fase del progetto dedicata alla generazione delle note e alla matematica e fisica sottostante. Era giunto il momento di fare musica "sul serio" e grazie alla matematica!

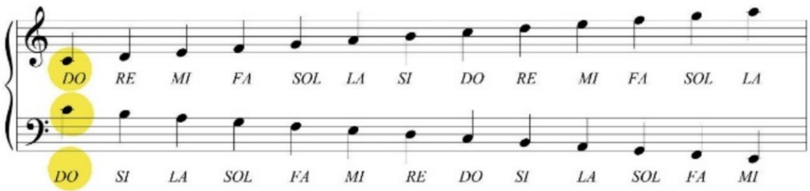
Passo 3: il pentagramma come spazio geometrico

Tra il passo 2 e il 3 le scuole superiori pugliesi sono entrate in DaD. Ma ciò ha avuto una ricaduta positiva perché da questo momento lo svolgimento del progetto si è avvantaggiato della disponibilità per ogni alunno di un computer o un tablet su cui operare sui software coinvolti nelle attività. È stato introdotto il pentagramma e la rappresentazione su di esso dell'altezza e della durata delle note (e delle pause). Su sollecitazione del docente alcuni alunni hanno colto l'analogia tra pentagramma e i diagrammi orari studiati in fisica: il pentagramma musicale è una sorta di grafico cartesiano che ha sull'asse delle ascisse il tempo e sull'asse delle ordinate l'altezza delle note (a ciò fanno parziale eccezione le alterazioni bemolle e diesis).

[6] https://tinyurl.com/ondeslinky mostra la ripresa di cosa è stato mostrato.

Il pentagramma come diagramma orario della musica.

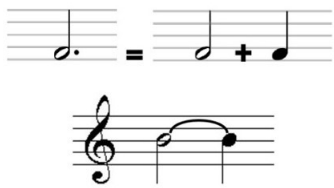
Inoltre esiste un'origine delle altezze fissata con la chiave dello spartito: la chiave di violino (la "f maiuscola") indica con il "ricciolo" il rigo del SOL, la chiave di basso (la "virgola") indica, mediante i due punti, la riga del FA.



La chiave dello spartito come "origine" delle altezze sul pentagramma.

La differenza fondamentale, rispetto ai diagrammi orari, è che l'asse delle ascisse è solo qualitativo, perché il posizionamento orizzontale delle note sul pentagramma serve solo a rappresentarne la successione temporale, mentre la rappresentazione quantitativa della loro durata è data mediante una convenzione grafica sui "disegni" che rappresentano le diverse note.

Segno grafico	Nome	Durata
𝅝	***intero*** (o semibreve)	***4/4***
𝅗𝅥	***metà*** (o minima)	***2/4***
♩	***quarto*** (o semiminima)	***1/4***
♪	***ottavo*** (o croma)	***1/8***
𝅘𝅥𝅯	***sedicesimo*** (o semicroma)	***1/16***
𝅘𝅥𝅰	***trentaduesimo*** (o biscroma)	***1/32***
𝅘𝅥𝅱	***sessantaquattresimo*** (o semibiscroma)	***1/64***



Convenzioni grafiche per la durata delle note.

Questa introduzione è stata "sperimentata" passo passo dagli alunni tramite il software gratuito MuseScore[7] che si presenta innanzitutto come un editor molto versatile di spartiti ma che permette poi anche di suonare qualunque spartito sia stato composto grazie ad un emulatore MIDI interno. In questo modo gli alunni hanno toccato con mano il significato di ogni aspetto della notazione musicale e nello stesso tempo hanno preso confidenza con un software che avrebbero usato più intensamente nell'immediato futuro.

[7] https://portableapps.com/apps/music_video/musescore_portable.

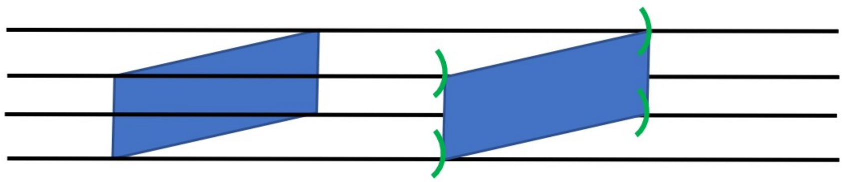
Passo 4: le trasformazioni geometriche nella musica

Sono state introdotte le varie trasformazioni geometriche che si possono eseguire sulle figure piane mediante costruzioni con riga e compasso. Ogni trasformazione geometrica è stata affiancata da una corrispondente trasformazione eseguita sulle note sul pentagramma. Gli alunni, dopo la definizione di ogni trasformazione e la spiegazione della sua esecuzione con riga e compasso, hanno realizzato la trasformazione geometrica su un foglio di carta e poi l'hanno eseguita con MuseScore su un gruppo di note prestabilito, ascoltandone poi l'effetto.

Traslazioni

La **traslazione** è la riproduzione esatta di una figura in una posizione diversa da quella iniziale e può essere eseguita con riga e compasso con la seguente successione di operazioni:

- si tracciano le rette parallele passanti per i vertici del poligono da traslare lungo la direzione di traslazione;
- si apre il compasso alla distanza di traslazione;
- per ciascun vertice del poligono si traccia un arco di circonferenza che intersechi la retta che lo attraversa in un altro punto;
- si uniscono ordinatamente i punti individuati.

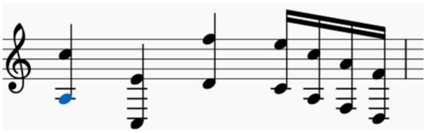


Traslazione di un parallelogramma con riga e compasso.

Sul pentagramma la traslazione ad un gruppo di note può essere applicata in verticale o in orizzontale con effetti musicali diversi. Dato che sul pentagramma in orizzontale si rappresenta la successione temporale delle note, traslare in orizzontale significa ripetere lo stesso gruppo di note identiche in successione.

Questo effetto può essere usato per creare una seconda voce che suona "in ritardo" lo stesso spartito della prima voce. In tal caso la traslazione orizzontale avviene su una "distanza temporale" inferiore rispetto alla durata dell'intero gruppo di note.

Ciò può essere fatto anche più volte, creando molteplici voci uguali che attaccano a intervalli regolari. In questo caso si ha una partitura nota come Canone Diretto, di cui l'esempio più famoso è "Fra Martino". In verticale il pentagramma rappresenta l'altezza delle note, quindi traslare un gruppo di note in verticale produce una partitura in cui vengono suonati contemporaneamente due gruppi di note separate tra loro da una distanza in altezza costante. Si hanno in questo caso i cosiddetti canoni di terza, o di quinta, o altro, in base alla distanza in altezza tra le voci. Un esempio è proprio il brano Canon Rock ascoltato nella prima lezione.



La combinazione delle due traslazioni (cioè l'applicazione di una traslazione "obliqua") corrisponde, in gergo musicale, alla modulazione: una stessa frase musicale viene suonata più volte e, ad ogni ripetizione, il gruppo di note viene alzato o abbassato rigidamente di uno stesso valore.

Nella musica pop la modulazione è spesso usata come espediente per produrre un coinvolgimento emotivo crescente durante il brano. Un esempio molto interessante e non banale di uso di questa tecnica è nel brano «Love On Top» di Beyoncé[8], dove ci sono 4 modulazioni consecutive, ciascuna di un semitono (e quindi con un innalzamento complessivo di ben due toni).

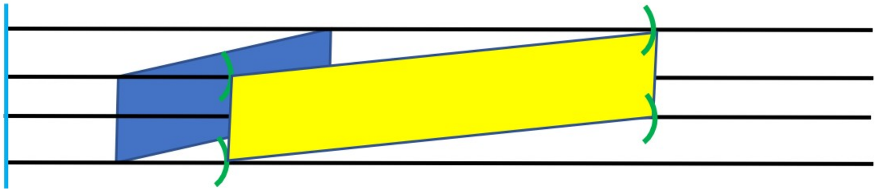
Dilatazioni

La **dilatazione** è la riproduzione di una figura in cui le distanze lungo una direzione sono moltiplicate per uno stesso fattore e può essere eseguita con riga e compasso con la seguente successione di operazioni:

- si tracciano le rette parallele passanti per i vertici del poligono da dilatare lungo la direzione di dilatazione e una retta ad esse perpendicolare;
- per ogni vertice del poligono si punta il compasso sul punto di intersezione tra la retta parallela passante per quel vertice e la perpendicolare di riferimento e si apre il compasso fino al vertice scelto;

[8] video reperibile all'URL https://tinyurl.com/modulazionebeyonce

- si allarga l'apertura così misurata in modo da moltiplicare l'ampiezza originaria per il fattore di dilatazione e si traccia un arco sulla stessa retta;
- si uniscono tra loro ordinatamente i punti così individuati.



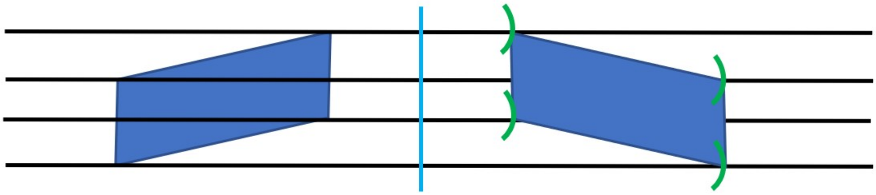
La dilatazione di un gruppo di note può essere applicata sostanzialmente in un unico modo: in orizzontale: Una dilatazione verticale, dovendo essere fatta rispetto ad un valore di frequenza di riferimento, altererebbe i rapporti reciproci tra le note rovinando conseguentemente l'armonia.
Dilatazione orizzontale in questo caso significa aumentare o ridurre la durata di tutte le note di uno stesso fattore, tipicamente una potenza di 2. Nell'esempio che segue la prima battuta nel primo pentagramma è stata raddoppiata in durata nel secondo pentagramma.

La dilatazione è interessante quando viene usata per generare voci diverse di uno stesso brano che eseguono la stessa melodia a velocità diverse.

Riflessioni

La **riflessione speculare**, detta anche **simmetria assiale**, è la riproduzione di una figura invertendone la disposizione rispetto ad una direzione e anche questa trasformazione può essere eseguita con riga e compasso con l'opportuna sequenza di operazioni:

- si tracciano le rette parallele passanti per i vertici del poligono da riflettere che siano perpendicolari alla retta di riflessione (asse di simmetria);
- Si punta il compasso su ciascuno dei punti di intersezione tra le rette parallele e l'asse di simmetria e lo si apre fino al vertice del poligono posto sulla stessa retta parallela;
- con tale apertura si traccia un arco di circonferenza sulla stessa retta parallela ma dalla parte opposta rispetto all'asse di simmetria;
- si uniscono ordinatamente i punti così individuati.



Riflessione verticale significa suonare contemporaneamente due gruppi di note in cui ad ogni innalzamento di tono in un gruppo corrisponde un equivalente abbassamento di tono per l'altro, e viceversa. I brani con questa caratteristica sono detti Canoni Inversi.

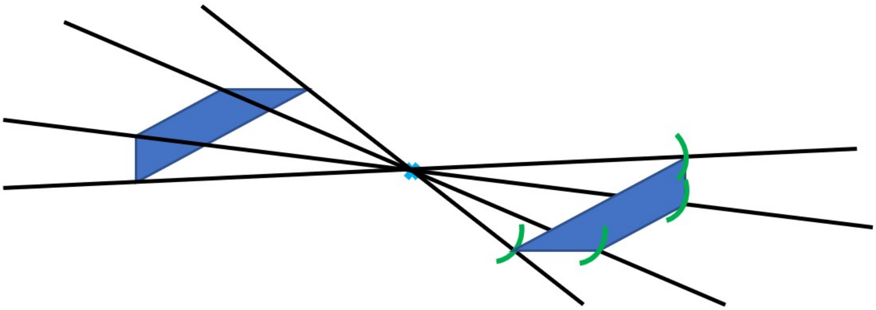
Riflettere in orizzontale sul pentagramma significa ripetere lo stesso gruppo di note invertendo l'ordine di esecuzione.

La riflessione orizzontale può essere usata per scrivere due voci diverse di una partitura. In questo caso le due voci suonano il medesimo spartito ma una delle due lo esegue al contrario. Le partiture con questa caratteristica sono detti Canoni Retrogradi o Cancrizzanti. Sono tali i Canoni 1 e 2 di Bach.

Simmetria puntuale

La **simmetria puntuale** è la riproduzione di una figura dopo una rotazione di 180° intorno ad un punto. Le operazioni per costruirla sono:

- si tracciano le rette che passano per i vertici del poligono da trasformare e il punto del piano che fa da centro di simmetria;
- si punta il compasso nel punto prescelto e lo si apre fino a ciascun vertice del poligono;
- si traccia un arco con questa apertura sulla retta corrispondente dal lato opposto rispetto al centro di simmetria;
- si uniscono ordinatamente i punti così ottenuti.

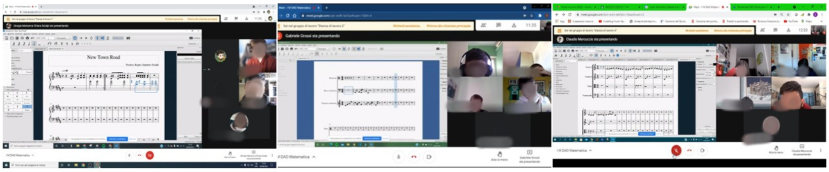


Come è noto la simmetria puntuale equivale a due simmetrie assiali, rispetto a due rette perpendicolari tra loro. Pertanto, in musica, usare questa trasformazione porta alla composizione di una partitura che unisce insieme le caratteristiche del Canone Inverso e del Canone Cancrizzante.

Passo 5: composizione matematica

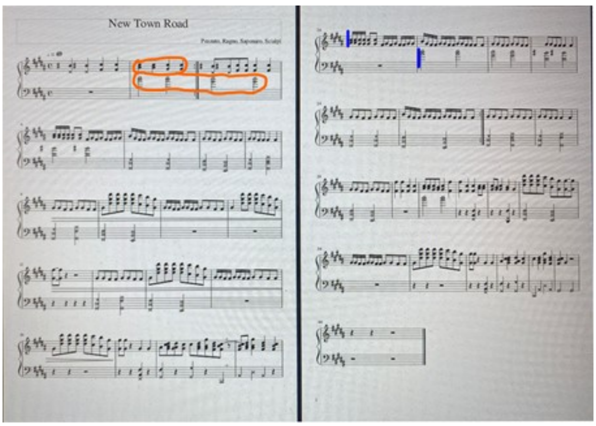
Dopo aver sperimentato gli effetti delle trasformazioni geometriche gli alunni hanno applicato quanto appreso in forma creativa.

La classe è stata suddivisa in cinque gruppi che contenessero ciascuno un minimo di 2 alunni con esperienza musicale pregressa. Ogni gruppo ha composto un brano strumentale della durata di circa 3 minuti, partendo da una frase musicale di loro scelta (del tutto originale o ricavata da un brano preesistente) e rielaborandola mediante le trasformazioni geometriche sullo spartito. Il software MuseScore si è ben prestato a questa operazione grazie all'ampia libertà di intervento che permette. Gli alunni hanno lavorato suddivisi in diverse videoconferenze per tre sessioni da due ore ciascuna.



Alcuni gruppi durante il lavoro di composizione.

Successivamente la classe è stata "rimescolata" in altri cinque gruppi con una consegna quasi identica a quella precedente ma con un'importante differenza: la frase musicale da cui partire è stata generata mediante il sito di crittografia musicale www.clarallel.com: questo sito sfrutta un algoritmo che fa corrispondere ad ogni lettera o gruppo di lettere un semitono con una specifica durata, per cui è possibile tradurre in musica qualunque parola o frase si digiti. Oltre al nuovo compito di composizione ad ogni gruppo è stato anche chiesto di analizzare le "traduzioni" in modo da scoprire l'algoritmo di crittazione, richiamando in tal modo un'attività svolta a inizio sulla crittografia classica.
L'attività di composizione ha quindi portato alla stesura di 10 brani diversi, tutti originali e con una certa orecchiabilità. Su YouTube è presente l'intera playlist ascoltabile liberamente all'URL https://tinyurl.com/playlistIM2021. Di seguito sono riportate alcune delle partiture prodotte. In uno degli spartiti sono evidenziate alcune delle trasformazioni applicate: in arancione una dilatazione temporale e in blu una traslazione di tonalità e di tempo.



Conclusioni

Il lavoro svolto è stato molto stimolante e si è arricchito costantemente grazie all'entusiasmo che la classe ha profuso durante tutto l'anno scolastico (anche durante l'attività didattica curricolare). Questa attività ha permesso di sviluppare in modo alternativo e, forse, più efficace sia il senso della Matematica come linguaggio unificante e strumento di espressione e creatività, sia il passaggio dalla rappresentazione geometrica al simbolismo, creando un precursore intuitivo rispetto a quello che rappresenterà più avanti la Geometria Analitica. Ha rappresentato inoltre un efficace modello di didattica per problemi, in quanto si sono affrontati con la matematica problemi non matematici.

Ringraziamenti

Per la realizzazione di questo progetto si ringraziano i Proff. MONTONE Antonella, FIORENTINO Michele e PERTICHINO Michele del gruppo MA.TE. di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università degli Studi "Aldo Moro" di Bari per la preziosa collaborazione.

Bibliografia

[1] IACINO, S., La Geometria di Bach, youtube.com/watch?v=O7WtoQ4ZiLw.

[2] MAOR, E., La musica dai numeri. Musica e matematica da Pitagora a Schoenberg, Codice Edizioni.

[3] PERES E., Concerto pitagorico: le basi matematiche della musica, Iacobelli.

[4] ValentinaD, https://blog.redooc.com/musica-e-matematica-legame-indissolubile/.

Insegnare matematica con la calcolatrice grafica[1]

Teaching mathematics with the graphic calculator

Massimo Esposito

Abstract

In this paper the use of a graphic calculator as a teaching tool will be discussed. Far from being just a "computing machine", the graphic calculator must be regarded as a powerful "teaching mediator", exerting a strong impact on the teacher effectiveness toward the goal of strengthening mathematical competences in students. The topic of assessment is also discussed, with reference to different kinds of tasks that may be proposed in a classroom equipped with graphic calculators.

Introduzione

L'utilizzo a fini didattici della calcolatrice grafica (nel seguito, CG) nelle scuole secondarie di secondo grado è aumentato in modo significativo negli ultimi dieci anni. Tale incremento è stato anche favorito da alcune meritorie iniziative provenienti dal ministero dell'istruzione, tra cui la decisione di autorizzare, a partire dal 2017, l'utilizzo delle calcolatrici nell'ambito degli esami di Stato del secondo ciclo di istruzione.

Tuttavia – nonostante questi importanti sviluppi – il livello di adozione di questo strumento nella prassi didattica della matematica e delle scienze sperimentali rimane abbastanza basso in confronto con altri paesi europei paragonabili all'Italia per dimensioni e/o cultura e tradizioni. Ciò è dovuto a una molteplicità di fattori, i più rilevanti tra i quali, in base alla nostra esperienza, sono:

[1] Gli screenshot inseriti nel testo dell'articolo sono prelevati da una calcolatrice CASIO fx-cg50, in quanto si tratta – di gran lunga – del modello più diffuso nelle scuole italiane. Naturalmente, le considerazioni sviluppate nell'articolo sono di carattere assolutamente generale, e prescindono dal modello di calcolatrice preso in considerazione.

- una carente conoscenza delle caratteristiche e delle potenzialità della CG;
- il sussistere di pregiudizi culturali in merito all'adozione di artefatti tecnologici visti come *strumenti compensativi* delle insufficienti competenze degli studenti;
- il diffuso timore, da parte dei docenti, che l'investimento di tempo necessario per prepararsi e preparare gli studenti all'utilizzo della CG sia eccessivo.

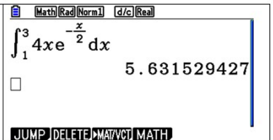
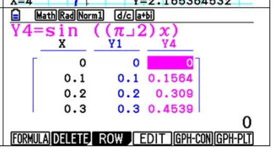
Dal primo di questi fattori dipendono in parte gli altri due; in particolare il secondo, peraltro, affonda le sue radici in una sorta di "riflesso condizionato" improntato alla diffidenza verso uno strumento che sembra "*sminuire*" l'importanza delle competenze di calcolo, "*semplificare senza sforzo*" la risoluzione di problemi matematici, "*dispensare*" gli studenti dall'acquisire le suddette competenze, e in definitiva renderli dipendenti (ancora di più di quanto già non siano!) dalla tecnologia.

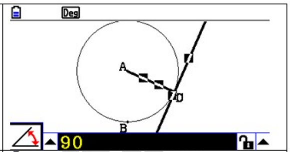
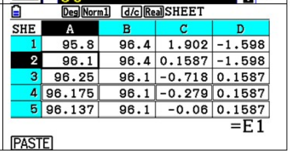
Ci proponiamo con questo articolo di illustrare come la CG possa invece rappresentare un potente strumento per rendere molto più efficace, coinvolgente e realmente *inclusiva* l'azione didattica del docente, a condizione di modificare opportunamente lo stile di insegnamento, in modo da valorizzarne appieno le caratteristiche e farne un vero e proprio *mediatore didattico*.

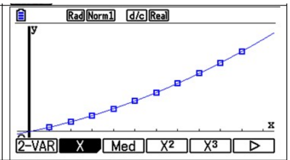
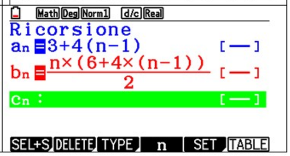
Che cos'è una calcolatrice "grafica"?

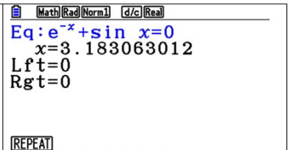
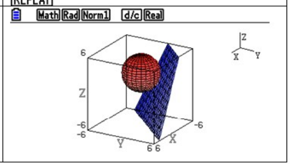
Non a caso abbiamo parlato sopra di "riflesso condizionato": in molteplici circostanze abbiamo potuto constatare come molti docenti, quando sentono parlare di "calcolatrice grafica", istintivamente appuntano l'attenzione sul sostantivo "calcolatrice" anziché sull'aggettivo "grafica", perdendo così di vista la ricchezza dello strumento e le opportunità didattiche che esso può offrire. Cerchiamo quindi innanzitutto di mettere a fuoco l'oggetto e le sue caratteristiche.

L'ambiente di lavoro è organizzato in menu, attraverso i quali si accede alle diverse applicazioni. Nella tabella seguente vengono riportate le più tipiche:

CALCOLATRICE SCIENTIFICA	
ELABORATORE GRAFICO	
RAPPRESENTAZIONE TABELLARE	

GEOMETRIA EUCLIDEA	
FOGLIO DI CALCOLO	

ELABORATORE STATISTICO	
SUCCESSIONI E RICORSIONE	

RISOLUTORE DI EQUAZIONI	
GEOMETRIA 3D	

Le diverse applicazioni condividono denominazioni e definizioni di oggetti matematici (espressioni, parametri, etc.) che sono collocati – dal punto di vista dell'architettura informatica – a un livello "globale", rendendo così estremamente intuitivo e agevole il passaggio tra rappresentazioni diverse (simbolica, grafica, tabellare) dello stesso oggetto. Questo è probabilmente l'aspetto principale da tenere in considerazione dal punto di vista didattico, in quanto il maggiore valore aggiunto dell'uso della CG risiede proprio nello sviluppo delle competenze relative all'utilizzo dei codici grafico-simbolici della matematica. Inoltre, questa flessibilità e ricchezza di rappresentazione viene incontro alle diverse intelligenze degli studenti che, come sappiamo, possono portarli a prediligere linguaggi diversi: simbolico, grafico, numerico, visuale.

Perché la calcolatrice grafica a scuola

Una calcolatrice "scientifica" può essere inserita nella prassi didattica senza che questo comporti grandi cambiamenti nell'ambiente di apprendimento: si tratta infatti di un dispositivo di "puro calcolo", che può intervenire solo in un punto ben preciso del processo risolutivo e che, pur risultando indispensabile in alcune circostanze (basti pensare alla valorizzazione di una funzione esponenziale o goniometrica in un punto non "notevole") non fornisce alcun contributo nelle fasi di esplorazione del problema, di individuazione della strategia risolutiva, di argomentazione e riflessione metacognitiva: in altre parole, una calcolatrice scientifica agisce esclusivamente come un "booster" delle capacità di calcolo dello studente.

All'opposto, *la CG non può essere inserita nella prassi didattica senza cambiarla profondamente*. È bene che il docente che valuta la possibilità di adottarla in classe sia pienamente consapevole del fatto che la funzione di mediazione didattica che essa può svolgere si esplica appieno e produce grandi benefici solo nel quadro di un ambiente di apprendimento profondamente diverso da quello tradizionale. Come non ci stanchiamo di ripetere, non si tratta certo di buttare alle ortiche il "fare scuola" tradizionale (lezione frontale – esercitazione – compito in classe – interrogazioni) ma di inserirlo in un quadro più ampio di esperienze di apprendimento e di valutazione diversificate (basate su approccio laboratoriale, problem posing & solving, protagonismo dello studente, autovalutazione, argomentazione, peer learning, valorizzazione degli atteggiamenti, adozione di indicatori di competenza *ortogonali rispetto ai contenuti*) che vada a realizzare un'autentica *didattica delle competenze*.

Ciò premesso, proviamo a individuare almeno alcuni di questi benefici che derivano dal pieno e corretto utilizzo didattico della CG:

- stimolo all'intuizione matematica, grazie alla facilità con cui essa consente di muoversi tra rappresentazioni diverse (simbolica, grafica, tabellare);
- attivazione di meccanismi di apprendimento basati sulla dimensione laboratoriale del «fare matematica» in aula, a casa, ovunque;
- promozione di competenze di problem solving, tramite formulazione e verifica di ipotesi, analisi what. . . if, diversificazione delle strategie risolutive;
- spostamento dell'attenzione dal calcolo alla modellizzazione, ai concetti, alle proprietà degli oggetti matematici;
- incoraggiamento alla collaborazione e al confronto tra pari;
- possibilità di lavorare su problemi altrimenti intrattabili;
- superamento dei limiti del disegno manuale;
- incoraggiamento degli studenti più sfiduciati, che vengono stimolati a "rimettersi in gioco".

L'elenco precedente non pretende certamente di essere esaustivo: piuttosto, esso riassume le osservazioni effettuate nel corso dell'esperienza diretta di insegnamento e le informazioni tratte dai sondaggi – formali e informali – effettuati nel corso degli anni presso i docenti che hanno "accettato la sfida" e hanno fatto della CG un importante elemento di innovazione didattica.

Coordinate didattiche

Per progettare una efficace attività didattica con l'uso della CG, occorre tenere ben presenti i seguenti punti chiave:

- la CG consente, in generale, di effettuare *osservazioni* (limitate alla finestra grafica in uso!) e formulare congetture. Tali *congetture*, nonché le ipotesi, le intuizioni, gli spunti che derivano dalle osservazioni effettuate con la calcolatrice devono essere inseriti dallo studente all'interno di un ragionamento matematico *argomentato*;

- La CG può essere usata nella fase di *esplorazione* del problema, per orientarsi nell'individuazione della strategia risolutiva, e nella fase di *verifica*, per riscontrare i risultati. Entrambe le modalità sono istruttive e stimolanti, e possono anche coesistere. L'utilizzo in fase di esplorazione si presta molto bene a un'organizzazione della lezione in piccoli gruppi di lavoro. Spetta al docente scegliere la modalità più adeguata, in funzione dell'argomento, delle caratteristiche della classe e dell'ambiente di apprendimento che ha in animo di realizzare;

- l'utilizzo da parte dello studente delle funzionalità della CG *può fornire evidenze* per la valutazione, sia nello svolgimento di attività «tradizionali», sia attraverso attività pensate specificamente per essere eseguite con la calcolatrice. È fondamentale, a tal fine, un'attenta riflessione da parte del docente sulla *formulazione* delle richieste e dei quesiti posti agli studenti, nonché sulla – eventuale! – predisposizione di attività e verifiche che richiedano *esplicitamente* l'uso della calcolatrice (nel seguito di questo lavoro vengono proposti alcuni esempi);

- il tipo di CG che prendiamo in considerazione *non effettua operazioni di calcolo simbolico* (sviluppo di espressioni, fattorizzazioni, semplificazioni, calcolo di limiti, funzione derivata, integrale indefinito, etc.). Nessuna «banalizzazione» della matematica, quindi: piuttosto, educazione all'utilizzo consapevole della calcolatrice come strumento di esplorazione matematica e verifica, e non come «lampada di Aladino» al servizio dello studente. Sotto questo aspetto, il ruolo del docente è di cruciale importanza, anche in un'ottica di promozione della competenza digitale;

- la CG risolve le equazioni attraverso *metodi numerici*, e fornisce soluzioni *approssimate* (1.571 e non $\pi/2$, 7.389 e non e^2, etc.). Questo aspetto è importante sia dal punto di vista della valutazione, in quanto la soluzione presentata fornisce informazioni sul procedimento risolutivo adottato dallo studente, sul ruolo in esso svolto dalla calcolatrice, sulla consapevolezza da parte dello studente delle peculiarità della risoluzione numerica, sia dal punto di vista culturale e professionale, per l'importanza che tali metodi rivestono nelle professioni di ambito tecnico-scientifico.

L'idea di fondo, da cui partire per costruire una progettazione didattica che valorizzi l'uso della CG, è che le competenze matematiche e le competenze di utilizzo della CG *si rinforzano a vicenda*.

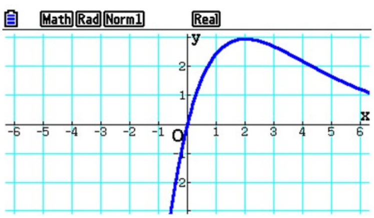
Esempi di attività "tradizionali" effettuate con la calcolatrice grafica

Nel seguito proponiamo due esempi di problemi analoghi a quelli tradizionalmente affrontati nel segmento finale del percorso del liceo scientifico, per discutere l'impatto derivante dall'uso della CG, con particolare attenzione all'aspetto valutativo.

Studio di funzione

"*Studia la funzione* $f(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{2}}$ *motivando opportunamente i risultati ottenuti e verificando, in particolare, che il suo grafico presenta un unico punto di flesso . Determina l'equazione della tangente al grafico della funzione nel punto F.*"

Il classico problema dello "studio di funzione" è un esempio molto significativo del cambiamento di prospettiva causato dall'uso della calcolatrice: mentre in una trattazione "tradizionale" il punto di arrivo è costituito dal grafico della funzione, in questo caso il grafico diventa il *punto di partenza*! Infatti, lo studente dotato di CG può immediatamente osservare sullo schermo un'immagine come quella riportata in figura:



Nella fase di "esplorazione" del problema, lo studente potrà agevolmente manipolare la finestra di visualizzazione ed effettuare indagini ed elaborazioni sul grafico stesso. Ad esempio, potrà:

- cambiare gli intervalli di visualizzazione $[xmin, xmax]$ e $[ymin, ymax]$;
- effettuare "*zoom in*" e "*zoom out*";
- "percorrere" il grafico della funzione con il cursore, oppure portarsi direttamente su qualunque punto del grafico stesso, osservando i valori assunti dalla funzione;
- individuare zeri, massimi e minimi relativi *all'interno della finestra grafica osservata*;
- visualizzare l'andamento delle derivate prima e seconda (*ma non l'espressione simbolica delle derivate!*);
- visualizzare la tangente al grafico in un punto e la sua equazione.

Quali evidenze per la valutazione potremo estrarre dal lavoro dello studente fornito di CG?

Innanzitutto, adottiamo come indicatori della nostra rubrica di valutazione quelli definiti dal ministero per la seconda prova scritta del liceo scientifico (D.M. 769/2018); per ciascuno di essi, proviamo a identificare alcune evidenze che possono concorrere alla valutazione.

1) *Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.*

Relativamente a dominio, segno, zeri, massimi e minimi relativi e assoluti, punti di flesso, monotonia, concavità, presenza di asintoti, continuità, lo studente potrà effettuare delle congetture basandosi sulle osservazioni nella finestra grafica, o dei riscontri di risultati ricavati analiticamente. Solo nello studio della parità la CG potrà dare allo studente una certezza, e solo nel caso in cui la funzione non sia pari né dispari! In ogni caso, congetture e riscontri presuppongono competenze di lettura e interpretazione corretta del grafico e dei dati significativi che da esso emergono. A questo proposito, è anche rilevante la presentazione dei risultati da parte dello studente: se il valore del massimo assoluto viene fornito come 2,943 anziché 8/e, c'è consapevolezza della natura approssimata di tale soluzione? Ovviamente, essa *emergerà dall'argomentazione che deve accompagnare la procedura risolutiva*.

2) *Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta*

Lo studente in possesso di competenze matematiche saprà trarre spunto dalle osservazioni effettuate con la CG per orientare la sua ricerca. Dovrà azionare, a tale scopo, conoscenze e abilità relative alle proprietà delle funzioni elementari, alle interpretazioni geometriche delle derivate prima e seconda, alle relazioni tra derivata prima e punti estremanti e tra derivata seconda e flessi del grafico. Ad esempio, l'individuazione del valore $8/e$ come massimo assoluto della funzione o la dimostrazione dell'unicità del punto di flesso in F di coordinate $\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$ richiederà una strategia di indagine e di argomentazione che, pur accompagnata e supportata dall'uso competente della CG, non potrà che scaturire dalle conoscenze e abilità dello studente.

3) *Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.*

Per quanto riguarda le evidenze relative agli aspetti procedurali e di calcolo, esse si presenteranno nei passaggi attraverso i quali lo studente dovrà individuare *tutti* gli zeri, *tutti* i massimi e minimi relativi, mostrare l'unicità del flesso in F, l'assenza di asintoti obliqui, le caratteristiche di monotonia, concavità, parità, la presenza di un asintoto orizzontale.

L'equazione della tangente in F potrà invece essere fornita direttamente dalla CG, ma i coefficienti saranno ricavati con tecniche numeriche, e saranno quindi di natura approssimata. Lo studente in possesso delle necessarie conoscenze e abilità sarà invece in grado di fornire i valori esatti dei coefficienti dell'equazione, oltre a descrivere il procedimento per la loro individuazione. Il docente che ritenga necessario enfatizzare l'importanza di queste specifiche conoscenze e abilità potrebbe formulare diversamente la richiesta, ad esempio:

«Determina, in funzione del parametro k, l'equazione della tangente (orizzontale, passante per l'origine, inflessionale) al grafico della funzione $f(x) = kxe^{-\frac{x}{2}}$ *»*

Lo studente non potrà in questo caso ricorrere alla soluzione numerica, ma dovrà procedere esclusivamente per via analitica; la CG, attraverso la funzionalità "grafici dinamici" potrà invece essere usata per riscontrare, in maniera molto rapida ed efficace, l'evoluzione del grafico della funzione e della tangente in questione al variare del parametro k in un qualsiasi intervallo di valori.

4) *Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema*

La capacità di riflettere sul percorso risolutivo, di descrivere in modo chiaro e corretto le scelte effettuate, di discutere i risultati ottenuti, già di per sé rappresenta un elemento fondamentale della competenza in generale e, nello specifico, della competenza matematica.

Da quanto detto sopra, risulta del tutto evidente che tale capacità diventa ancora più rilevante nel momento in cui lo studente si avvale del supporto della CG: la riflessione sull'utilizzo delle informazioni fornite dalla calcolatrice all'interno del procedimento, e sul loro "valore" matematico, è importante sia rispetto al rafforzamento delle competenze matematiche, sia rispetto al tema dell'utilizzo consapevole dei supporti tecnologici. Nel formulare la traccia di una verifica, di un problema, di un'esercitazione, dunque, il docente non dovrebbe mai tralasciare la richiesta allo studente di spiegare, argomentare, giustificare e dovrebbe *valutare accuratamente le evidenze che da tale argomentazione scaturiscono*.

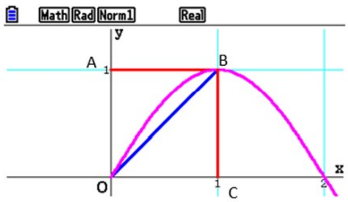
Integrale definito e probabilità

"Date le funzioni,

$$f(x) = x, \quad g(x) = 1, \quad s(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

nell'intervallo [0,1], dimostra che la porzione quadrata di piano OABC viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ in tre parti distinte e determina la probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato ricada in ciascuna delle tre parti individuate.
Considerando ora le funzioni $f(x)^2$ e $g(x)^2$ discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni in aumento o in diminuzione dei tre valori di probabilità precedentemente determinati."

Il grafico che si presenta allo studente che utilizza la CG è il seguente (le etichette dei punti A, B, C, O sono state aggiunte successivamente):



Lo studente può così *osservare* che il quadrato OABC viene suddiviso in tre parti, ma *dimostrarlo* è tutt'altra cosa, e sicuramente non è un compito che può essere affidato alla CG! La dimostrazione, che produce evidenze relativamente a tutti i quattro indicatori di cui sopra, può però essere orientata dall'osservazione effettuata con la CG. Ad esempio, uno spunto potrebbe venire dal considerare la concavità di $s(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$, oppure il teorema di Lagrange applicato alle funzioni $f(x)$ e $s(x)$ nello stesso intervallo.

Il calcolo delle probabilità presuppone il calcolo di semplici integrali definiti; analogamente a quanto già detto per le derivate e per la tangente al grafico, la CG può fornire per via numerica il valore approssimato di un'integrale definito, ma *non può individuare le primitive della funzione in questione*.

Per ragioni di brevità, lasciamo al lettore la riflessione sulle evidenze, relative ai quattro indicatori, che possono scaturire dalla risoluzione del problema proposto. È interessante però, anche in questo caso, valutare eventuali formulazioni alternative, e magari più stimolanti; un possibile esempio è il seguente:

«determina l'espressione di una funzione $s(x)$ tale che il suo grafico, insieme a quelli delle funzioni $f(x) = x$, $g(x) = 1$ suddivida il quadrato OABC in ***quattro*** *parti [con o senza il vincolo $s(0) = 0$, $s(1) = 1$]"*

L'aspetto interessante di una richiesta così formulata, nell'ottica di una didattica delle competenze, risiede nel fatto che si richiede allo studente di *proporre* una funzione che abbia certe caratteristiche, di farsi in qualche modo parte attiva del laboratorio di matematica, di *operare e valutare delle scelte* e di mobilitare le sue competenze a questo scopo. La CG sosterrà questo processo, mettendo a disposizione le funzionalità di calcolo e rappresentazione che consentono di esplorare in modo rapido e agevole le diverse situazioni che si presentano al variare delle scelte e delle ipotesi formulate dallo studente.

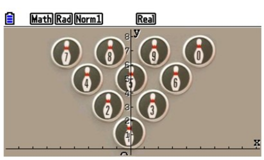
Attività innovative con la calcolatrice grafica

Infine, proponiamo alcuni esempi di problemi *pensati per essere affrontati con la CG*; problemi di questo tipo sono particolarmente interessanti, perché evidenziano come l'uso di questo strumento consenta di ampliare notevolmente il repertorio di attività e di verifiche che il docente può adoperare, diversificandone anche la tipologia. In particolare, queste attività possono risultare decisamente "sfidanti" per gli studenti, con elementi di creatività e di "gioco" che – come ampiamente riscontrato nella letteratura scientifica – sono particolarmente efficaci per promuovere l'acquisizione di competenze.

Grafici con sfondo

La CG consente di applicare uno sfondo alla finestra grafica, che può essere un'immagine importata dall'esterno o una di quelle precaricate nella memoria della calcolatrice. Si chiede quindi agli studenti di impostare i parametri di una funzione in modo che il suo grafico risponda a certi requisiti relativamente allo sfondo. Ad esempio:

A partire da questo sfondo:



Imposta i parametri A, B, C e D della funzione,

$$f(x) = A\sin(Bx + C) + D$$

in modo che il grafico di $f(x)$ separi i birilli 1, 2 e 3 dagli altri.

Imposta i parametri m e q in modo che la retta di equazione

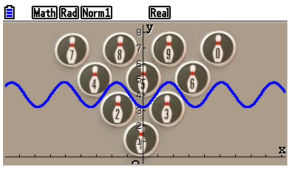
$$y = mx + q$$

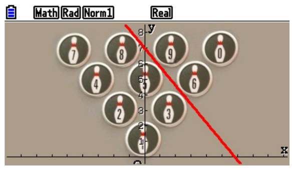
separi i birilli 9, 6, 0 dagli altri.

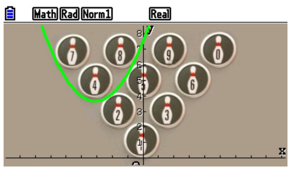
Imposta i parametri A, B, C in modo che la parabola di equazione

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

separi i birilli 7, 4, 8 dagli altri.







Attività di questo tipo sviluppano competenze grafico-simboliche e di interpretazione dei dati, nonché la conoscenza delle proprietà di coniche e funzioni elementari, e contengono un elemento di sfida e di "gioco" che le rende accattivanti. Esse possono essere ulteriormente sviluppate a partire, ad esempio, dal confronto tra le diverse soluzioni proposte dai diversi studenti o gruppi di studenti.

Impostazione della finestra grafica

Un'altra tipologia interessante di attività è quella che richiede agli studenti, a partire dalla definizione di un oggetto matematico, di impostare la finestra grafica della calcolatrice in modo che la rappresentazione dell'oggetto risponda a certe caratteristiche. Ad esempio:

Imposta i parametri della finestra di visualizzazione della calcolatrice in modo che la sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 9 = 0$$

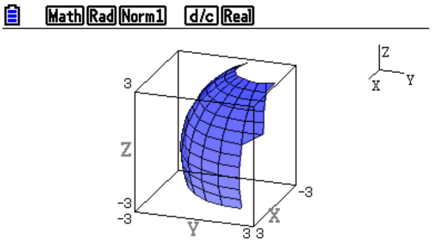
sia interamente visibile.

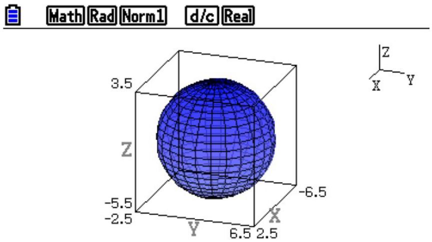
Oppure:

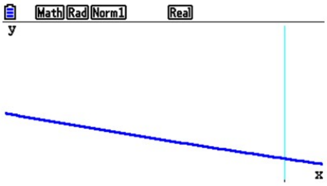
Imposta i parametri della finestra di visualizzazione della calcolatrice in modo che il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$$

appaia approssimativamente come in figura, cioè una curva con pendenza compresa tra $-\frac{1}{5}$ *e* $-\frac{1}{7}$.







Anche in questi esempi è evidente lo stimolo alle competenze di tipo grafico-simbolico; in particolare il secondo presenta un possibile approccio laboratoriale al concetto di sviluppo al primo ordine di una funzione. Anche questa attività può essere arricchita ulteriormente, individuando il punto della funzione intorno al quale è stata effettuata la linearizzazione, e l'equazione della retta approssimante.

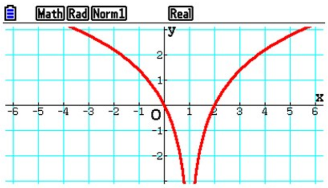
Composizione di funzioni

La CG si presta molto bene alle attività basate sulla composizione di funzioni, per la facilità e rapidità con cui si può esplorare il modo in cui le proprietà delle singole funzioni – in particolare segno, parità, monotonia – si proiettano nel grafico della funzione composta.

La composizione delle tre funzioni:

$$f_1(x) = \log(x), \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x - 1$$

Produce il grafico in figura, con l'impostazione di default di visualizzazione della calcolatrice. Individua l'espressione della funzione composta, motivando la tua risposta.



È evidente, in un'attività di questo tipo, l'importanza della richiesta di carattere argomentativo, dalla quale deve emergere la conoscenza delle proprietà delle funzioni coinvolte e della corrispondenza tra queste e l'aspetto del grafico. È preferibile limitare il numero n delle funzioni componenti, e di conseguenza il numero n! delle possibili permutazioni tra di esse, e richiedere allo studente la riflessione di cui sopra, per scoraggiare un possibile approccio puramente "combinatorio" (che comunque evidenzierebbe una competenza!).

Come emerge da questa sia pur breve rassegna di attività matematiche effettuate con la CG, è possibile un significativo ampliamento delle esperienze didattiche e delle situazioni valutative che il docente può progettare. Ci piace inoltre sottolineare che oltre alle consuete richieste: "*dimostra*", "*calcola*", "*verifica*", "*determina*", "*discuti*", abbiamo adoperato "*imposta*", "*scegli*", "*costruisci*", che prefigurano quel ruolo "attivo" dello studente cui si è fatto cenno più volte, a proposito dell'approccio laboratoriale all'apprendimento della matematica.

Considerazioni conclusive

In questa discussione sull'utilizzo didattico della CG, abbiamo cercato di evidenziare le caratteristiche fondamentali dello strumento e di mostrare come esso possa costituire un elemento di profondo rinnovamento dell'approccio didattico, e favorire coinvolgimento e partecipazione degli studenti – meglio, di *tutti* gli studenti.

Riteniamo che il lavoro che indubbiamente è richiesto al docente per poter introdurre la CG nella didattica possa essere ampiamente ripagato sia in termini di risultati di apprendimento che di soddisfazione per il docente stesso; a tale proposito, è opportuno concludere questa riflessione sottolineando nuovamente che per un proficuo utilizzo didattico della CG non è assolutamente necessaria una conoscenza completa e approfondita delle caratteristiche e delle funzionalità dello strumento, né da parte del docente né degli studenti. Tutte le attività riportate a titolo di esempio nel presente lavoro, volendole prendere come riferimento, possono essere condotte con la conoscenza e la dimestichezza acquisite dopo poche ore di esperienza d'uso.

Istruzioni per gli autori

Il *Periodico di Matematiche* pubblica articoli di Matematica e di Fisica che abbiano carattere scientifico, storico e didattico, previa valutazione di contenuti ed originalità. Ciascun lavoro presentato è giudicato da esperti anonimi che riferiscono al Direttore, cui compete il giudizio finale.

Formattazione del testo

- L'articolo deve essere in formato .doc. Può essere scritto in italiano o in inglese, su libera scelta degli autori, ad eccezione del sunto (abstract) da scrivere in sola lingua inglese.

- Il testo deve essere redatto in Times New Roman, con dimensione del carattere di 11 pt, interlinea 1 e testo giustificato su ambo i lati.

- I margini di scrittura sono: 5,7 cm superiore; 6,2 cm inferiore; 4,5 cm destra e sinistra

- Il titolo dell'articolo deve essere in grassetto, centrato e non completamente maiuscolo, con dimensione del carattere di 15 pt. Devono essere lasciati 36 pti di spazio prima di quest'ultimo. Qualora il titolo sia in italiano, va riportato anche in inglese.

- Il nome degli autori deve essere in grassetto e centrato, con dimensione del carattere di 12 pt. Devono essere lasciati 20 pt di spazio prima e 40 pt di spazio dopo.

- Gli autori devono inserire una nota a piè della prima pagina, fornendo gli indirizzi mail e le rispettive afferenze/occupazioni, con dimensione del carattere di 10 pt e rientro di 5mm.

- Il nome del sunto (abstract) deve essere giustificato a sinistra, grassetto e con dimensione del carattere di 12 pt. Il testo dell'abstract non deve superare le 10 righe, con dimensione del carattere di 10 pt.

- I titoli dei paragrafi devono essere in grassetto e giustificati a sinistra, con dimensione del carattere di 14 pt. A conclusione di ogni paragrafo, gli autori devono lasciare uno spazio verticale di 11 pt.

- L'articolo non può superare le 12 pagine, salvo dirette autorizzazioni della Direzione e/o dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.

- A conclusione del testo e prima della bibliografia, gli autori possono inserire il paragrafo Ringraziamenti (con titolo in grassetto, giustificato a sinistra e con dimensione del carattere di 14 pt). In suddetto paragrafo, gli autori possono inserire opportuni ringraziamenti a persone, progetti o funding, questi ultimi esplicitamente indicati.

Bibliografia

- Gli autori devono lasciare due spazi verticali di 11 pt a conclusione dell'ultimo paragrafo (i ringraziamenti, qualora siano inseriti) che precede la bibliografia, per la quale deve essere usata la seguente formattazione:

  Bibliografia (12 pt)

  [1] CATTANEO C., *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (3), 1948. (11 pt)

  [2] ...

- I riferimenti bibliografici devono essere in ordine di citazione.
- Tutti i riferimenti bibliografici devono essere numerati fra parentesi quadre ([1,2]) nel corpo del testo, seguendo la rispettiva numerazione.

Copyright

Gli autori possono corredare il corpo del testo con immagini in formato .jpeg .jpg con una risoluzione minima di 300 dpi. Ad ogni immagine va associata un'apposita didascalia. Per ogni immagine che non sia di autoproduzione va indicata la fonte, con un eventuale URL. Qualora l'immagine sia di proprietà degli autori sarebbe opportuno indicare il software con il quale la si è realizzata.

Inizio dei lavori

Gli articoli vanno inviati a mezzo posta elettronica al Direttore e a ciascuno dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.

Mathesis

Presidente

Francesco de Giovanni

E’ presidente dal 4 febbraio 2021, ventiquattresimo dal 1895, anno della fondazione.

presidente@mathesisnazionale.it

Consiglio Nazionale

Vincenzo Iorfida *vice presidente*, Alessio Russo *segretario*, Roberto Franzina *tesoriere*, Serenella Iacino, Giulio Maletta, Susi Osti, Marcello Pedone, Annalisa Santini, Francesco Sicolo, Pasqualina Ventrone.

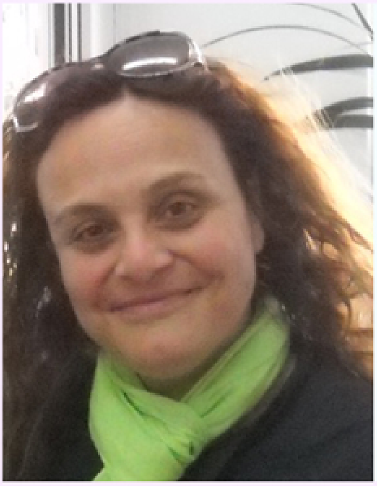
Sezioni

Abruzzo – Avellino – Bari – Brescia – Caserta – Castellamare di Stabia – Catania – Crotone – Ferrara – Firenze – Grottaglie – Latina – Lecce – Mantova – Messina – Milano – Mondragone – Napoli – Napoli Flegrea – Olbia – Roma – Rovigo – Salerno – Serra San Bruno – Spoleto – Terni – Udine – Varese – Venezia – Verona – Vicenza.

Rivista
Periodico di Matematiche
Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 "di Matematiche". La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell’Editore Zanichelli.

Sito web
www.mathesisnazionale.it

ISSN 1582-8832




Il disegno di copertina è dovuto a **Clara Giannetti**, docente di Scienze presso l'Istituto Superiore “F. Caracciolo – G. Da Procida” di Procida. Laureata presso la Federico II di Napoli in scienze naturali con indirizzo biologia marina, è da sempre attenta alle tematiche ambientali. Appassionata di arte, ha frequentato corsi di riciclo creativo e disegno naturalistico a Roma e in Gran Bretagna, nonché corsi di pittura e di maiolica.

MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

c/o Dipartimento di Matematica e Fisica
Università degli Studi della Campania “Luigi Vanvitelli”
Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)
www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it