

# Periodico di Matematiche



**Organo della  
MATHESIS**

Società italiana di scienze  
matematiche e fisiche  
fondata nel 1895

**Volume 99 (2023)  
Fascicolo 1-2**

## **Direttore**

Francesco de Giovanni

degiovan@unina.it

## **Comitato di Redazione**

Maria Cocozza

mariacocozza@iscortese.com

Atalia Del Bene

atalia.delbene@istruzione.it

Umberto Dello Iacono

umberto.delloiacono@unicampania.it

Massimo Fioroni

fionimassimo@gmail.com

Paola Gario

paola.gario@unimi.it

Franco Ghione

ghione@axp.mat.uniroma2.it

Vincenzo Iorfida

vincenzo.iorfida@unical.it

Elisabetta Lorenzetti

elisabetta.lorenzetti@unife.it

Marcello Pedone

marcellopedone@tin.it

Alessio Russo

alessio.russo@unicampania.it

Annalisa Santini

annalisasantini66@gmail.com

Francesco Sicolo

fsicolo@gmail.com

Luigi Verolino

verolino@unina.it

## **Staff editoriale**

Giuseppe Arnone

giuseppe.arnone@unina.it

Marco Trombetti

marco.trombetti@unina.it

Autorizzazioni e supporti Autorizzazioni Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Il Periodico di Matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su [www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it)

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia €60,00 - Per l'Estero €70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati: [segreteria@mathesisnazionale.it](mailto:segreteria@mathesisnazionale.it)

c/c postale, Codice IBAN:

**IT051076010400000048597470**

intestato a:

**Mathesis Nazionale** c/o Dipartimento di Matematica e Fisica

Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"

Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)

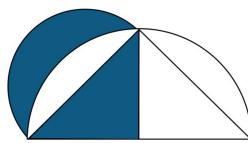
[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it) • [info@mathesisnazionale.it](mailto:info@mathesisnazionale.it)

Fascicolo 1-2 Volume 99 (2023)

# Periodico di Matematiche

**Organo della MATHESIS**

*Società italiana di scienze  
fisiche e matematiche  
fondata nel 1895*



**Mathesis**

## Indice

Fabio Spizzichino	
<b>Un'introduzione al Paradosso di Simpson</b> .....	1
Nicola Fusco	
<b>Longevità e Prestazioni in Termodinamica</b> .....	13
Salvatore Menniti, Crisenzia Bilotta e Vincenzo Iorfida	
<b>Interpolazione di Lagrange</b> .....	27
Costanza Torricelli	
<b>Finanza sostenibile: un nuovo mantra?</b> .....	37
Francesco de Giovanni e Carmela Musella	
<b>Retorica, l'arte dell'argomentare</b> .....	47
Marcello Pedone e Paola Putignano	
<b>Attività con GeoGebra volta a illustrare i teoremi di: Desargues, Pappo- Pascal e Pascal</b> .....	53
Eleonora Bilotta e Pietro Pantano	
<b>Arte e Tecnologie per una didattica innovativa</b> .....	59
Maria Cocozza e Alessio Russo	
<b>Quanti sono i gruppi di ordine 2023?</b> .....	77

# Un'introduzione al Paradosso di Simpson

## An introduction to Simpson's Paradox

Fabio Spizzichino<sup>1</sup>

### Premessa

Non soltanto nell'analisi scientifica, ma anche nella cultura letteraria, la tematica circa l'uso della Statistica ha una lunga storia; storia che, in questa nota, certamente non vale la pena tentare di riassumere. E' in particolare ben noto che, in molte situazioni, un'analisi superficiale o affrettata di dati statistici possa portare a conclusioni fuorvianti. Per tale motivo le analisi statistiche sono spesso oggetto di critiche di vario tipo: serie e approfondite, oppure superficiali e speciose, oppure umoristiche e scherzose. Un ben noto aforisma attribuibile, pare, ad un grande leader politico inglese del XIX secolo recita: "Ci sono tre tipi di bugie: le bugie normali, le bugie spudorate e le statistiche".

Sicuramente l'analisi statistica può risultare molto utile per sviluppare la conoscenza di fenomeni collettivi o comunque per scegliere, a livello pubblico o privato, fra diverse possibili decisioni. Ma può anche avere talvolta anche effetti meno edificanti, se non è condotta con cura ed attenzione.

In questo articolo tratteremo del cosiddetto *Paradosso di Simpson*. Si tratta di uno dei temi più interessanti, e anche più noti, a riguardo delle potenziali insidie nascoste dietro un'analisi superficiale di dati statistici. Su questo particolare tema la letteratura è veramente molto vasta e materiale assai vario si può anche trovare in rete.

Anche se molto sommariamente, qui nel seguito verranno innanzitutto illustrate delle situazioni in cui si incontra un tale fenomeno e verranno quindi discussi i motivi per cui tali situazioni non ci dovrebbero sorprendere troppo.

Ma cercheremo anche di accennare ai motivi per i quali esse possano - almeno a prima vista- apparire appunto paradossali.

A tale fine ci appoggeremo su una opportuna formula inerente le probabilità condizionate; formula analoga a quella delle *probabilità totali*, ma significativamente diversa da quest'ultima. Si veda la successiva formula (17).

---

<sup>1</sup>fabio.spizzichino@fondazione.uniroma1.it

In quanto segue, si presuppone che i lettori conoscano le nozioni più elementari del Calcolo delle Probabilità quali: eventi aleatori, operazioni logiche su eventi, eventi incompatibili, eventi esaustivi, probabilità condizionate ed indipendenza fra eventi. Comunque, molto succintamente e in forma non rigorosa, alcune nozioni essenziali per i nostri scopi verranno richiamate nel prossimo punto, anche per poter fissare il simbolismo che verrà utilizzato.

## Formula delle probabilità totali

Ricordiamo innanzitutto che, convenzionalmente, la probabilità di un evento  $E$  è un numero  $\mathbb{P}(E)$ , compreso fra 0 ed 1, e che la probabilità  $\mathbb{P}(\Omega)$  dell'evento certo  $\Omega$  è fissata uguale ad 1.

Si impone inoltre la proprietà di *additività*: la probabilità  $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2)$  della *somma logica*,  $E_1 \cup E_2$ , fra due eventi  $E_1$  ed  $E_2$  è uguale alla somma aritmetica  $\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$  quando  $E_1$  ed  $E_2$  sono *incompatibili*, cioè quando risulta impossibile il loro prodotto logico<sup>2</sup>  $E_1 \cap E_2$ .

Tale proprietà in particolare implica che, dato un qualunque evento  $E$ , ed indicato con  $\tilde{E}$  l'evento *negazione* (o *complementare*) di  $E$ , risulta

$$\mathbb{P}(\tilde{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

e che la probabilità dell'evento *impossibile*, convenzionalmente indicato dal simbolo  $\emptyset$ , è data da  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

La stessa proprietà di additività equivale anche a richiedere che, dati due qualunque eventi  $E_1, E_2$  -non necessariamente incompatibili- valga la formula

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2).$$

Una famiglia di eventi  $H_1, \dots, H_n$  costituisce una *partizione* quando essi risultano sia *esaustivi*, cioè

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega,$$

che a due a due incompatibili:  $H_1, \dots, H_n$  danno quindi luogo ad una partizione se e soltanto se è **certo** che fra essi se ne verifica uno ed uno soltanto.

Tipicamente, di fronte ad una partizione, si ha una mancanza di informazione: non sappiamo con certezza **quale** sia l'evento che si verifica fra  $H_1, \dots, H_n$  ed il nostro stato di parziale informazione viene descritto dalle relative probabilità  $\mathbb{P}(H_1), \mathbb{P}(H_2), \dots, \mathbb{P}(H_n)$ . Tali numeri devono necessariamente soddisfare la relazione

$$\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2) + \dots + \mathbb{P}(H_n) = 1.$$

Data una partizione  $\{H_1, \dots, H_n\}$  ed un qualunque altro evento  $E$ , si potrà sempre scrivere

$$E = (E \cap H_1) \dot{\cup} (E \cap H_2) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} (E \cap H_n), \quad (1)$$

---

<sup>2</sup>In altre parole, quando è impossibile il verificarsi contemporaneo di entrambi gli eventi

dove il simbolo  $\dot{\cup}$  sta qui a ricordare che si ha a che fare con una somma logica fra eventi a due a due incompatibili.

Siano ora dati due eventi  $A$  e  $D$ , con  $\mathbb{P}(D) > 0$ . Si definisce *probabilità condizionata* di  $A$  dato  $D$  il numero

$$\mathbb{P}(A|D) := \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)}. \quad (2)$$

E i due eventi  $A$  e  $D$  si dicono *stocasticamente indipendenti* qualora si abbia  $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D)$ , nel qual caso risulta

$$\mathbb{P}(A|D) = \mathbb{P}(A).$$

$A$  e  $D$  si dicono invece *correlati positivamente*, oppure *correlati negativamente*, se risulta  $\mathbb{P}(A|D) > \mathbb{P}(A)$  oppure  $\mathbb{P}(A|D) < \mathbb{P}(A)$ .

Sia ora  $E$  un qualunque evento e  $\{H_1, \dots, H_n\}$  una partizione (con  $\mathbb{P}(H_j) > 0$ , per  $j = 1, \dots, n$ ).

Tenendo conto della decomposizione (1), della proprietà di additività e della definizione (2) si ottiene immediatamente, circa la probabilità di  $E$ , la seguente Formula delle Probabilità Totali:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(E|H_j)\mathbb{P}(H_j). \quad (3)$$

Nel caso in cui la partizione considerata sia semplicemente costituita da due eventi, cioè sia della forma  $\{H, \tilde{H}\}$ , la (3) diventa

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(E|\tilde{H})\mathbb{P}(\tilde{H}) = \mathbb{P}(E|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(E|\tilde{H})(1 - \mathbb{P}(H)). \quad (4)$$

Osservazione. Come ben noto, esistono diverse impostazioni miranti a precisare quale sia il significato da attribuire al termine "probabilità" nella realtà fisica e nelle applicazioni (si parla in particolare di probabilità combinatorie, di probabilità frequentiste, di probabilità soggettive, di probabilità epistemiche, etc...).

Si ha poi una costruzione assiomatica dove la probabilità viene studiata come oggetto matematico, con i suoi assiomi, definizioni, teoremi, etc... . Si deve tenere presente che, in tale ambito, la formula (2) è soltanto una definizione; cioè non è un'identità ottenuta quale conseguenza di argomenti già sviluppati in precedenza.

E' interessante però osservare che, all'interno di ciascuna delle diverse impostazioni interpretative sopra menzionate, la definizione di "probabilità condizionata", data in (2), sostanzialmente assume comunque uno stesso significato:  $\mathbb{P}(E|H)$  è la probabilità da attribuire all'evento  $E$ , qualora si faccia l'ipotesi che è verificato l'evento  $H$ .

## Il paradosso di Simpson

Consideriamo due tabelle  $2 \times 2$ , dove gli elementi sono numeri naturali:

$$\mathcal{T}' \equiv \begin{pmatrix} n' & N' - n' \\ m' & M' - m' \end{pmatrix}, \mathcal{T}'' \equiv \begin{pmatrix} n'' & N'' - n'' \\ m'' & M'' - m'' \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Consideriamo quindi la tabella  $2 \times 2$  costruita, casella per casella, aggregando le caselle omologhe di  $\mathcal{T}'$  e di  $\mathcal{T}''$ :

$$\begin{pmatrix} n' + n'' & (N' + N'') - (n' + n'') \\ m' + m'' & (M' + M'') - (m' + m'') \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Diciamo che le due tabelle  $\mathcal{T}'$  e  $\mathcal{T}''$  realizzano il paradosso di Simpson quando si verificano, contemporaneamente, le seguenti disequazioni:

$$\frac{n'}{N'} > \frac{m'}{M'}, \frac{n''}{N''} > \frac{m''}{M''} \quad (7)$$

$$\frac{n' + n''}{N' + N''} < \frac{m' + m''}{M' + M''}. \quad (8)$$

Come riportato in molti testi divulgativi (vedi ad esempio [4]) e siti on line, un esempio di tale situazione può essere il seguente:

$$\mathcal{T}' \equiv \begin{pmatrix} 50 & 60 \\ 30 & 40 \end{pmatrix}, \mathcal{T}'' \equiv \begin{pmatrix} 60 & 30 \\ 90 & 50 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

dove cioè

$$N' = 110, M' = 70, N'' = 90, M'' = 140,$$

$$\frac{n'}{N'} = \frac{5}{11} > \frac{3}{7} = \frac{m'}{M'}, \quad (10)$$

$$\frac{n''}{N''} = \frac{2}{3} > \frac{9}{14} = \frac{m''}{M''}, \quad (11)$$

$$\frac{n' + n''}{N' + N''} = \frac{11}{20} < \frac{4}{7} = \frac{m' + m''}{M' + M''}. \quad (12)$$

Da un punto di vista puramente aritmetico non c'è molto altro da aggiungere, alla precedente definizione di paradosso di Simpson.

Alla luce delle disuguaglianze in (7) e (8), i dati contenuti nelle due tabelle (5) possono però essere presentati in modo da apparire- a prima vista- contraddittori.

Le tabelle potrebbero rappresentare, ad esempio, dei dati osservati in una sperimentazione di tipo farmacologico: pensiamo al classico caso di un test su un nuovo farmaco, mirante ad eliminare un determinato disturbo fisico.

Il farmaco viene somministrato ad un gruppo  $\mathcal{F}$ , costituito da  $N' + N''$  pazienti, mentre ad altri  $M' + M''$  pazienti (che vanno a formare un diverso gruppo, diciamo  $\tilde{\mathcal{F}}$ ) viene somministrato un placebo.



I pazienti si suddividono inoltre in due diverse categorie:

$\mathcal{H}' \equiv \{\text{pazienti ospedalizzati, le cui condizioni di salute sono precarie}\}$

e

$\mathcal{H}'' \equiv \{\text{pazienti sani, le cui condizioni generali sono del tutto normali}\}.$

Il numero complessivo dei pazienti appartenenti a  $\mathcal{H}'$  è  $N' + M'$ , mentre  $N'' + M''$  è il numero complessivo dei pazienti appartenenti al gruppo  $\mathcal{H}''$ .

Per ciascuno dei quattro diversi casi  $\mathcal{H}' \cap \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}' \cap \tilde{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{H}'' \cap \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}'' \cap \tilde{\mathcal{F}}$  viene rilevato se nei pazienti vi sia stata o meno, in un tempo debito, una remissione del disturbo in esame.

Per il campione complessivo, costituito dagli  $(N' + M' + N'' + M'')$  pazienti coinvolti nella sperimentazione, si ha quindi una suddivisione in  $2^3 = 8$  diverse classi: una di tali classi è, ad esempio, quella costituita dai pazienti ospedalizzati, cui è stato somministrato il farmaco e per i quali è stata rilevata una remissione del disturbo; un'altra di tali classi è quella costituita dai pazienti non ospedalizzati, cui è non stato somministrato il farmaco e per i quali non è stata poi rilevata una remissione del disturbo; e così via... .

Le numerosità rispettive di tali otto classi vengono riportate nelle otto diverse caselle mostrate dalle Tabelle  $\mathcal{T}'$  e  $\mathcal{T}''$  in (5): in  $\mathcal{T}'$  vengono riportati i dati relativi ai pazienti appartenenti a  $\mathcal{H}'$ , mentre in  $\mathcal{T}''$  vengono riportati i dati relativi ai pazienti appartenenti a  $\mathcal{H}''$ .

Nello specifico caso descritto dalle tabelle in (9), il gruppo  $\mathcal{F}$  cui viene somministrato il farmaco è costituito da  $N' + N'' = 200$  pazienti, mentre agli altri  $M' + M'' = 210$  pazienti che vanno a formare il gruppo  $\tilde{\mathcal{F}}$  viene somministrato il placebo.

La tabella  $\mathcal{T}''$  mostra che, fra i pazienti appartenenti a  $\mathcal{H}''$ , il farmaco è stato somministrato a 90 soggetti, di cui  $n'' = 60$  sono guariti, e il placebo è stato somministrato a 140 soggetti, di cui quelli (spontaneamente) guariti sono  $m'' = 90$ . Analogamente, nella Tabella  $\mathcal{T}'$  vengono riportati i dati relativi ai pazienti in  $\mathcal{H}'$ .

Le disuguaglianze

$$\frac{n'}{N'} > \frac{m'}{M'}, \quad \frac{n''}{N''} > \frac{m''}{M''}$$

che ad esempio emergono da (10) e (11) mostrano che, in proporzione, il farmaco produce un effetto benefico, se confrontato con il placebo. E ciò si verifica per entrambe le categorie  $\mathcal{H}'$  e  $\mathcal{H}''$ .

Ma, in base alla disuguaglianza  $\frac{n'+n''}{N'+N''} < \frac{m'+m''}{M'+M''}$  in (12), emergerebbe invece un dato più favorevole al placebo che non al farmaco, se i dati relativi ai due sottogruppi venissero aggregati.

In verità, questa apparente discrepanza non dovrebbe sorprendenci.

Torniamo infatti a considerare in generale le due tabelle in (5). E scomponiamo i termini  $\frac{n'+n''}{N'+N''}$  e  $\frac{m'+m''}{M'+M''}$  in modo da far rispettivamente comparire le coppie di rapporti  $\left(\frac{n'}{N'}, \frac{n''}{N''}\right)$  e  $\left(\frac{m'}{M'}, \frac{m''}{M''}\right)$ .

Possiamo banalmente scrivere le seguenti identità:

$$\frac{n' + n''}{N' + N''} = \frac{n'}{N' + N''} + \frac{n''}{N' + N''} = \frac{n'}{N'} \cdot \frac{N'}{N' + N''} + \frac{n''}{N''} \cdot \frac{N''}{N' + N''}, \quad (13)$$

$$\frac{m' + m''}{M' + M''} = \frac{m'}{M' + M''} + \frac{m''}{M' + M''} = \frac{m'}{M'} \cdot \frac{M'}{M' + M''} + \frac{m''}{M''} \cdot \frac{M''}{M' + M''}. \quad (14)$$

Abbiamo cioè rispettivamente scritto  $\frac{n'+n''}{N'+N''}$  e  $\frac{m'+m''}{M'+M''}$  come combinazioni lineari convesse dei rapporti  $\frac{n'}{N'}$ ,  $\frac{n''}{N''}$  e  $\frac{m'}{M'}$ ,  $\frac{m''}{M''}$ , rispettivamente con pesi  $\frac{N'}{N'+N''}$ ,  $\frac{N''}{N'+N''}$  e  $\frac{M'}{M'+M''}$ ,  $\frac{M''}{M'+M''}$ <sup>3</sup>.

Si è assunto  $\frac{n'}{N'} > \frac{m'}{M'}$  e  $\frac{n''}{N''} > \frac{m''}{M''}$ .

Se risultasse  $\frac{N'}{N'+N''} = \frac{M'}{M'+M''}$  (cioè se vi fosse una stessa coppia di pesi in entrambe le combinazioni lineari) sarebbe banalmente verificata anche la disuguaglianza  $\frac{n'+n''}{N'+N''} > \frac{m'+m''}{M'+M''}$ .

Il fatto che ciò non si verifichi è da imputare all'evenienza che

$$\frac{N'}{N' + N''} < \frac{M'}{M' + M''}, \quad \frac{N''}{N' + N''} > \frac{M''}{M' + M''}.$$

Nell'esempio delle tabelle in (9), la disuguaglianza

$$\frac{n' + n''}{N' + N''} = \frac{11}{20} < \frac{4}{7} = \frac{m' + m''}{M' + M''} \quad (15)$$

infatti mostra che nell'espressione (13) il peso maggiore  $\frac{N''}{N'+N''} = \frac{11}{20}$  è attribuito al valore minore  $\frac{n''}{N''} = \frac{2}{3}$ , mentre un peso minore  $\frac{N'}{N'+N''}$  è attribuito al valore maggiore  $\frac{n'}{N'}$ .

Il contrario invece avviene nell'espressione (14) e ciò basta a produrre la disuguaglianza

$$\frac{n' + n''}{N' + N''} < \frac{m' + m''}{M' + M''}.$$

Tanti altri esempi di paradossi di Simpson, tratti magari da contesti completamente diversi, ma sostanzialmente analoghi nella struttura aritmetica, sono stati presentati in letteratura. E molti altri se ne possono facilmente trovare in rete. In ogni caso l'effetto di apparente incogruenza è prodotto dal confronto fra due combinazioni convesse di coppie di numeri reali, nelle quali intervengono *pesi* che giocano in modo "contrastante" rispetto ai dati "sostanziali".

<sup>3</sup>Il termine combinazione lineare convessa sta ad indicare che i coefficienti della combinazione lineare sono entrambi positivi e la loro somma dà 1. Tali coefficienti possono essere quindi visti come "pesi".

Osservazione. Come diretta conseguenza della precedente definizione, il paradosso di Simpson riguarda situazioni in cui una popolazione è suddivisa in due (o più) classi fra loro eterogenee. Guardiamo ancora una volta ai dati nelle due tabelle (9), nel contesto del confronto fra un farmaco ed un placebo. Si potrebbe ragionevolmente obiettare che tali dati non corrispondono ad una sperimentazione realistica. L'emergere del paradosso di Simpson, o comunque qualche distorsione nei dati osservabili, non è sorprendente visto che la somministrazione del farmaco (e del placebo) non è stata distribuita in modo casuale fra i due gruppi  $\mathcal{H}'$  ed  $\mathcal{H}''$ . Notiamo infatti che il placebo è stato somministrato prevalentemente all'interno del gruppo  $\mathcal{H}''$  costituito da pazienti sani (a 140 pazienti su un totale di 230) e in misura significativamente minore nel gruppo  $\mathcal{H}'$  dei pazienti ospedalizzati (70 su 180). I pazienti sani mostrano una maggiore tendenza alla remissione dei sintomi:  $\frac{2}{3}$  fra coloro trattati con il farmaco e  $\frac{9}{14}$  fra coloro trattati con il placebo a fronte di  $\frac{5}{11} < \frac{9}{14}$  fra gli ospedalizzati trattati con il farmaco e  $\frac{3}{7} < \frac{5}{11}$  fra quelli trattati con il placebo. Dunque il manifestarsi del paradosso di Simpson è legato alla circostanza che il placebo è stato somministrato in maggioranza a pazienti sani e che questi hanno comunque una maggiore tendenza alla remissione del sintomo.

Potrebbe allora sorgere il dubbio che il paradosso di Simpson si possa incontrare soltanto nel caso di indagini statistiche in cui non si tenga correttamente conto di un'evidente presenza di classi eterogenee. In verità la situazione è però più subdola. In quanto, in alcune sperimentazioni, la presenza di classi eterogenee può risultare non evidente o addirittura decisamente imprevista.

## Probabilità condizionate: una formula di decomposizione

La precedente formula (3) costituisce la Formula delle Probabilità Totali: si tratta di una semplicissima formula che porta a decomporre una probabilità  $\mathbb{P}(E)$  in modo da far comparire le probabilità condizionate  $\mathbb{P}(E|H_j)$ , dove  $H_1, \dots, H_n$  sono eventi che formano una partizione.

In presenza di una partizione  $\{H_1, \dots, H_n\}$ , vogliamo ora mostrare una formula di decomposizione per una probabilità condizionata  $\mathbb{P}(E|D)$ .

Consideriamo di nuovo un qualunque evento  $E$ , una partizione  $\{H_1, \dots, H_n\}$  (con  $\mathbb{P}(H_j) > 0$ , per  $j = 1, \dots, n$ ) e sia  $D$  un altro evento con  $\mathbb{P}(D) > 0$ .

Ricordando la definizione (2), la decomposizione (1) e la proprietà di additività, questa volta scriviamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E|D) &= \frac{\mathbb{P}(E \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}\left((E \cap D \cap H_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} (E \cap D \cap H_n)\right)}{\mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(E \cap D \cap H_j)}{\mathbb{P}(D)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\mathbb{P}(E|D \cap H_j) \mathbb{P}(D \cap H_j)}{\mathbb{P}(D)} = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(E|D \cap H_j) \mathbb{P}(H_j|D). \end{aligned} \quad (16)$$

E' importante notare che, nel caso in cui l'evento  $D$  è stocasticamente indipendente da  $H_j$  qualunque sia  $j = 1, \dots, n$ , la decomposizione (16) si riduce a

$$\mathbb{P}(E|D) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(E|D \cap H_j)\mathbb{P}(H_j) :$$

essa assume cioè una forma molto simile alla (3). Nel caso generale, invece, le probabilità  $\mathbb{P}(H_j)$  vengono sostituite dalle probabilità condizionate  $\mathbb{P}(H_j|D)$ . E ciò può complicare notevolmente la relazione fra  $\mathbb{P}(E|D)$  e le  $\mathbb{P}(E|D \cap H_j)$ .

Per illustrare il paradosso di Simpson da un punto di vista probabilistico nella prossima sezione verrà utilizzata la formula di decomposizione (16), ristretta al semplice caso di una partizione costituita da soli due eventi  $H, \tilde{H}$ . In tale caso, in cui quindi  $n = 2$  e poniamo  $H_1 \equiv H, H_2 \equiv \tilde{H}$ , essa si riduce a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E|D) &= \mathbb{P}(E|D \cap H)\mathbb{P}(H|D) + \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H})\mathbb{P}(\tilde{H}|D) = \\ &= \mathbb{P}(E|D \cap H)\mathbb{P}(H|D) + \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H})(1 - \mathbb{P}(H|D)). \end{aligned} \quad (17)$$

Nel caso di indipendenza stocastica fra  $D$  ed  $H$  abbiamo poi, in particolare,

$$\mathbb{P}(E|D) = \mathbb{P}(E|D \cap H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H})\mathbb{P}(\tilde{H}).$$

## Paradosso di Simpson e correlazione negativa

Come si è appena detto, in questa sezione guardiamo il paradosso di Simpson da un punto di vista probabilistico e vogliamo mettere in luce il fatto che le espressioni (13) e (14) non vadano soltanto viste come delle manipolazioni aritmetiche.

Fissiamo una volta per tutte un evento  $E$ .

Siano poi dati un evento  $H$  ed un evento  $D$ .

Supponiamo di voler confrontare  $\mathbb{P}(E|D)$  con  $\mathbb{P}(E|\tilde{D})$  basandoci sull'assegnazione delle probabilità condizionate

$$\mathbb{P}(E|D \cap H), \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H}), \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap H), \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap \tilde{H}), \mathbb{P}(H|D), \mathbb{P}(H|\tilde{D}).$$

A questo scopo applichiamo, a tali due probabilità condizionate, la formula (17) e confrontiamo

$$\mathbb{P}(E|D) = \mathbb{P}(E|D \cap H)\mathbb{P}(H|D) + \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H})\mathbb{P}(\tilde{H}|D), \quad (18)$$

con

$$\mathbb{P}(E|\tilde{D}) = \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap H)\mathbb{P}(H|\tilde{D}) + \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap \tilde{H})\mathbb{P}(\tilde{H}|\tilde{D}). \quad (19)$$

Supponiamo che pure valgano le disuguaglianze

$$\mathbb{P}(E|D \cap H) > \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap H), \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H}) > \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap \tilde{H}). \quad (20)$$

Vediamo facilmente che ciò non basta a garantire che risulti  $\mathbb{P}(E|D) > \mathbb{P}(E|\tilde{D})$ .

Infatti le due coppie di pesi  $(\mathbb{P}(H|D), \mathbb{P}(\tilde{H}|D))$  e  $(\mathbb{P}(H|\tilde{D}), \mathbb{P}(\tilde{H}|\tilde{D}))$ , nelle due precedenti combinazioni convesse (18) e (19) rispettivamente, sono diverse fra di loro.

Supponiamo ad esempio che l'evento  $E$  sia correlato positivamente con l'evento  $H$  cioè

$$\mathbb{P}(E|H) > \mathbb{P}(E|\tilde{H}).$$

Vediamo che la validità o meno della disuguaglianza  $\mathbb{P}(E|D) > \mathbb{P}(E|\tilde{D})$  dipenderà dalle relazioni che sussistono fra  $\mathbb{P}(E|D \cap H)$  e  $\mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H})$ , fra  $\mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap H)$  e  $\mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap \tilde{H})$  e fra  $\mathbb{P}(H|D)$  e  $\mathbb{P}(\tilde{H}|D)$ .

Ragionamento analogo si potrebbe ripercorrere nel caso opposto in cui  $E$  sia correlato negativamente con l'evento  $H$ .

Notiamo in proposito che l'ipotesi di indipendenza stocastica fra  $E$  e  $D$  darebbe luogo all'implicazione

$$\mathbb{P}(E|D \cap H) > \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap H), \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H}) > \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap \tilde{H}) \Rightarrow \mathbb{P}(E|D) > \mathbb{P}(E|\tilde{D}),$$

in quanto risulterebbe  $\mathbb{P}(H|D) = \mathbb{P}(H|\tilde{D}) = \mathbb{P}(H)$ ,  $\mathbb{P}(\tilde{H}|D) = \mathbb{P}(\tilde{H}|\tilde{D}) = \mathbb{P}(\tilde{H}) = 1 - \mathbb{P}(H)$ .

Quando si verificano contemporaneamente le disequaglianze (20) e  $\mathbb{P}(E|D) < \mathbb{P}(E|\tilde{D})$ , diremo che la terna di eventi  $(E; D, H)$  realizza il paradosso di Simpson.

In definitiva, quindi, il "paradosso" si può realizzare quando, oltre alla (20) si ha, ad esempio,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E|D \cap H) &> \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H}), \\ \mathbb{P}(H|D) &< \mathbb{P}(\tilde{H}|D). \end{aligned}$$

Quest'ultima disequaglianza esprime cioè una correlazione negativa fra l'ipotesi  $H$  (favorevole all'evento  $E$ ), e l'evento osservato  $D$ .

Torniamo ora all'analisi della precedente coppia di tabelle  $\mathcal{T}'$  e  $\mathcal{T}''$  e osserviamo quanto segue.

Pensiamo ad una popolazione (ad esempio quella dei  $410 = 200 + 210$  soggetti di cui nella sperimentazione clinica trattata precedentemente). Pensiamo inoltre ad un esperimento casuale in cui venga estratto a caso un elemento da tale popolazione e consideriamo gli eventi aleatori definiti come segue:

$E \equiv \{\text{Viene estratto un soggetto guarito}\},$

$D \equiv \{\text{Viene estratto un soggetto trattato con il nuovo farmaco}\}$

$H \equiv \{\text{Viene estratto un soggetto ospedalizzato}\}$

e siano  $\tilde{E}, \tilde{D}, \tilde{H}$  le loro rispettive negazioni.

I rapporti  $\frac{n'}{N'}, \frac{m'}{M'}, \frac{n''}{N''}, \frac{m''}{M''}, \frac{n'+n''}{N'+N''}, \frac{m'+m''}{M'+M''}$  possono essere rispettivamente visti, in tal caso, come probabilità condizionate della forma

$$\mathbb{P}(E|D \cap H), \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap H), \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H}), \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap \tilde{H}), \mathbb{P}(E|D), \mathbb{P}(E|\tilde{D}),$$

per la terna di eventi  $(E; D, H)$ .

E la coppia di tabelle  $\mathcal{T}'$  e  $\mathcal{T}''$  realizza il paradosso di Simpson se e soltanto se anche la terna  $(E; D, H)$  realizza il paradosso di Simpson, secondo la definizione data qui sopra.

Notiamo in proposito che, per tale terna, la probabilità  $\mathbb{P}(H)$  sarebbe espressa da  $\frac{N'+M'}{N'+M'+N''+M''}$  e le probabilità condizionate  $\mathbb{P}(H|D)$ ,  $\mathbb{P}(H|\tilde{D})$  sarebbero rispettivamente espresse dai rapporti

$$\frac{N'}{N'+M'}, \frac{N''}{N''+M''}.$$

Quindi le formule (18), (19) rispettivamente coincidono con le espressioni (13) e (14).

L'indipendenza stocastica fra  $H$  e  $D$ , che sarebbe sufficiente ad escludere il realizzarsi del paradosso, è appunto espressa dalla relazione

$$\frac{N'}{N'+M'} = \frac{N''}{N''+M''}.$$

Uno dei motivi per i quali, da un punto di vista intuitivo, si può essere portati a vedere come paradossale la coppia di disuguaglianze

$$\mathbb{P}(E|D \cap H) > \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H}), \mathbb{P}(H|D) < \mathbb{P}(\tilde{H}|D)$$

sta appunto nel fatto che si è portati a dare per scontata l'indipendenza stocastica fra  $H$  e  $D$  e che si tralascia di prendere nella debita considerazione un'eventuale correlazione negativa fra  $H$  e  $D$ .

## Conclusioni

Abbiamo definito e brevemente illustrato il paradosso di Simpson da due angolature, fra loro leggermente diverse: una, diciamo più aritmetica, o statistica, e l'altra più probabilistica. In quest'ultima accezione intervengono eventi, probabilità di eventi e probabilità condizionate. Nella prima accezione invece intervengono dei rapporti fra numeri interi.

Per dare un'immagine di situazioni in cui il paradosso può presentarsi, e per illustrare quali siano delle condizioni che permettano di evitarlo, la visione probabilistica del fenomeno si basa sulle nozioni di probabilità condizionata e correlazione (positiva o negativa) e sulla formula (17). Tale visione può, in qualche modo, risultare più efficace rispetto all'altra.

Essa mette in luce che il paradosso di Simpson si può presentare quando si tralascia di considerare una correlazione negativa fra due fattori.

L'impostazione probabilistica è anche più generale, in quanto le probabilità condizionate

$$\mathbb{P}(E|D \cap H), \mathbb{P}(E|D \cap \tilde{H}), \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap H), \mathbb{P}(E|\tilde{D} \cap \tilde{H}), \mathbb{P}(H|D), \mathbb{P}(E|\tilde{D})$$

potrebbero anche non essere numeri razionali, come invece è implicato automaticamente nel percorso, sopra descritto, che parte dalle due tabelle  $\mathcal{T}'$  e  $\mathcal{T}''$ .

Abbiamo sin qui descritto il paradosso di Simpson nella sua forma più semplice e basilare. Ma a partire dall'impostazione probabilistica è, inoltre, naturale considerarne anche varie forme di generalizzazione.

Ricordiamo che un evento aleatorio  $E$  (o, quanto meno, la sua *funzione indicatrice*  $\mathbf{1}_E$ ) si può riguardare come un caso particolarissimo di variabile aleatoria: cioè una variabile aleatoria che può assumere soltanto due valori, ad esempio 0 ed 1.

Facendo intervenire variabili aleatorie al posto di eventi, e in termini di proprietà di dipendenza stocastica, possiamo formulare il paradosso di Simpson in forme notevolmente più generali. E sotto tali forme si possono rispettivamente descrivere molti tipi di situazioni controverse o apparentemente paradossali, nel campo della statistica e della probabilità. Come si diceva, la letteratura in proposito è ricchissima e sconfinata nei campi più svariati della scienza e delle applicazioni. A titolo puramente indicativo, una minima lista di riferimenti bibliografici viene riportata nel seguito. Ma moltissimi altri contributi possono essere rintracciati in rete e nei database di pubblicazioni scientifiche.

La seguente formulazione del paradosso di Simpson è stata ad esempio considerata in [8], in termini di proprietà di dipendenza positiva per vettori di variabili aleatorie.

Consideriamo un vettore di variabili aleatorie  $\mathbf{X}$ , una variabile aleatoria  $Z$  ed una proprietà di dipendenza positiva  $\mathcal{D}$ .

Indichiamo con  $\mathfrak{Z}$  l'insieme dei valori che possono essere assunti dalla variabile  $Z$ ; indichiamo inoltre con  $\mathcal{L}(\mathbf{X})$  la legge di probabilità di  $\mathbf{X}$  e con  $\mathcal{L}(\mathbf{X}|Z = z)$  la legge di probabilità di  $\mathbf{X}$  condizionata all'ipotesi ( $Z = z$ ), per  $z \in \mathfrak{Z}$ .

Scriviamo brevemente  $\mathcal{L}(\mathbf{X}) \curvearrowright \mathcal{D}$  per affermare che una legge di probabilità  $\mathcal{L}(\mathbf{X})$  soddisfa la proprietà  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{L}(\mathbf{X}) \not\curvearrowright \mathcal{D}$  per negare che la proprietà  $\mathcal{D}$  sia soddisfatta.

Il paradosso considerato è allora definito dalla seguente coppia di relazioni:

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}|Z = z) \curvearrowright \mathcal{D}, \forall z \in \mathfrak{Z},$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}) \not\curvearrowright \mathcal{D}.$$

Nel linguaggio utilizzato in [7] questo sarebbe un "association distortion phenomenon".

Nel concludere va comunque notato che, sebbene siano interessanti diverse formulazioni più generali, la natura sostanziale del paradosso di Simpson, può essere già colta in pieno concentrando l'attenzione sul caso fondamentale delle due tabelle  $2 \times 2$ ,  $\mathcal{T}'$  e  $\mathcal{T}''$ , e sulla sua interpretazione in termini della formula di decomposizione (18) per le probabilità condizionate, presentata nella precedente sezione.

## Bibliografia

- [1] A. F. Beardon. Unravelling Simpson's paradox. *Math. Gaz.* 102, no. 555, 534-535, 2018.
- [2] A. Chambaz, I. Drouet, S. Memetea. Simpson's paradox, a tale of causality. *J. SFDs* 161, no. 1, 42-66, 2020.
- [3] C. Di Serio, Y. Rinott, M. Scarsini. Simpson's paradox in survival models. *Scand. J. Stat.* 36, no. 3, 463-480, 2009.
- [4] N. Falletta. *Il libro dei paradossi*. Ed. TEA, Milano, 1994.
- [5] J. Gou, F. Zhang. Experience Simpson's paradox in the classroom. *Amer. Statist.* 71, no. 1, 61-66, 2017.
- [6] D. G. Saari. *Mathematics motivated by the social and behavioral sciences*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 91. SIAM, Philadelphia, PA, 2018.
- [7] M. L. Samuels. Simpson's paradox and related phenomena. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 88, 81-88, 1993.
- [8] M. Scarsini, F. Spizzichino. Simpson-type paradoxes, Dependence, and Ageing. *J. Appl. Prob.* 36, 119-131, 1999.
- [9] A. Selvitella. The Simpson's paradox in quantum mechanics. *J. Math. Phys.* 58, no. 3, 032101, 37, 2017.
- [10] E. H. Simpson. The interpretation of interaction in contingency tables. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* 13, 238-241, 1951.
- [11] R. Steyer, W. Nagel. *Probability and conditional expectation. Fundamentals for the empirical sciences*. Wiley Series in Probability and Statistics. J. Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2017.



# Longevità e Prestazioni in Termodinamica

## Longevity and Performance in Thermodynamics

Nicola Fusco<sup>1</sup>

### Abstract

Thermodynamic analysis for reversible motors is unsuitable if the main role is played by power instead of efficiency. This is especially true for biological engines, which work under irreversible conditions. In this work, metabolism and aging are analyzed thermodynamically, linking the former with the transformations of an engine and the latter with the production of entropy. It follows that the maximum power  $P$  is not monotonic in the rate of entropy production  $R$ , but has a maximum. This result explains why natural selection has discarded biological motors that perform better than those living in nature.

## 1 Introduzione

In questo lavoro si evidenzia come la potenza espressa da un motore reale sia collegata con l'entropia prodotta ad ogni ciclo. Di conseguenza non è possibile esprimere una potenza superiore ad un certo valore senza superare un dato valore di tasso di produzione di entropia.

Questo risultato è significativo per i sistemi biologici: spiega perché in natura non si siano selezionate le mutazioni e gli stili di alimentazione che allungano la vita migliorando il metabolismo in senso entropico.

Nel paragrafo 2 viene adattata la termodinamica ai sistemi biologici e si analizza qualitativamente il legame tra invecchiamento ed entropia.

Nel paragrafo 3 vengono introdotte le macchine endoreversibili e se ne analizzano alcuni aspetti termodinamici.

Nel paragrafo 4 è analizzata la competizione tra due varianti, in longevità o in prestanza fisica, della stessa specie per la stessa nicchia ecologica.

Infine nel paragrafo 5 si discute il significato di quanto visto nei paragrafi precedenti per la sopravvivenza in natura degli animali e la salute umana.

---

<sup>1</sup>Liceo Scientifico "Arcangelo Scacchi", Bari (BA); nicola.fusco@gmail.com

## 2 Metabolismo, Invecchiamento e Termodinamica

Le cellule, per quanto riguarda le loro funzioni metaboliche, sono delle macchine termiche, per cui si può applicare la termodinamica sviluppata a riguardo: il calore in ingresso è l'energia fornita dall'ossidazione dei nutrienti, il lavoro è di volta in volta legato alle funzioni proprie della cellula,<sup>2</sup> il calore in uscita è l'energia associata alle molecole di scarto del metabolismo.

Inoltre le cellule (come tutte le macchine termiche reali)<sup>3</sup> sono macchine irreversibili: le reazioni chimiche avvengono in condizioni di non equilibrio.

Infine, dato che un sistema biologico esegue un altissimo numero di trasformazioni di energia nella sua vita, le cellule sono macchine cicliche, perché non potrebbero svolgere la loro funzione con una sola trasformazione.

In realtà esattamente cicliche non sono, perché una macchina ciclica irreversibile scarica all'esterno tutta l'entropia prodotta e quindi continuerebbe a funzionare all'infinito (o almeno finché avesse possibilità di approvvigionarsi di energia, cioè di cibo e ossigeno). Il fatto che tutti i sistemi biologici invecchino significa che in realtà una piccola parte dell'entropia prodotta ad ogni ciclo resta all'interno della cellula o comunque nell'organismo. Questo, con il tempo, porta ad un peggioramento delle prestazioni [4], perché si riduce il rendimento e la potenza dalle cellule viste come macchine termiche, fino a che tale rendimento e potenza diventano insufficienti per mantenere in funzione tutto l'organismo.

Tuttavia, per il seguito, i sistemi biologici possono essere considerati ciclici: in una cellula viene realizzato un numero enorme di cicli metabolici in tempi sufficientemente ristretti (un giorno, ad esempio) da non evidenziare effetti di invecchiamento (che richiedono anni, per l'organismo, o mesi per la singola cellula) ma sufficientemente lunghi da essere significativi in termini di valutazione delle prestazioni dell'organismo. Per cui possiamo trascurare la variazione interna di entropia dovuta ad un singolo ciclo. L'approssimazione considerata non impedisce di poter usare le conclusioni così tratte, con la consapevolezza del ruolo dell'entropia, per dedurre ulteriori aspetti termodinamici dell'invecchiamento e del metabolismo.

## 3 Potenza e Tasso di Produzione di Entropia

In questo paragrafo si dedurrà per via termodinamica il legame che c'è tra la potenza emessa da un motore e l'entropia prodotta di conseguenza. Si fa presente che i calori saranno sempre intesi in valore assoluto, per cui il segno relativo al verso degli scambi sarà esplicitato ogni volta che sarà necessario.

---

<sup>2</sup> le cellule muscolari produrranno un vero e proprio lavoro meccanico, in altri casi l'energia sarà usata per sintetizzare proteine o altre molecole, e così via.

<sup>3</sup> a questo proposito si veda il paragrafo 3.1.

### 3.1 Potenza finita e macchine endoreversibili

Benché le macchine reversibili abbiano una grande importanza dal punto di vista teorico, sotto alcuni aspetti sono lontanissime dal descrivere il comportamento di ciò che accade realmente in natura. Uno di questi aspetti è legato alla potenza. Una macchina reversibile, se realizzato, impiegherebbe un tempo virtualmente infinito per completare un solo ciclo. Di conseguenza, anche se hanno il miglior rendimento, di fatto sono motori a potenza nulla, il che li rende inutili in qualunque situazione reale, soprattutto se il motore in questione anima un animale che deve poter esprimere una certa potenza finita per poter sfuggire ai predatori o agguantare le proprie prede.

Ciò che rende infinitamente lenta l'evoluzione delle macchine reversibili è il fatto di lavorare in equilibrio con l'ambiente esterno:<sup>4</sup> il flusso di calore  $J_Q$  è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura tra i corpi

$$J_Q = \frac{Q}{t} = \sigma (T_2 - T_1) \quad (1)$$

dove  $\sigma$  è la conduttività termica, che dipende dalle caratteristiche dello scambio termico, per esempio lo spessore e la composizione del materiale attraverso cui avviene lo scambio. Differenza di temperatura nulla significa flusso nullo e quindi un tempo infinito per trasferire calore.

Per modellizzare più realisticamente il comportamento delle macchine termiche realmente esistenti, si deve rinunciare alla condizione di reversibilità completa e si possono considerare delle *macchine endoreversibili*, che sono macchine in tutto e per tutto uguali a quelle reversibili finché si guarda ciò che accade all'interno del sistema trasduttore, ma gli scambi di energia con l'esterno avvengono in condizioni di non equilibrio.<sup>5</sup>

Prima di proseguire va precisato che è chiaro che anche le macchine endoreversibili non sono identiche alle macchine termiche reali, le quali funzionano anche in condizioni di non equilibrio interno. Tuttavia questo ulteriore affinamento, con inevitabili complicazioni di carattere matematico, non modificherebbe sostanzialmente i risultati in quanto semplicemente aggiungerebbe una nuova fonte di entropia oltre quelle già considerate. Inoltre qualunque condizione realistica di non equilibrio può essere sempre analizzata con una suddivisione in sistemi endoreversibili sufficientemente piccoli [6,1].

### 3.2 Il motore di Carnot endoreversibile (MCE)

Si può modificare la macchina di CARNOT in una macchina endoreversibile che lavora tra due temperature  $T_H$  e  $T_C$  ma il cui gas esegue le isoterme alle temperature di esercizio  $T_W$  e  $T_T$ . Affinché gli scambi di calore avvengano in tempi finiti e la macchina funzioni effettivamente come un motore, deve essere  $T_H > T_W > T_T > T_C$  [2]. Il tutto è schematizzato nella figura 1.

<sup>4</sup> Per esempio la macchina di Carnot scambia calore portando il gas alla stessa temperatura della sorgente con cui effettua lo scambio.

<sup>5</sup> Per il presente paragrafo si veda [2].

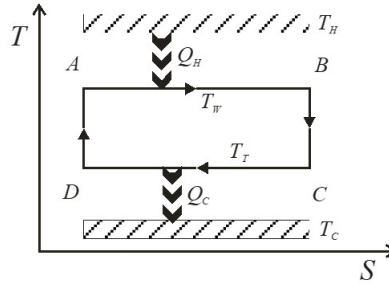


Fig. 1: Ciclo di CARNOT endoreversibile sul piano di Clapeyron  $TS$ .

Ora gli scambi di calore avvengono tra differenze non nulle di temperatura, per cui esiste una dinamica. Tenendo conto della (1) possiamo scrivere

$$\frac{Q_H}{t_H} = \sigma_H (T_H - T_W) \wedge \frac{Q_C}{t_C} = \sigma_C (T_T - T_C) \quad (2)$$

Il tempo totale  $t$  in cui avverrà un intero ciclo può essere calcolato come  $t = t_H + t_C$ , perché i tempi necessari a compiere le due adiabatiche possono essere considerati trascurabili in quanto possono essere di fatto ridotti a piacere mediante le caratteristiche costruttive del motore.<sup>6</sup> Per cui si ha

$$t = \frac{Q_H}{\sigma_H (T_H - T_W)} + \frac{Q_C}{\sigma_C (T_T - T_C)} \quad (3)$$

Si possono esprimere le quantità di calore con il lavoro  $L$ . Dal I principio della Termodinamica e il rendimento del motore di CARNOT, si ha

$$L = Q_H - Q_C \wedge L = \left(1 - \frac{T_T}{T_W}\right) Q_H \quad (4)$$

dalle (4) si ottiene

$$Q_H = \frac{T_W}{T_W - T_T} L \wedge Q_C = \frac{T_T}{T_W - T_T} L \quad (5)$$

dalla (3) si ricava poi  $t$  e quindi la potenza  $P$  in funzione delle temperature

$$P = \frac{L}{t} = \left( \frac{1}{\sigma_H} \frac{1}{T_H - T_W} \frac{T_W}{T_W - T_T} + \frac{1}{\sigma_C} \frac{1}{T_T - T_C} \frac{T_T}{T_W - T_T} \right)^{-1} \quad (6)$$

Infine si può calcolare la variazione di entropia  $\Delta S$  dell'ambiente esterno che è la quantità totale di entropia prodotta in un ciclo dalla macchina. L'ambiente esterno è coinvolto in due scambi termici: cede  $Q_H$  quando il gas si espande e assorbe  $Q_C$  quando si comprime. Nel calcolo della variazione di entropia va usata la temperatura a cui avviene lo scambio. Dal punto di vista dell'ambiente, la temperatura a cui avviene

<sup>6</sup> è ancora più vero per i motori cellulari, per i quali l'equivalente delle adiabatiche sono le reazioni chimiche che avvengono all'interno della cellula, che in generale avvengono su tempi molto più brevi di quelli necessari ai nutrienti e ai prodotti di scarto per attraversare la parete cellulare, che invece sono l'equivalente delle isoterme, in quanto trasformazioni di scambio energetico con l'esterno.

lo scambio di  $Q_H$  è  $T_H$  mentre quella a cui avviene lo scambio  $Q_C$  è  $T_C$ . Per cui, tenendo conto delle (5),<sup>7</sup>

$$\Delta S = -\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_C}{T_C} = \frac{T_H T_T - T_C T_W}{T_H T_C (T_W - T_T)} L \quad (7)$$

da cui, dividendo per  $t$ , si ottiene il tasso di produzione di entropia  $R$

$$R = \frac{\Delta S}{t} = \frac{T_H T_T - T_C T_W}{T_H T_C (T_W - T_T)} P \quad (8)$$

dove si è tenuto conto della definizione della potenza  $P$ .

### 3.3 Potenza massima del MCE

Calcolando la potenza massima esprimibile da una macchina endoreversibile, otteniamo che questa si realizza quando le temperature di esercizio valgono

$$T_W (P_{\max}) = \frac{\sqrt{\sigma_H T_H} + \sqrt{\sigma_C T_C}}{\sqrt{\sigma_H} + \sqrt{\sigma_C}} T_H \wedge T_T (P_{\max}) = \frac{\sqrt{\sigma_H T_H} + \sqrt{\sigma_C T_C}}{\sqrt{\sigma_H} + \sqrt{\sigma_C}} T_C \quad (9)$$

In corrispondenza di queste temperature la potenza espressa è

$$P_{\max} = \sigma_H \sigma_C \frac{(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_C})^2}{(\sqrt{\sigma_H} + \sqrt{\sigma_C})^2} \quad (10)$$

mentre il tasso di produzione di entropia è

$$R (P_{\max}) = \frac{\sigma_H \sigma_C}{(\sqrt{\sigma_H} + \sqrt{\sigma_C})^2} \frac{(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_C})^2}{\sqrt{T_H T_C}} \quad (11)$$

Il rendimento di questa macchina, in condizioni di potenza massima, risulta

$$\eta (P_{\max}) = 1 - \sqrt{\frac{T_C}{T_H}} \quad (12)$$

e naturalmente è inferiore a quello della macchina di CARNOT reversibile.

Quindi la MCE presenta effettivamente una potenza non nulla, ed è quindi un buon candidato a rappresentare le macchine termiche reali, e presenta un picco di potenza che può essere migliorato variando le conduttività termiche. Tuttavia questa potenza finita si paga con una continua produzione di entropia.

### 3.4 MCE a produzione di entropia fissata

Per un'analisi completa è necessario poter confrontare macchine endoreversibili caratterizzate da un tasso di produzione di entropia  $R$  fissato. Per poter eseguire questo calcolo in maniera analitica è però necessario considerare le due conduttività termiche

<sup>7</sup> Analizzando la variazione di entropia della macchina invece si ottiene zero, come per un motore di Carnot reversibile: una macchina ciclica, reversibile o irreversibile che sia, ad ogni ciclo ritorna nello stato iniziale.

uguali ( $\sigma_H = \sigma_C = \sigma$ ). Questo riduce la generalità ma non è un aspetto molto influente, perché in generale i meccanismi di scambio energetico sono simili in entrata e uscita.<sup>8</sup>

Fissato il tasso di produzione di entropia ad  $R$ , e ricercato il valore massimo della potenza  $P|_R$  corrispondente, si ottiene, per le temperature ottimali,

$$\begin{cases} T_W (P_{\max}|_R) = \frac{\sigma+R-\sqrt{R(\sigma+R)}}{\sigma} T_H \\ T_T (P_{\max}|_R) = \frac{\sigma+R+\sqrt{R(\sigma+R)}}{\sigma} T_C \end{cases} \quad (13)$$

e, per la potenza massima della macchina endoreversibile,

$$P_{\max}|_R = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{R(\sigma+R)} (T_H - T_C) - R (T_H + T_C) \right] \quad (14)$$

Il grafico qualitativo della (14) è riportato nella figura 2.

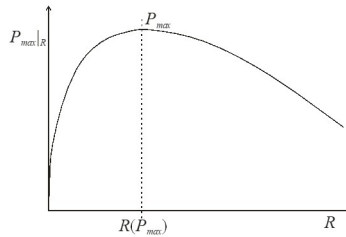


Fig. 2: Grafico della (14) al variare di  $R$ .

Dalla figura è evidente che non si può diminuire a piacere la produzione di entropia  $R$  senza diminuire contemporaneamente la potenza massima del motore. Per cui motori molto potenti inevitabilmente saranno anche dei grandi produttori di entropia, oltre che avere un minore rendimento.

## 4 Perché i Topi Matusalemme non Esistono in Natura?

La risposta a questa domanda è il motivo principale di questo lavoro. Ricapitoliamo brevemente la situazione sperimentale relativa a questo quesito evolutivo che si è posto in ambito della ricerca medico-biologica [5]:

- esiste una singola mutazione di un gene, osservata su una specie di topi usualmente allevati per la ricerca medica, che rende i topi più longevi, tali topi sono chiamati in letteratura *p66shc knock out*, per indicare la mutazione che li caratterizza o, più colloquialmente, *topi matusalemme*;
- la spiegazione della longevità risiede nel minor scarto metabolico di questi topi e, come osservato nel paragrafo 2, questo significa che le loro cellule producono meno entropia, indice di miglior rendimento, e la minor produzione di entropia rallenta l'invecchiamento.

<sup>8</sup> ancora una volta questo è maggiormente vero per i sistemi cellulari.

Dato che questi topi matusalemme “distano” geneticamente, dalla specie esistente in natura, per una singola mutazione, non è possibile che questa non sia mai comparsa spontaneamente: perché allora non è stata selezionata? I topi più longevi dovrebbero mettere al mondo più figli e quindi soppiantare la variante meno longeva nel giro di qualche generazione, o almeno dovrebbero convivere in una condizione di equilibrio. Invece in natura non sono presenti.

I paragrafi precedenti chiariscono la questione. Esiste un minimo di potenza che i motori cellulari di un animale devono esprimere, per sfuggire ai predatori o per competere con i simili sul cibo. Sia  $P_{fitness}$  questo valore<sup>9</sup> e tracciamo sulla figura 2 una retta corrispondente. Questa retta intercetta il grafico in due punti, e siano  $R_1$  e  $R_2$  i valori corrispondenti di  $R$  (figura 3).

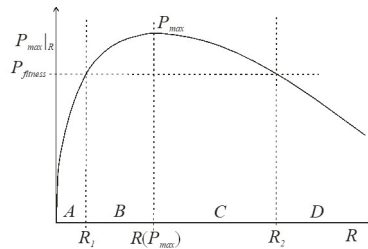


Fig. 3: Figura 2 con evidenziato il valore  $P_{fitness}$ .

L'asse  $R$  risulterà allora diviso in quattro zone.

$A = \{0 < R < R_1\}$ : in questa zona ci sono individui con motori cellulari a bassa produzione di entropia, ma con potenza insufficiente per la sopravvivenza. Questi individui soccombono ancor prima di riprodursi.

$B = \{R_1 < R < R(P_{max})\}$ : in questa zona ci sono individui con motori cellulari di potenza sufficiente alla sopravvivenza. La produzione di entropia è maggiore che per gli individui  $A$ , ma è la più bassa tra quelli in grado di sopravvivere. Però, in questo gruppo, chi ha una prestanza fisica migliore invecchia più velocemente.

$C = \{R(P_{max}) < R < R_2\}$ : anche in questa zona ci sono individui con motori cellulari di potenza sufficiente alla sopravvivenza, tuttavia hanno una produzione di entropia più alta che nel gruppo precedente. Questi individui soccombono nella competizione con quelli del gruppo  $B$ , che hanno la stessa prestanza fisica ma vivono più a lungo.<sup>10</sup> Tuttavia, se altre condizioni impediscono la nascita di individui  $B$  allora questo gruppo diventa dominante. La competizione interna a questo gruppo porta alla selezione degli individui con minore  $R$ , dato che in questo gruppo basso  $R$  indica anche alta potenza, e quindi doppiamente favorito nella selezione rispetto agli altri individui  $C$ .

<sup>9</sup> Questo valore cambia nel tempo, tuttavia esso muta con i tempi dell'evoluzione biologica, per cui possiamo considerarlo praticamente costante nell'analizzare la competizione tra varianti di una stessa specie nel corso della stessa generazione.

<sup>10</sup> A tal proposito si veda il paragrafo 4.3.

$D = \{R > R_2\}$ : in questa zona ci sono individui senza alcuna speranza, hanno una bassa prestanza fisica e in più vivono anche poco perché i loro motori cellulari invecchiano molto in fretta; gli individui di questo gruppo sono destinati all'estinzione indipendentemente dalla presenza o meno di altri individui della stessa specie con mutazioni più favorevoli (gruppi  $B$  e  $C$ ).

È necessario quindi vedere cosa accade quando si innesca la competizione tra individui tutti appartenenti alla tipologia  $B$  (cioè in cui la maggiore longevità si accompagna con prestazioni fisiche peggiori e viceversa)<sup>11</sup> e tra individui appartenenti alla tipologia  $B$  e individui appartenenti alla tipologia  $C$  (cioè in cui i diversi individui differiscono solo per la longevità).

#### 4.1 La competizione per la stessa nicchia ecologica

In questo paragrafo e nei successivi due si analizza il sistema dinamico corrispondente alla competizione tra due varianti, in longevità o in prestanza fisica, della stessa specie per la corrispondente nicchia ecologica. In sostanza si vuole vedere sia come evolve la competizione all'interno del gruppo  $B$  di cui si è parlato nel paragrafo 4 sia come evolve la competizione tra individui del gruppo  $B$  e del gruppo  $C$  con le stesse prestazioni fisiche.

Per l'analisi si parte dal *modello preda-predatore (quarry-predator) di LOTKA-VOLTERRA* [3]. In questo modello sono presenti una specie preda  $q$  e una predatrice  $p$ . Il modello tiene conto del diverso ruolo nell'habitat e della competizione per il cibo tra individui della stessa specie.

$$\begin{cases} q' = (T_q - C_q q - Qp) q \\ p' = (-T_p - C_p p + Pq) p \end{cases} \quad (15)$$

$T_q$  è il tasso di crescita delle prede in assenza di predatori e con risorse alimentari illimitate (quindi senza competizione tra prede), questo fattore quindi dipende solo dalla capacità riproduttiva e dal tasso di mortalità.  $T_p$  è il tasso di decrescita per fame della popolazione di predatori in assenza di prede.

$C_q$  e  $C_p$  descrivono la competizione, rispettivamente, tra prede e tra predatori.  $Q$  e  $P$  sono i fattori, rispettivamente, di riduzione della popolazione di prede e di accrescimento della popolazione di predatori, per la predazione.

Per avere un termine di paragone, riportiamo di seguito l'andamento del sistema dinamico (per le sole prede  $q$ ) descritto dalle (15).

<sup>11</sup> Per questa analisi si veda il paragrafo 4.2.



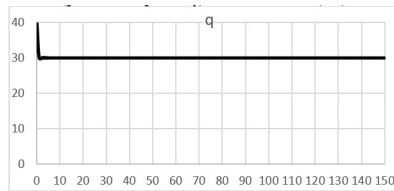


Fig. 4: Integrazione numerica delle (15) con condizioni iniziali  $q(0) = 40, p(0) = 10, T_q = 5, C_q = 0.1, Q = 0.1, T_p = 1, C_p = 0.1, P = 0.1$ .

Passando al sistema dinamico per la competizione tra individui della stessa specie con longevità e prestazioni muscolari diverse, consideriamo il caso in cui la popolazione  $q$  di prede sia composta da due gruppi di individui uguali in tutto e per tutto tranne che per la longevità ed eventualmente per la prestanza fisica:  $L$  sono individui più longevi,  $S$  hanno una vita media più breve. Questi due gruppi condividono sia il cibo sia i predatori, mentre per i predatori è indifferente cibarsi dell'uno o l'altro gruppo.

Cosa accade alle prede per effetto della competizione, sia diretta per l'approvvigionamento del cibo, sia indiretta per sfuggire ai predatori?

Per analizzare questa situazione dobbiamo quindi modificare le (15) sulla base di come longevità e prestazioni fisiche influenzano la crescita e la competizione tra le popolazioni.

- La longevità assoluta influenza il fattore  $T_q$ , perché esso dipende anche dal tasso di mortalità, quindi sarà  $T_L > T_S$ . In tutta generalità possiamo porre  $T_S = T_q$  e  $T_L = T_q (1 + \Delta)$ .
- La probabilità di un incontro tra una preda di un dato tipo e un predatore è direttamente proporzionale sia al numero di predatori sia al numero totale di prede di quel tipo. Dopodiché deve essere valutata la probabilità che da tale incontro scaturiscano la morte della preda e la nutrizione del predatore. Il termine relativo alla predazione, quindi, nelle equazioni per le prede resta formalmente lo stesso ma dovremo specificare separatamente i valori di  $Q_L$  e  $Q_S$ , che saranno uguali nel caso in cui le prestazioni muscolari dei due gruppi di prede sono paragonabili, viceversa saranno diversi. Nell'equazione dei predatori avremo due termini separati, uno per ciascun gruppo di prede, e ognuno sarà caratterizzato da un parametro diverso,  $P_L$  e  $P_S$ .
- La differenza di prestazioni fisiche influenza anche la competizione tra le prede. Se le prestazioni sono uguali il risultato di una competizione tra prede nello stesso gruppo o prede di due gruppi diversi è uguale e quindi il termine di competizione è semplicemente  $-C_q (q_L + q_S)$ . Invece, nel caso di prestazioni fisiche diverse, per un individuo  $S$  è più facile vincere con un individuo  $L$  che con un altro  $S$ , viceversa per un  $L$  è più difficile vincere con un individuo  $S$  che con un altro  $L$ . Per semplicità, ma senza che ciò influenzi gli aspetti fondamentali della nostra analisi, possiamo immaginare che la competizione tra individui

dello stesso gruppo produca effetti simili, mentre gli effetti della competizione tra gruppi diversi saranno diversi sui due diversi gruppi di individui. Quindi, in questo caso, il termine di competizione deve essere espresso come  $-C_q q_L - C_{LS} q_S$  nell'equazione per  $q'_L$  e come  $-C_{SL} q_L - C_q q_S$  nell'equazione per  $q'_S$ .

Quindi le equazioni differenziali per la dinamica di questo sistema sono

$$\begin{cases} q'_L = [T_q (1 + \Delta) - C_q q_L - C_{LS} q_S - Q_L p] q_L \\ q'_S = [T_q - C_{SL} q_L - C_q q_S - Q_S p] q_S \\ p' = [-T_p - C_p p + P_L q_L + P_S q_S] p \end{cases} \quad (16)$$

Ora vanno specificati i diversi parametri in base allo scenario analizzato.

## 4.2 Longevità vs Prestanza

In questo caso gli individui presentano una correlazione inversa tra longevità e prestanza fisica: gli individui più longevi sono meno prestanti e viceversa.

Come detto in precedenza, un individuo  $L$  compete più difficilmente con un individuo  $S$  che con un altro individuo  $L$ , mentre accade il contrario per un individuo  $S$ . Questo significa che la competizione tra prede di gruppi diversi (che ha sempre un effetto negativo sulle prede) penalizza maggiormente la popolazione  $L$  che quella  $S$ , pertanto risulta  $C_{LS} > C_q > C_{SL}$ . Poniamo allora  $C_{LS} = C_q (1 + \Delta)$  e  $C_{SL} = C_q (1 - \Delta)$ .<sup>12</sup>

Sempre a causa della differenza di prestazioni, per un predatore è più facile predare un individuo  $L$  che un individuo  $S$ , quindi risulta  $Q_L > Q_S$  e  $P_L > P_S$ . Poniamo quindi  $Q_L = Q (1 + \Delta)$ ,  $Q_S = Q$ ,  $P_L = P (1 + \Delta)$  e  $P_S = P$ .

Le equazioni (16) diventano, in questo caso,

$$\begin{cases} q'_L = [T_q (1 + \Delta) - C_q q_L - C_q (1 + \Delta) q_S - Q (1 + \Delta) p] q_L \\ q'_S = [T_q - C_q (1 - \Delta) q_L - C_q q_S - Q p] q_S \\ p' = [-T_p - C_p p + P (1 + \Delta) q_L + P q_S] p \end{cases} \quad (17)$$

Integrando le (17) con gli stessi parametri della figura 4, otteniamo

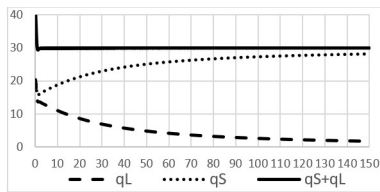


Fig. 5: Integrazione delle (17) con condizioni iniziali  $q_L(0) = q_S(0) = 20$  e  $\Delta = 0.2$ .

<sup>12</sup> In generale la relazione tra variazione della longevità e variazione delle prestazioni muscolari (e tra queste e la probabilità di avere la meglio in una competizione o di essere predati) non è necessariamente lineare. Ma supponiamo che per piccole variazioni sussista questo legame come conseguenza di uno sviluppo in serie.

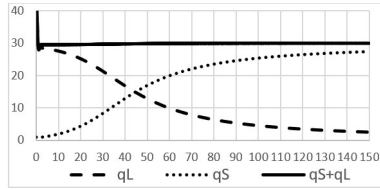


Fig. 6: Integrazione delle (17) con condizioni iniziali  $q_L(0) = 39$ ,  $q_S(0) = 1$  e  $\Delta = 0.2$ .

La figura 5 riporta l'andamento nel caso di una partenza in sostanziale parità di popolazione tra i due gruppi di prede, mentre la figura 6 è l'andamento nel caso in cui la popolazione  $S$  parte in netto svantaggio numerico sulla popolazione  $L$ . In entrambi i casi la popolazione  $L$  si estingue in poco tempo come effetto della competizione diretta e indiretta. Ciò è sottolineato anche dall'andamento della popolazione totale di prede che ricalca quello della figura 4 per una popolazione di prede indifferenziata.

Come si vede in questo caso il vantaggio è tutto a favore della popolazione che esprime una potenza maggiore. Variare  $\Delta$  cambia solo la scala dei tempi in cui avviene la stabilizzazione delle popolazioni, ma non la forma dei grafici.<sup>13</sup> Quindi nella competizione tra gruppi con diverse prestazioni fisiche vince il gruppo più prestante, anche se ciò comporta una longevità inferiore.

Il risultato di questa analisi cambia solo se si amplifica la longevità relativa senza analoghe differenze di prestazioni. Ma questa situazione non è realistica in quanto, come già osservato, gli individui che appartengono tutti al gruppo  $B$  hanno comunque una longevità non troppo lontana tra loro, dato che sono tutti relativi ad un intervallo ristretto del tasso di produzione di entropia.

Considerare una longevità molto diversa porta a considerare la competizione tra individui di tipo  $B$  e  $C$  che è indagata nel paragrafo 4.3.

### 4.3 Longevità maggiore vs Longevità minore

Consideriamo ora la competizione tra individui con le stesse prestazioni fisiche ma con longevità differente. Pertanto non ci sarà alcuna differenziazione nei parametri legati alla competizione e alla predazione:  $C_{LS} = C_{SL} = C_q$ ,  $Q_L = Q_S = Q$ ,  $P_L = P_S = P$ .

$$\begin{cases} \dot{q}_L = [T_q(1 + \Delta) - C_q(q_L + q_S) - Qp]q_L \\ \dot{q}_S = [T_q - C_q(q_L + q_S) - Qp]q_S \\ \dot{p} = [-T_p - C_pp + P(q_L + q_S)]p \end{cases} \quad (18)$$

Integrando le (18) con gli stessi parametri della figura 4, otteniamo

<sup>13</sup> Identici risultati si ottengono anche se si annulla la differenza in longevità.

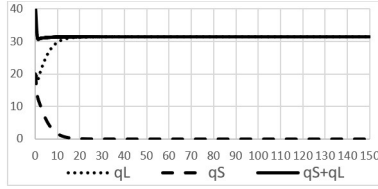


Fig. 7: Integrazione delle (18) con condizioni iniziali  $q_L(0) = q_S(0) = 20$  e  $\Delta = 0.2$ .

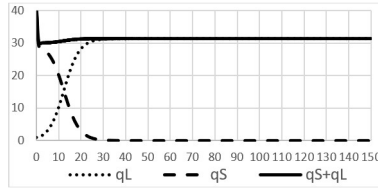


Fig. 8: Integrazione delle (18) con condizioni iniziali  $q_L(0) = 39$ ,  $q_S(0) = 1$  e  $\Delta = 0.2$ .

La figura 7 riporta l'andamento nel caso di una partenza in sostanziale parità di popolazione, mentre la figura 8 è l'andamento nel caso in cui la popolazione  $L$  parta in netto svantaggio numerico sulla popolazione  $S$ .

Come prevedibile, quando l'unica differenza è la longevità,<sup>14</sup> la popolazione con la vita media più lunga porta all'estinzione il gruppo con la vita media più breve, indipendentemente dalle condizioni iniziali.

## 5 Conclusioni

Dalle analisi dei paragrafi 4.2 e 4.3 deduciamo che la maggiore longevità è un vantaggio evolutivo solo quando essa non è accompagnata da prestazioni fisiche molto diverse, mentre è ininfluenza quando è accompagnata da prestazioni fisiche peggiori.

Questa analisi quindi suggerisce la seguente soluzione per il problema che ci siamo posti all'inizio del paragrafo 4, basata sul fatto che i topi matusalemme, nel grafico della figura 3, si trovano più a sinistra di quelli normali (longevità maggiore, quindi  $R$  minore).

Se la mutazione in esame, rispetto all'ambiente naturale, pone i topi matusalemme nella zona  $A$ , allora la loro sopravvivenza è compromessa a prescindere dalla presenza di altre varianti geniche della stessa specie. In questo caso i topi normali possono essere sia del tipo  $B$  o del tipo  $C$ , questo non comporta alcuna differenza. In laboratorio il problema non si pone perché l'essere allevati abbassa il valore di  $P_{fitness}$  praticamente a zero, peraltro azzerando sia la competizione interna alla specie sia la presenza di predatori, per cui sopravvivono entrambe le varietà dei topi e quindi i topi matusalemme riescono ad esprimere al meglio le proprie caratteristiche di longevità.

<sup>14</sup> Anche se la differenza in longevità è molto più ampia di quella in prestazioni.

Se la mutazione in esame pone i topi matusalemme nella zona  $B$ , allora li pone certamente nella parte di tale zona che corrisponde ad una longevità maggiore. La loro scomparsa dall'ambiente naturale suggerisce che anche i topi normali si trovino nella zona  $B$  o nella zona  $C$ , ma più vicini al picco di potenza. Di conseguenza la competizione interna, diretta e indiretta, elimina la mutazione più longeva a vantaggio di quella più prestante.

Quindi i topi apparentemente più avvantaggiati da una vita media lunga sono in realtà inadatti alla vita selvaggia, che richiede di competere meglio, piuttosto che vivere a lungo, per poter produrre una maggiore discendenza.

### **Interesse per la salute umana**

Il quesito è interessante perché il meccanismo metabolico che rende i topi mutanti più longevi è riproducibile sostanzialmente in tutti i mammiferi, il cui metabolismo di base è sostanzialmente regolato dalla stessa biochimica.

È infatti stato osservato, anche negli esseri umani, che la quantità di radicali liberi nell'organismo è direttamente collegata con la longevità: esseri umani che producono meno radicali liberi o che hanno sistemi più efficaci per il loro smaltimento, appaiono più giovani dei coetanei e vivono più a lungo.

La presenza di radicali liberi nell'organismo è connessa all'efficienza della trasformazione energetica: infatti la loro produzione è una diretta conseguenza delle reazioni di ossidazione con cui le cellule estraggono energia da grassi, proteine e carboidrati. Essi sono quindi i prodotti di scarto del metabolismo cellulare e sono quindi la "materializzazione" dell'entropia creata dal metabolismo. Tali molecole hanno un'alta reattività chimica e la loro persistenza all'interno delle cellule ne danneggia la struttura, "disordinandone" il funzionamento e la tenuta della parete. L'eccessivo accumulo porta alla terminazione della funzionalità della cellula, costringendo l'organismo ad un rimpiazzo precoce e di conseguenza ad uno stress nell'uso delle risorse, con conseguenza invecchiamento accelerato per l'organismo.

Il risultato di questo articolo spiega, almeno in parte, perché la vita media dell'uomo si è allungata man mano che ci siamo affrancati dalle condizioni più "selvagge" della vita preistorica: la riduzione delle prestazioni fisiche richieste per sopravvivere ha permesso di selezionare motori cellulari e stili di vita a minore produzione di entropia (cioè di radicali liberi) permettendo un invecchiamento più lento e quindi una vita più lunga. Naturalmente questi vantaggi continuano finché lo stile di vita individuale permette una bassa produzione e un efficiente smaltimento dei radicali liberi: alimentazione corretta e attività fisica costante.

## Bibliografia

- [1] B. J. ALDER and T. WAINRIGHT, Molecular Dynamics by Electronic Computers, in AA.VV., Transport Processes in Statistical Mechanics, Wiley 1958.
- [2] H. B. CALLEN, Thermodynamics and an Introduction To Thermostatistics – Second Edition, 4-9, Wiley 1985.
- [3] A. C. CAPELO, Modelli Matematici in Biologia – Introduzione all'ecologia matematica, capp. 3 e 4, Decibel editrice 1989.
- [4] S. R. CUMMINGS, The Biology of Aging, J. Musculoskelet Neuronal Interact 2007; 7(4): 340-341.
- [5] E. MIGLIACCIO, M. GIORGIO, S. MELE, G. PELICCI, P. REBOLDI, P.P. PANDOLFI, L. LANFRANCONE and P.G. PELICCI, The p66shc adaptor protein controls oxidative stress response and life span in mammals, Nature 402, 309-313 (1999).
- [6] I. PRIGOGINE and D. KONDEPUDI, Termodinamica. Dai motori termici alle strutture dissipative, 3.4, Bollati-Boringhieri, 2002.

# Interpolazione di Lagrange

## Lagrange Interpolation

Salvatore Menniti<sup>1</sup>, Crisenzia Bilotta<sup>2</sup> e Vincenzo Iorfida<sup>3</sup>

### Abstract

In questo lavoro si considera l'interpolazione di Lagrange e sono trattate alcune applicazioni di notevole interesse in Matematica ed in didattica, da proporre a studenti di classi quarte di scuola secondaria superiore di secondo grado durante l'orario curriculare, con attività di laboratorio.

L'interpolazione di Lagrange è particolarmente interessante per affrontare e risolvere problemi del mondo reale che ci circonda, attraverso l'ausilio dell'Analisi numerica.

Talvolta è conveniente nascondere un'informazione, per problemi di sicurezza, perciò si preferisce suddividere tale informazione in  $n$  segmenti d'informazione, utili a ricostruire l'informazione iniziale attraverso l'interpolazione di Lagrange.

In particolare, si considerano  $n + 1$  coppie di osservazioni di dati, relativamente a particolari fenomeni oppure si interpolano funzioni matematiche abbastanza complicate in alcuni punti, in modo da ottenere il polinomio di Lagrange di ordine  $n$  ed è possibile stimare l'errore commesso.

## Interpolazione di Lagrange

In Analisi numerica l'interpolazione di Lagrange è un tipo di interpolazione polinomiale, scoperta da Edward Waring nel 1779, successivamente ripresa da Joseph Louis Lagrange nel 1795.

Vale il seguente:

---

<sup>1</sup>salvatore.menniti@posta.istruzione.it - Istituto Tecnico Tecnologico "G. Malafarina" - Soverato (CZ) - Italia

<sup>2</sup>crisenzia.bilotta@posta.istruzione.it - Liceo Scientifico – Filadelfia (VV)

<sup>3</sup>vincenzo.iorfida@unical.it - Università della Calabria - Arcavacata di Rende (CS) - Italia

**Teorema** (di esistenza ed unicit )

Se  $f : [a; b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$    funzione tale che se  $x_i, x_j \in [a; b], x_i \neq x_j$ , con  $i \neq j$ , allora esiste un unico polinomio di interpolazione  $P_n(x) \in \mathbb{R}_n[x]$  tale che  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ , con  $P_n(x_i) = f(x_i)$ , per ogni  $i = 0, 1, \dots, n$ .

## Dimostrazione

Un polinomio  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{R}_n[x]$ , soddisfa  $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$  se e solo se il vettore dei coefficienti  $\vec{v} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$ , soddisfa il sistema lineare:

$A \cdot \vec{v} = \vec{y}$ , dove  $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$  ed

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

  matrice di Vandermonde sui nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ed  $A$    invertibile, essendo  $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ , infatti:

$$\det(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \prod_{i,j=0, i \geq j}^n (x_i - x_j), & \text{se } n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

quindi esiste un' unica soluzione del tipo:

$$\vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{y},$$

ci  significa che esiste un unico polinomio  $P_n(x) \in \mathbb{R}_n[x] : P_n(x_i) = y_i, \forall i = 0, 1, \dots, n$ . ■

Per dimostrare il Teorema di esistenza ed unicit  in modo differente, precisamente per provarne l'esistenza,   possibile definire:

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i, j=0}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

e vediamo che gli  $n + 1$  polinomi  $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$  hanno tutti grado  $n$  e costituiscono una base di  $\mathbb{R}_n[x]$ , poich   $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ , dove  $\delta_{ij}$    l'operatore di Kronecker che vale 1, se  $i = j$ , 0, altrimenti e vale  $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$  e  $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$  sono linearmente indipendenti, essendo  $\lambda_0 L_0(x) + \lambda_1 L_1(x) + \dots + \lambda_n L_n(x) = 0, \forall x$ , quindi in particolare  $\lambda_0 L_0(x_j) + \lambda_1 L_1(x_j) + \dots + \lambda_n L_n(x_j) = 0, \forall j = 0, 1, \dots, n$ , da cui  $\lambda_0 \delta_{0j} + \lambda_1 \delta_{1j} + \dots + \lambda_n \delta_{nj} = \lambda_j \delta_{jj} = 0 \iff \lambda_j = 0, \forall j = 0, 1, \dots, n$ .



Definiamo:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot L_i(x)$$

quindi  $P_n(x_j) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot L_i(x_j) = f(x_j) = y_j, \forall j = 0, 1, \dots, n$ .

Per provare l'unicità del Teorema precedente e dunque del polinomio  $P_n(x)$ , supponiamo per assurdo che esista un polinomio  $Q_n(x) \in \mathbb{R}_n[x]$  diverso da  $P_n(x)$ , del tipo:  $Q_n(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot L_i(x)$  e valutando  $Q_n(x)$  nei nodi distinti  $x_j, j = 0, 1, \dots, n$ , abbiamo:

$$y_j = Q_n(x_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot L_i(x_j) = \beta_j, \forall j = 0, 1, \dots, n \text{ da cui si ricava:}$$

$Q_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot L_i(x) = P_n(x)$ , che é assurdo e concludiamo che  $P_n(x)$  é unico.

Spesso si presentano le seguenti questioni:

- Si ha una funzione estremamente complicata, il cui calcolo richiede un elevato tempo macchina, per cui si tabula la funzione in un numero fissato di punti  $n+1$  punti distinti e si approssima tale funzione con un polinomio  $P_n(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ , mediante interpolazione di Lagrange.

-Se abbiamo  $n+1$  coppie di osservazioni  $(x_j, y_j)$ , con  $x_j, j = 0, 1, \dots, n$  distinti, che esprimono un campionamento di un fenomeno, si cerca una funzione  $f$ , tale che  $y_j = f(x_j)$  che rappresenti il fenomeno e si vuole valutare  $f$  in  $x \neq x_j$ , precisamente se

$\xi_1 := \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \xi_2 := \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , allora  $x \in [\xi_1; \xi_2] \subseteq [a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

In generale, dal punto di vista della complessità computazionale, é piú conveniente esprimere il polinomio di interpolazione con la notazione di Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x), L_i(x) = \prod_{j \neq i, j=0}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2)$$

con  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ , quindi  $P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x_j) = f(x_j) = y_j, \forall j = 0, 1, \dots, n$  con una complessità computazionale pari a  $n^2$ .

Se  $n = 1$ , il polinomio interpolatore sarà di primo grado, rispettivamente in  $x_0, x_1$ , con  $f(x_0), f(x_1)$ , quindi:

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

e se poniamo  $h := x_1 - x_0$ , abbiamo:

$$P_1(x) = \frac{f(x_1)(x - x_0) - f(x_0)(x - x_1)}{h}$$

il cui grafico é rappresentato da un segmento congiungente i punti  $(x_0; f(x_0)), (x_1; f(x_1))$ .

Valutiamo ora l'errore commesso, approssimando una funzione  $f$  con il polinomio interpolatore di Lagrange di grado  $n$ .

Un polinomio  $P^*$  di grado  $n$  é di migliore approssimazione, per definizione, se:

$$E_n^*(f) = \|f - P^*\|_\infty := \min_{P_n \in \mathbb{P}_n} \|f - P_n\|_\infty$$

### Teorema

Se  $f: [a; b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é funzione  $n + 1$  volte derivabile nell'intervallo  $]a; b[$  aperto e se  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a; b]$  sono punti distinti, allora  $\forall x \in [a; b], \exists \xi = \xi(x) \in ]a; b[$  tale che

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

dove  $\xi \in ]\min\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}; \max\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}[ \subseteq ]a; b[$  e  $P_n(x)$  é il polinomio di interpolazione di Lagrange.

#### Dimostrazione

Se  $x = x_i \in [a; b], \forall i = 0, 1, \dots, n$ , allora  $\forall \xi \in [a; b]$  abbiamo  $f(x) - P_n(x) = 0$ .

Se  $x \neq x_i \in [a; b]$ , definiamo  $h(c) = (c - x_0)(c - x_1)\dots(c - x_n)$  e sia  $r(c) = f(c) - P_n(c)$ .

Consideriamo la funzione  $\gamma: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da:  $\gamma(c) = r(c) - \frac{r(x)}{h(x)}h(c)$ .

Tale funzione é derivabile  $n + 1$  volte e  $\gamma(x) = \gamma(x_i) = 0, \forall i = 0, 1, \dots, n$ , quindi la funzione  $\gamma$  si annulla in almeno  $n+2$  punti, quindi dal Teorema di Rolle si annulla in  $\gamma'(x)$  si annulla in  $n + 1$  punti di  $(a; b)$ ,  $\gamma''(x)$  si annulla in  $n$  punti e cosi procedendo  $\gamma^{n+1}(x)$  si annulla in almeno un punto  $\xi \in (a; b)$ . quindi

$$\gamma^{n+1}(\xi) = r^{n+1}(\xi) - \frac{r(x)}{h(x)}h^{n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - P_n^{n+1}(\xi) - \frac{f(x) - P_n(x)}{h(x)}(n+1)! = 0.$$

Segue  $f^{n+1}(\xi) - \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}(n+1)! = 0$ , da cui la tesi é immediata ■

Attraverso il seguente teorema, é possibile fornire una stima dell'errore commesso:

### Teorema

Se  $f \in C^{n+1}([a; b])$  e se  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  sono punti distinti, allora

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \cdot (b - a)^{n+1}$$

#### Dimostrazione

Poiché  $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), x \in ]x_{k-1}; x_k[ \subseteq [a; b]$ , per qualche  $k = 1, \dots, n$  ed abbiamo:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|f^{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \cdot (b - a)^{n+1}, \text{ da cui}$$

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1} \quad \blacksquare$$

La distribuzione di nodi equispaziati é ottima, ma non è la migliore nell'interpolazione con polinomi algebrici, in quanto l'errore è minimizzato se i nodi sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev, relativi all'intervallo  $[a,b]$ ; inoltre, su nodi equispaziati, é tipico il fenomeno di Runge.

Ad esempio, per la funzione  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ , Runge trovó che interpolando questa funzione in un insieme di punti distinti  $x_i$ , equidistanti nell'intervallo  $[-1,1]$  con un polinomio  $P_n(x)$ , allora l'interpolazione risultante, oscilla in ampiezza verso gli estremi dell'intervallo  $-1$  e  $1$ .

É possibile provare che l'errore tende all'infinito, all'aumentare del grado del polinomio, ovvero:  $\|f - P_n\|_\infty = +\infty$ , per  $n \rightarrow +\infty$ .

Vediamo ora qualche esempio interessante del polinomio interpolatore di Lagrange.

### Applicazione

Il Presidente di un'azienda, per realizzare un nuovo prodotto attraverso un brevetto, che tiene nascosto in una cassaforte munita di password (o chiave segreta), nota solo a lui, ha bisogno di quattro persone e decide saggiamente di suddividere l'informazione, fissando  $n + 1 = 4$  coppie ordinate di punti distinti, assegnando quindi a quattro tra i suoi collaboratori di fiducia, solo una coppia ordinata di punti, senza peraltro che ciascuno conosca le informazioni consegnate agli altri.

Il Presidente decide di nascondere la chiave segreta fra i coefficienti di un polinomio  $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ ; precisamente, per nascondere la chiave segreta della cassaforte  $a_1 = 6$ , sceglie il polinomio di terzo grado:  $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 1$  e se dovesse mai accadergli qualsiasi cosa, solo allora tutto il personale, tra cui i suoi quattro collaboratori di fiducia potranno riunirsi e, attraverso ciascuna coppia ordinata di punti, ricevuta in segreto, si potrà ricostruire l'informazione completa ed avere accesso alla chiave segreta della cassaforte e quindi al brevetto conservato in essa.

In questo modo, il Presidente ha scelto un polinomio di terzo grado, con coefficienti interi arbitrari, tra cui il coefficiente del termine di secondo grado  $a_1 = 6$  che é la chiave segreta della cassaforte, necessaria per accedere al brevetto.

A questo punto la distribuzione degli  $n$  segmenti di informazione, fra gli  $n + 1$  collaboratori, avviene nel modo seguente: il Presidente sceglie a caso dei numeri distinti  $x_i$ , dove  $i = 0, 1, \dots, n$  e consegna al collaboratore di fiducia  $i$ -esimo, l'informazione  $(x_i; P(x_i))$ .

Meno di  $n + 1$  collaboratori che hanno ricevuto un'informazione  $(x_i; P(x_i))$ , con  $i = 0, 1, \dots, n$ , non possiedono sufficiente informazione per risolvere il problema di determinare il polinomio, che tra i suoi coefficienti nasconde la chiave segreta per accedere al brevetto, mentre se tutti gli  $n + 1$  collaboratori si riuniscono e considerano tutte le coppie  $(x_i; P(x_i))$ , per  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  ricevute dal Presidente, allora potranno scoprire il segreto, cioè ricostruire il polinomio interpolatore di Lagrange di terzo

grado, tra i cui coefficienti é presente la chiave segreta.

Infatti, se  $P(0) = -1$ ,  $P(-2) = 31$ ,  $P(2) = 15$ ,  $P(3) = 26$ , allora:

il polinomio  $h(x)$  é:  $h(x) = x(x+2)(x-2)(x-3)$ .

Abbiamo:

$$h'(0) = [(x+2)(x-2)(x-3)]_{x=0} = (0+2)(0-2)(0-3) = 12,$$

$$h'(-2) = [x(x-2)(x-3)]_{x=-2} = -2(-2-2)(-2-3) = -40,$$

$$h'(2) = [x(x+2)(x-3)]_{x=2} = 2(2+2)(2-3) = -8,$$

$$h'(3) = [x(x+2)(x-2)]_{x=3} = 3(3+2)(3-2) = 15.$$

Si calcolano i polinomi di Lagrange  $L_i(x) = \frac{h(x)}{(x-x_i)h'(x_i)}$ , ovvero:

$$L_0(x) = \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{12}, L_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{-40},$$

$$L_2(x) = \frac{x(x+2)(x-3)}{-8}, L_3(x) = \frac{x(x+2)(x-2)}{15}.$$

Il polinomio di Lagrange é proprio:

$$P(x) = \sum_{i=0}^3 P(x_i)L_i(x) = -x^3 + 6x^2 - 1.$$

Soltanto in questo modo, i quattro collaboratori potranno scoprire la chiave segreta che é  $a_1 = 6$ , per aprire la cassaforte e avere accesso al brevetto.

## Applicazione

Calcolare il polinomio interpolatore di Lagrange di grado 4 per la funzione  $y = \sin(x)$ , nell'intervallo  $[0; \pi]$ .

A tale scopo, si possono considerare i cinque punti della funzione del tipo:  $(n; \sin(n\pi/4))$ , con  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ :

(a) punti	
$x_i$	$f(x_i)$
0	0
1	$1/\sqrt{2}$
2	1
3	$1/\sqrt{2}$
4	0

Tab. 1.

Innanzitutto abbiamo:

$$h(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_i) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Abbiamo:

$$h'(0) = [(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]_{x=0} = (0-1)(0-2)(0-3)(0-4) = 24,$$

$$h'(1) = [x(x-2)(x-3)(x-4)]_{x=1} = 1(1-2)(1-3)(1-4) = -6,$$

$$h'(2) = [x(x-1)(x-3)(x-4)]_{x=2} = 2(2-1)(2-3)(2-4) = 4,$$

$$h'(3) = [x(x-1)(x-2)(x-4)]_{x=3} = 3(3-1)(3-2)(3-4) = -6,$$

$$h'(4) = [x(x-1)(x-2)(x-3)]_{x=4} = 4(4-1)(4-2)(4-3) = 24,$$

Poi si calcolano i polinomi di Lagrange  $L_i(x) = \frac{h(x)}{(x-x_i)h'(x_i)}$ , ovvero:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}, L_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}, L_2(x) = \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{4},$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{-6}, L_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}.$$

Il polinomio di Lagrange é:  $P(x) = \sum_{i=0}^4 f(x_i)L_i(x)$ , ovvero:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{-6} + 1 \cdot \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{-6}, \text{ ovvero:}$$

$$P(x) = \frac{x(x-4)}{12} \cdot ((3 - 2\sqrt{2})x^2 - 4(3 - 2\sqrt{2})x + 9 - 8\sqrt{2}), \text{ quindi il polinomio interpolatore di Lagrange é:}$$

$$P(x) = \frac{3-2\sqrt{2}}{12}x^4 - \frac{2}{3}(3-2\sqrt{2})x^3 + \frac{57-40\sqrt{2}}{12}x^2 + \frac{1}{3}(8\sqrt{2}-9).$$

L'algoritmo per l'implementazione del polinomio interpolatore nella forma di Lagrange in MATLAB, é il seguente:

```
function z = poli_lagrange(x, y, xx) n = length(x);
m = length(xx);
z = zeros(m, 1);
for i = 1 : m for j = 1 : n
p = 1;
for k = 1 : n
if j = k p = p * (xx(i) - x(k))/(x(j) - x(k)); end
end
z(i) = z(i) + y(j) * p; end
end
```

Attraverso tale algoritmo, possiamo verificare che il polinomio interpolatore di Lagrange dell'applicazione 1.1 é:

$$P(x) = 0.0143x^4 - 0.1144x^3 + 0.0360x^2 + 0.7712x.$$

### Applicazione

Data la funzione  $f(x) = \log(1+x)$ , calcolare il polinomio interpolatore di Lagrange di  $f$  per  $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$  utilizzarlo per approssimare  $\log(1.55)$ , calcolando l'errore commesso e fornire una stima dell'errore.

(a) punti	
$x_i$	$f(x_i)$
0	0
$1/2$	$\log(\frac{3}{2})$
1	$\log(2)$

Tab. 2.

Vale:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1/2)(x-1)}{-1/2(-1)} = (2x-1)(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-1)}{1/2(1/2-1)} = -4x(x-1) = -4x^2 + 4x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-1/2)}{1 \cdot (1-1/2)} = 2x(x-1/2) = 2x^2 - x$$

Quindi il polinomio interpolatore di Lagrange di grado  $n = 2$  é:

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) = 0 + \log(\frac{3}{2})(-4x^2 + 4x) + \log(2)(2x^2 - x)$$

ed essendo  $\log(\frac{3}{2}) = \log(3) - \log(2)$ , abbiamo:

$$P_2(x) = \log(3)(-4x^2 + 4x) + \log(2)(6x^2 - 5x) =, \text{ quindi:}$$

$$P_2(x) = -2(2\log(3) - 3\log(2))x^2 + (4\log(3) - 5\log(2))x, \text{ da cui infine:}$$

$$P_2(x) = -2\log(\frac{9}{8})x^2 + \log(\frac{81}{32})x \approx -0.235566x^2 + 0.928713x$$

Per approssimare  $\log(1.55)$ , calcolando l'errore commesso e per fornire una stima dell'errore, osserviamo che:

$$\log(1.55) = \log(1 + 0.55) \approx P_2(0.55) = [-0.235566x^2 + 0.928713x]_{x=0.55} = 0,439533$$

Poniamo  $c := 0.55$  e valutiamo l'errore commesso in  $c$ , che é dato da:

$$E_2(c) = |f(c) - P_2(c)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (c - x_0)(c - x_1)(c - x_2) \right|, \xi \in ]0; 1[, \text{ da cui}$$

$$E_2(c) = \frac{|f'''(\xi)|}{3!} \cdot |(0.55 - 0)(0.55 - 0.5)(0.55 - 1)|, \text{ quindi}$$

$$E_2(c) = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot |0.55 \cdot 0.05 \cdot (-0.45)|$$

Poiché  $f(x) = \log(1 + x)$ , allora  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ ,  $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ , vale

$$f'''(\xi) = \frac{2}{(1+\xi)^3} \leq \frac{2}{(1+x_0)^3} = 2, \text{ quindi}$$

$$E_2(c) \leq \frac{2}{6} \cdot |0.55 \cdot 0.05 \cdot (-0.45)| = 0.004125 = 4.125 \cdot 10^{-3}$$

Osserviamo che é possibile persino calcolare  $\xi \in ]0; 1[$ , essendo  $f'''(\xi) > 0$ ,  $\xi \in ]0; 1[$  e vale

$$f'''(\xi) = \frac{3! \cdot E_2(c)}{|(c-x_0)(c-x_1)(c-x_2)|}, \text{ dove}$$

$$E_2(c) = |f(c) - P_2(c)| = |\log(1.55) - P_2(0.55)| = |-0.001278| = 0.001278, \text{ quindi}$$

$$f'''(\xi) = \frac{3! \cdot |f(c) - P_2(c)|}{|(c-x_0)(c-x_1)(c-x_2)|} = \frac{6 \cdot 0.001278}{|(0.55-0)(0.55-0.5)(0.55-1)|} = \frac{6 \cdot 0.001278}{|0.55 \cdot 0.05 \cdot (-0.45)|} = 0,619636.$$

$$\text{Ovviamente } f'''(\xi) = \frac{2}{(1+\xi)^3} \implies \xi = \left(\frac{2}{f'''(\xi)}\right)^{1/3} - 1 = \left(\frac{2}{0.619636}\right)^{1/3} - 1 \approx 0.477853.$$

Riassumendo, é possibile utilizzare l'interpolazione di Lagrange quando sono note coppie di osservazioni di dati reali, relativamente a particolari fenomeni, oppure interpolare funzioni matematiche abbastanza complicate in un numero  $n + 1$  di punti ottenendo un polinomio di grado  $n$ , o nascondere la chiave segreta che permette di accedere ad informazioni riservate tra i coefficienti di un polinomio  $y = P_n(x)$  di grado  $n$ , suddividendo l'informazione in  $n + 1$  punti distinti, del tipo:  $(x_i; P(x_i))$ , per  $i = 0, 1, \dots, n$  tra  $n + 1$  persone che, soltanto se si uniscono e considerano tutte le coppie ordinate assegnategli, riescono a ricostruire il polinomio di partenza, avente la chiave segreta tra i suoi coefficienti.

É possibile altresí per una funzione  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , scelti  $n + 1$  punti distinti  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a; b]$ , approssimare  $y = f(x)$  con il polinomio interpolatore  $P_n(x)$  di grado  $n$ , tale che  $P_n(x_i) = f(x_i)$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n$ , valutare l'errore commesso in qualche punto  $c \in ]a; b[$ , ovvero  $E_n(c) = |f(c) - P_n(c)|$  o fornire una stima dell'errore, attraverso una sua maggiorazione, come abbiamo visto nell'ultima applicazione trattata.

## Bibliografia

- [1] R.Bevilacqua, D.Bini, M. Capovani, O.Menchi, (1992), Metodi numerici, Zanichelli.
- [2] V. Comincioli, (2005), Analisi numerica. Metodi, modelli, applicazioni, Apogeo.
- [3] Quarteroni, Alfio, Sacco, Riccardo, Saleri, Fausto, (2008), Matematica numerica. Metodi, modelli, applicazioni, Springer.
- [4] S. Attaway, (2016), MATLAB: a Practical Introduction to Programming and Problem Solving. Metodi, modelli, applicazioni, Elsevier.
- [5] V. Iorfida, "Artistic Aspects of Complex Functions in Algebraic Surfaces". Aplimat 2014 (Bratislava).



## **Finanza sostenibile: un nuovo mantra?<sup>1</sup>**

### **Sustainable finance: a new mantra?**

**Costanza Torricelli<sup>2</sup>**

#### **Abstract**

In questo scritto ci proponiamo di fare chiarezza sulla **finanza sostenibile** quale tema di grande rilievo in ambito economico-finanziario sotto vari profili: per la quotidianità di tutti i cittadini, per le possibilità di ricerca che offre in ambito accademico anche per gli aspetti di modellistica matematica, per gli sbocchi occupazionali che può fornire ai giovani con un background quantitativo. A tal fine affronteremo tre principali punti: la nascita e la definizione di questa che è diventata una nuova disciplina economica caratterizzata da trasversalità disciplinare, gli strumenti tramite i quali gli obiettivi della finanza sostenibile si realizzano nonché i relativi mercati e i principali attori, per chiudere con alcuni cenni su problemi di ricerca ancora aperti per i quali un ruolo fondamentale è giocato dalla modellizzazione matematica e dall'affidabilità delle stime e dei dati.

## **Finanza sostenibile: definizione, nascita ed evoluzione**

Per capire la finanza sostenibile dobbiamo inquadrarne la nascita nell'ambito della svolta epocale verso la sostenibilità, concetto quest'ultimo che negli ultimi tempi viene usato (o forse abusato?) in vari ambiti, dalla politica all'economia, invadendo poi la nostra quotidianità nelle informative (o pubblicità?) dei prodotti che vengono offerti, ad esempio, sugli scaffali dei supermercati o in banca e investendoci (o bombardandoci?) con un serie di acronimi sui quali cogliamo qui l'occasione di fare un po' di chiarezza (ESG, SDG, CSR solo per citarne alcuni).

---

<sup>1</sup>Il presente articolo ricalca la struttura della relazione dell'autrice "Finanza sostenibile: prospettive e sfide (modellistiche)", tenuta al Convegno Mathesis 2022.

<sup>2</sup>costanza.torricelli@unimore.it - Dipartimento di Economia Politica Marco Biagi, Centro Studi Banca e Finanza (Cefin), Università di Modena e Reggio Emilia, CeRP - Università di Torino.

I media e anche parte dell'accademia hanno posto attenzione al tema della sostenibilità solo negli ultimi anni, sollecitati da movimenti come quello di Greta Thunberg su temi ambientalisti e dalle necessità sanitarie, economiche e sociali emerse in concomitanza e/o come conseguenza della pandemia da Covid-19.

Tuttavia quella che abbiamo chiamato **svolta epocale verso la sostenibilità** ha radici più remote, come si evince dall'exkursus storico che proponiamo. Una pietra miliare di questo percorso della economia è databile **31 gennaio 1999** quando al **World Economic Forum** a Davos, l'allora **Segretario Generale delle Nazioni Unite, Kofi Annan**, pronunciò le seguenti parole: "Propongo che Voi, i business leader riuniti a Davos, e Noi, le Nazioni Unite, avviamo un Patto Globale di principi e valori condivisi, che darà un volto umano al mercato globale". L'obiettivo era quello di dare avvio a un'azione collettiva per **aumentare la responsabilità del settore privato** nel realizzare un'economia globale più stabile e inclusiva. In quell'occasione infatti vennero posti i cd. Obiettivi di sviluppo del millennio siglati nel 2000 e da raggiungersi entro il 2015 (**Millennium Development Goals, MDG**). Il richiamo di Kofi Annan si pone nella scia, allargandone tuttavia il respiro, del costrutto di "responsabilità sociale d'impresa" (**Corporate Social Responsibility, CSR**), che risale agli anni 50 del Novecento e indica l'attenzione volontaria delle imprese verso aspetti ambientali e sociali all'interno delle loro operazioni commerciali e dei loro rapporti con gli stakeholder, ovvero portatori di interesse, quali per esempio dipendenti, fornitori, clienti e comunità locali.

Una seconda pietra miliare fu posta nel **2005** con la pubblicazione, all'interno del **Global Compact delle Nazioni Unite**, del report dal titolo "Who cares wins: connecting the financial markets to a changing world". Tale documento era mirato a fornire raccomandazioni per meglio integrare considerazioni ambientali, sociali e di governance (**Environmental, Social, Governance, ovvero ESG**) nelle attività di analisi e gestione dell'industria finanziaria. Assistiamo quindi alla nascita dell'acronimo ESG, uno dei più pervasivi e caratterizzanti i nuovi trend economico-finanziari. Nonostante tale acronimo sia stato coniato in ambito prettamente finanziario, ha avuto una successiva ampia diffusione in altri ambiti industriali.

Ma la vera svolta che ha portato ai trend attuali si ha nel **2015**, quando alla scadenza dei sopramenzionati MDG, viene pubblicata l'**Agenda ONU 2030** che elenca ed illustra dettagliatamente gli obiettivi per lo sviluppo sostenibile, ovvero i famosi **17 Sustainable Development Goals (SDG)**. Tali obiettivi, il cui raggiungimento è fissato appunto per il 2030, possono esser rappresentati in modo sintetico tramite le 5 P, come illustrato in Figura 1.

Il raggiungimento congiunto di tali obiettivi, chiarisce la necessità di perseguire uno sviluppo sostenibile, così come definito già nel **1987** nel **Rapporto Brundtland** della Commissione mondiale sull'ambiente e lo sviluppo: lo sviluppo sostenibile è quello sviluppo che soddisfa i bisogni del presente senza compromettere la capacità delle future generazioni di soddisfare i propri bisogni. In sintesi, la sostenibilità è un **concetto di lungo periodo**, perché considera gli interessi di più generazioni, ma anche un **con-**

**etto trasversale** a più discipline, perché si raggiunge coniugando plurimi obiettivi. Infatti, lo sviluppo sostenibile necessita l'armonizzazione di tre elementi fondamentali:

- **crescita economica**
- **inclusione sociale**
- **tutela dell'ambiente**



Figura 1 - I 17 obiettivi dello sviluppo sostenibile riassunti nelle 5 P

Matematicamente parlando, il perseguimento di uno sviluppo sostenibile richiede l'ottimizzazione di una funzione multiobiettivo, nella quale gli obiettivi e le variabili che li descrivono – nonché la dinamica delle medesime - sono intrinsecamente connesse. Si pensi ad esempio alle dinamiche di cambiamento climatico evidenti in tutto il globo, che determinano sicuramente effetti ambientali (ad esempio inondazioni o siccità), ma al contempo hanno conseguenze sociali (si pensi ad esempio ai migranti climatici o ai poveri da carestie) nonché effetti economici (ad esempio gli effetti di ribasso sui prezzi degli immobili in zone a rischio esondazioni). Ma per converso, politiche mirate alle sole tematiche ambientali (es. alla diminuzione di emissioni di CO<sub>2</sub>) hanno anche ovvi effetti economici (es. perdita della economicità di certe attività produttive e conseguente chiusura/ridimensionamento di alcune aziende) e sociali (es. licenziamenti di lavoratori di quelle industrie più impattate da politiche ambientali). In sintesi **la sostenibilità è un concetto tridimensionale** e parlare di sostenibilità quando si focalizza l'attenzione su un solo aspetto, ad esempio quello ambientale, non è corretto. Pertanto, per non ingenerare confusione, è opportuno aggettivare la sostenibilità qualora se ne consideri soltanto una dimensione (es. sostenibilità ambientale se si occupa solo della dimensione ambientale).

Su questo sfondo, possiamo definire la cd. **finanza sostenibile**, locuzione che, come spesso avviene soprattutto nelle discipline economiche, entra nella nostra lingua quale letterale traduzione della **sustainable finance** (forse **finanza per lo sviluppo sostenibile** avrebbe meglio chiarito i contenuti di questa nuova disciplina economica).

Ricordiamo che la finanza è quella disciplina economica che si occupa della gestione del denaro, ivi incluse scelte come quelle di investimento e finanziamento di vari agenti economici pubblici (es. stato, enti pubblici) e privati (es. famiglie e imprese, finanziarie e non finanziarie). La finanza sostenibile è quella finanza (pubblica e privata) al servizio dello sviluppo sostenibile e ciò che la caratterizza in modo inequivocabile è una gestione del denaro mirata all'ottenimento **sia di un ritorno economico sia di un ritorno sociale e ambientale**. In altre parole, tutte e tre le dimensioni della sostenibilità devono esser presenti e la finanza sostenibile si colloca in posizione intermedia fra la finanza filantropica e la finanza “for profit”, ovvero quella mirata ad un mero ritorno economico, condividendo parzialmente obiettivi di entrambe (vd. Figura 2).

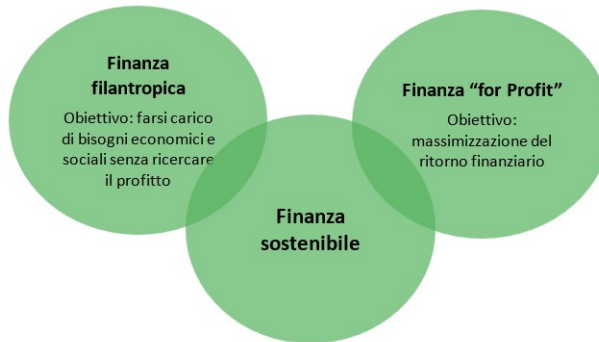


Figura 2 - La collazione della finanza sostenibile

Nel **2021** la **Commissione Europea**, sul proprio sito dedicato alla Sustainable finance, ha declinato la **definizione in considerazione di obiettivi ESG** esemplificando anche le tipologie di questi ultimi: *“Sustainable finance refers to the process of taking environmental, social and governance (ESG) considerations into account when making investment decisions in the financial sector, leading to more long-term investments in sustainable economic activities and projects. Environmental considerations might include climate change mitigation and adaptation, as well as the environment more broadly, for instance the preservation of biodiversity, pollution prevention and the circular economy. Social considerations could refer to issues of inequality, inclusiveness, labour relations, investment in human capital and communities, as well as human rights issues. The governance of public and private institutions – including management structures, employee relations and executive remuneration – plays a fundamental role in ensuring the inclusion of social and environmental considerations in the decision-making process.”*<sup>3</sup>

Due sono gli elementi di questa definizione che vale la pena sottolineare. In primo luogo, la finanza sostenibile nel considerare le dimensioni ESG deve per forza assumere un orizzonte di più lungo periodo. In secondo luogo, la dimensione di governance (G) – spesso la più negletta – è un fattore abilitante fondamentale per l’inclusione nel

<sup>3</sup>[https://finance.ec.europa.eu/sustainable-finance/overview-sustainable-finance\\_it](https://finance.ec.europa.eu/sustainable-finance/overview-sustainable-finance_it)

processo decisionale delle dimensioni ambientali (E) e sociali (S). Quest'ultima considerazione sulla rilevanza delle tematiche di governance non va dimenticata, anche se il dibattito mediatico così come la letteratura accademica hanno fin qui prestato attenzione principalmente alla finanza per l'ambiente (la cd. **Green Finance**) e secondariamente alla finanza per il sociale (la cd. **Social Finance**).<sup>4</sup>

## Strumenti, mercati e attori della finanza sostenibile

Ma quali sono i principali **strumenti della finanza sostenibile**? In analogia alla finanza "convenzionale" gli strumenti possono essere classificati in 3 principali tipologie: contratti, titoli di capitale e titoli di debito. Fra i contratti, una delle categorie più rappresentate sono i contratti di mutuo, ovvero quei contratti in cui una parte (mutuante) consegna all'altra (mutuataria) in prestito una somma di denaro che l'altra parte si obbliga a restituire a scadenze prefissate col pagamento di interessi. La declinazione "sostenibile" dei mutui si è avuta principalmente in ambito di Green Finance dove sul mercato numerosi sono gli esempi dei cd. **Mutui green** ovvero mutui in cui, ad esempio, vi è una riduzione degli interessi a fronte del raggiungimento tramite il mutuo degli obiettivi di un progetto green (ad es. incremento certificato della classe energetica dell'immobile ristrutturato con la somma presa a prestito).

Fra i titoli di capitale, quelli con diffusione su mercati regolamentati sono le **azioni**, la cui connotazione di sostenibilità viene impressa tramite l'assegnazione dei cd. **Rating ESG**, ovvero dei giudizi sintetici circa l'impegno della società nelle tre dimensioni della sostenibilità. Le agenzie che assegnano questi rating possono essere le stesse con una storica esperienza nei rating creditizi (es. Moody's) oppure agenzie specializzate principalmente nell'elaborazione di questi giudizi di sostenibilità (es. Sustainalytics). Quello dei rating ESG è un tema su cui è ancora aperto un certo dibattito soprattutto relativamente alla **divergenza dei rating** forniti da provider diversi. Tale risultato, seppur comprensibile a fronte della diversità delle metriche utilizzate e dei dati necessari (peraltro non sempre pubblicamente disponibili), pone problemi circa l'uso e l'affidabilità di questi rating<sup>5</sup>. Il tema dei rating peraltro è trasversale anche alla terza tipologia di strumento, ovvero quelli di debito. In ambito di sostenibilità, questa categoria è rappresentata dalle obbligazioni tematiche, ovvero quelle obbligazioni finalizzate a finanziare progetti mirati alla sostenibilità. Le categorie più diffuse sono rappresentate dai **Green Bond** e dai **Social Bond**<sup>6</sup>.

---

<sup>4</sup>Per un focus su Green Finance e Social Finance si vedano le voci Green finance e Social Finance del Glossario delle disuguaglianze sociali, Fondazione Ermanno Gorrieri, <http://www.disuguaglianzesociali.it/glossario/?idg=88>, <http://www.disuguaglianzesociali.it/glossario/?idg=87>

<sup>5</sup>Per farsi un'idea circa queste problematiche si veda Escrig-Olmedo E., Fernández-Izquierdo M., Ferrero-Ferrero I., Rivera-Lirio J., Munoz-Torres M., (2019), Rating the Raters: Evaluating how ESG Rating Agencies Integrate Sustainability Principles, Sustainability, 11(3): 1-16.

<sup>6</sup>I Social bond non vanno confusi coi Social Impact Bonds (SIB), che sono strumenti di partenariato pubblico-privato in cui sono coinvolti molti soggetti (amministrazioni locali, investitori, beneficiari delle prestazioni, agenzie indipendenti di valutazione degli impatti sociali) e quindi afferiscono ad una quarta tipologia non considerata in questo lavoro. I SIB non garantiscono un rendimento economico in caso di fallimento del progetto cui sono collegati tanto da essere noti anche come "Pay for success bond".

Secondo la definizione dell'International Capital Market Association (ICMA), i Green/Social Bond sono qualsiasi tipo di strumento obbligazionario i cui proventi verranno utilizzati esclusivamente per finanziare o rifinanziare progetti con chiari benefici ambientali/sociali e che sono allineati con i Green/Social Bonds Principles. Green e Social bond possono esser considerati di prima generazione perché considerano le dimensioni della sostenibilità singolarmente, obbligazioni di seconda generazione hanno, invece, un carattere più trasversale e sono i **Sustainability Bond** e i **Sustainability-Linked Bond**. Nonostante l'assonanza di nome, questi ultime due tipologie differiscono notevolmente perché i Sustainability bond considerano congiuntamente la dimensione ambientale e sociale, mentre i Sustainability-linked bond presentano caratteristiche finanziarie e/o strutturali che dipendono dal raggiungimento da parte dell'emittente di obiettivi di sostenibilità/ESG predefiniti, misurati tramite la definizione di Key Performance indicators (KPI) e valutati rispetto a predefiniti Sustainability Performance Target (SPT).

Questa sintetica panoramica sui principali strumenti della finanza sostenibile consente di evidenziare quali siano le tipologie di attori sul mercato osservando una tipica catena di intermediazione. Come ben rappresentato in Figura 3, da un lato ci sono gli emittenti, ovvero le aziende con rating ESG, mentre all'estremo opposto ci sono gli investitori finali, ovvero coloro che comprano gli strumenti finanziari ESG accettandone il trade-off rischio-rendimento (ad es. le famiglie risparmiatrici). Nel mezzo ci sono i fornitori di rating ESG, eventualmente gli indici composti dalle quotazioni di varie aziende con tali rating, i gestori di fondi specializzati e gli investitori istituzionali. Il funzionamento di questo sistema richiede ci sia anche una regolamentazione, dei supervisor e anche degli organismi internazionali che forniscano degli standard di sostenibilità quali ad es. le Nazioni Unite o l'Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico (OCSE).

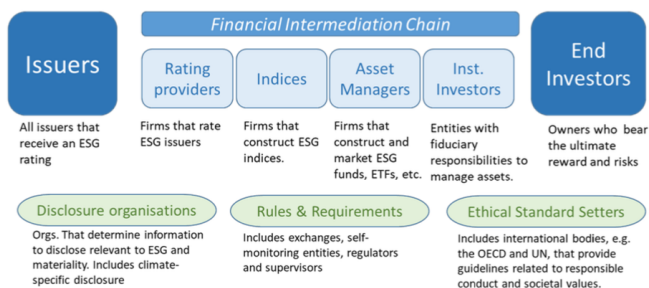


Figura 3 – Attori del mercato ESG: una rappresentazione sintetica

Fonte: Global Sustainable Investment Alliance (GSIA). La GSIA è un'associazione di organizzazioni tese allo sviluppo degli investimenti in sostenibilità, che comprende associazioni in US, UK, EU, Canada, Olanda, Australasia con analoghi obiettivi.

## Strategie di investimento e performance degli investimenti sostenibili

A fronte di una pluralità di strumenti di finanza sostenibile, peraltro in crescita dimensionale come evidenzia la Tabella 1, bisogna chiarire come le strategie di investimento si differenziano da quelle tradizionali.

REGIONS	2016	2018	2020
Total AUM of regions	81,948	91,828	98,416
Total sustainable investments only AUM	22,872	30,683	35,301
% Sustainable investments	27.9%	33.4%	35.9%
<b>Increase of % sustainable investments</b> (compared to prior period)		<b>5.5%</b>	<b>2.5%</b>

Tabella 1 – Il quadro degli Asset Under Management (AUM) 2016-2020

*Fonte: Global Sustainable Investment Alliance (GSIA). La GSIA è un'associazione di organizzazioni tese allo sviluppo degli investimenti in sostenibilità, che comprende associazioni in US, UK, EU, Canada, Olanda, Australasia con analoghi obiettivi.*

Gli approcci della finanza sostenibile seguono i principi noti come **Principles for Responsible Investment (PRI)**, elaborati in collaborazione con le Nazioni Unite come completamento dei Global Compact del 2005. Questi principi vanno in scia al **Socially Responsible Investing (SRI)**, già noto e praticato negli anni 2000, ovvero prima della grande svolta verso la sostenibilità, che si può declinare in varie forme strategiche. Tra le strategie SRI, quelle di prima generazione sono le strategie di **screening negativo**, che mirano ad eliminare dal portafoglio aziende che operano in settori con impatti negativi sulla società (ad esempio le cd. Sin stock, ovvero azioni relative al settore delle armi, gioco d'azzardo, ecc.), mentre quelle di seconda generazione sono le strategie di **screening positivo**, che consistono essenzialmente nel selezionare strumenti rispondenti elevati standard di responsabilità sociale. Uno sviluppo più recente del SRI, peraltro esplicitamente richiamato dai PRI, consiste nella **integrazione delle dimensioni ESG** nelle decisioni di investimento che può essere fatto in modi diversi che si basano sulla disponibilità di rating ESG per gli strumenti oggetto di investimento. I più semplici e comuni sono lo screening negativo, ovvero eliminazione degli strumenti che non superano una soglia minima di punteggio ESG, e lo screening positivo, ovvero il mantenimento dei soli strumenti che superano una prefissata soglia ESG.

Un tema collegato è quello della **performance dei singoli strumenti della finanza sostenibile e delle strategie** sopra menzionate. Per quanto riguarda gli strumenti, la domanda di ricerca è se **dovrebbero rendere di più o di meno dei loro omologhi convenzionali**, ovvero di strumenti che si differenziano dagli strumenti sostenibili so-

lo per la caratteristica di sostenibilità. Come esempio si pensi al confronto tra un green bond ed una obbligazione dello stesso emittente, con la medesima durata e il medesimo tipo di cedola e tasso cedolare, ovvero una obbligazione cd. Convenzionale (o brown). La risposta a priori non è univoca né su basi teoriche né su basi empiriche. Su basi teoriche infatti le previsioni possono essere opposte e dipendono da come si ritiene sia caratterizzabile la domanda di titoli sostenibili, ovvero se gli investitori sono disposti a rinunciare a parte del rendimento pur di investire in strumenti sostenibili o viceversa vogliono esser compensati per una maggior rischiosità di questi investimenti. Su basi empiriche la maggior parte degli studi si è concentrata sull'esistenza e sul segno di un premio per la caratteristica di sostenibilità, con particolare riferimento allo strumento di maggior successo ovvero i green bond. Il focus è stato lo studio del cd. **green premium**, definito come differenziale tra il rendimento di un green bond e quello di un bond convenzionale con le stesse caratteristiche. I risultati dei vari studi non sono concordi, ma in estrema sintesi si può dire che l'esistenza di un premio green, quando dimostrabile, è di entità modesta e soprattutto si sta assottigliando nel tempo, come se la caratteristica green (o più in generale di sostenibilità) stesse diventando una sorta di "new normal".

Per quanto riguarda la **performance delle strategie basate su ESG**, la domanda di ricerca è quali siano le più profittevoli, ad esempio fra quelle menzionate sopra, e in quali condizioni di mercato. Anche qui sotto il profilo teorico la risposta non è univoca: da un lato una maggiore redditività potrebbe esser motivata dall'inclusione nei portafogli SRI di società con un alto livello di Corporate Social Responsibility, con varie implicazioni positive quali ad esempio dipendenti soddisfatti e una minor probabilità di essere coinvolte in multe ambientali e cause legali coi relativi costi economici e reputazionali; dall'altro le strategie SRI, riducendo la tipologia di azioni in portafoglio, potrebbero limitare i benefici della diversificazione previsti dalla teoria del portafoglio di Markowitz<sup>7</sup>. Dal punto di vista empirico, la letteratura esistente non ha raggiunto conclusioni unanimi sulla relazione tra lo score ESG di portafoglio (eventualmente ottenuto tramite tecniche di ottimizzazione) e la sua performance finanziaria. In particolare, molto dipende dallo screening applicato e dal livello (soglia ESG) e tipologia (negativo vs. positivo) di screening implementato.

## Sfide modellistiche aperte

Sullo sfondo del tema della profittabilità rimane la necessità di chiarire **quale sia il modello/paradigma decisionale sottostante**. Nell'accezione classica e fin qui dominante, le decisioni finanziarie si basano sull'obiettivo di ottenere un ritorno economico, e sono rappresentabili in termini di massimizzazione dell'utilità attesa (à la Von Neumann-Morgenstern) che è funzione della ricchezza, la cui rappresentazione viene

---

<sup>7</sup>Harry Markowitz è un economista statunitense noto per i suoi studi sulla selezione ottima di portafoglio: si veda ad l'articolo Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1),77-91. Nel 1990 vinse proprio per questi studi il premio Nobel per l'economia attribuitogli congiuntamente ad altri due economisti statunitensi: M.H. Miller e W.F. Sharpe.



ridotta alle due dimensioni di media e varianza quindi in  $\mathbb{R}^2$ .<sup>8</sup> Nell'ambito di questo approccio, l'inserimento di titoli sostenibili nei portafogli è determinato da vincoli esterni e/o regolamentari (ad es. per decisori operanti in industrie molto regolamentate come quella bancaria). Va però detto che il trend è visibile, indipendentemente da vincoli regolamentari, a dimostrazione della crescente consapevolezza in questi ultimi anni dell'importanza di finanziare la sostenibilità: si pensi alle scelte di importanti fondi e a quelle di investitori individuali che si stanno muovendo in tal senso.

Questo secondo caso, ovvero la composizione di un portafoglio finanziario con l'inclusione volontaria di strumenti sostenibili, obbliga ad una riconsiderazione del paradigma nel quale la funzione di utilità attesa è esclusivamente funzione della ricchezza e a chiedersi se piuttosto il problema di ottimizzazione vada risolto anche in considerazione di altre variabili, come potrebbe essere il grado di sostenibilità del prodotto. **Ma la sostenibilità è una caratteristica o piuttosto fattore di rischio?** Si pensi ad esempio a un green bond, la sua connotazione green è semplicemente una caratteristica di tipo deterministico o piuttosto una variabile stocastica? In entrambi i casi il grado di "greenness" potrebbe differire fra green bond. Sicuramente le variabili non finanziarie pongono problematiche di metrica e di disponibilità dei dati che non caratterizzano quelle finanziarie per i quali la letteratura propone diverse misure di rendimento e rischio e i mercati forniscono abbondanza di dati anche ad alta frequenza.

Ma anche rimanendo nell'ambito del paradigma decisionale tradizionale, rimane il problema del **pricing degli strumenti in funzione della connotazione di sostenibilità (es. green)**. Modelli di pricing sono fondamentali sia per valutare la performance degli strumenti di finanza sostenibile rispetto alle loro controparti tradizionali, ma anche per valutare se la parametrizzazione in termini di rischio-rendimento è sufficiente. Poco è stato fin qui fatto su questo tema. Per quanto riguarda le azioni, il modello di pricing dominante nella finanza convenzionale è il **Capital Asset Pricing Model (CAPM)**, che su una base di ipotesi semplificatrici ha una principale implicazione: in equilibrio il rendimento atteso di un titolo rischioso quale un'azione è dato dal tasso privo di rischio più un premio per il rischio che si ottiene come prodotto del prezzo di mercato del rischio azionario e della quantità di **rischio di mercato** insita nella singola azione così come misurata dal suo beta<sup>9</sup>. Ora nel caso di azioni, dove al solito maggiore attenzione viene posta sulla connotazione green, si tratta di capire se e come tale connotazione influisce sul loro pricing. L'unico lavoro in cui – a nostra conoscenza – ci si pone esplicitamente questo problema è quello di Alessi et al. (2021) dove il ren-

---

<sup>8</sup>La teoria dell'utilità attesa è stata formulata come teoria assiomatica dal matematico John von Neumann e dall'economista Oskar Morgenstern nel celebre trattato *Theory of games and economic behaviour*, Princeton: Princeton University Press, 1947. La rappresentazione comune in finanza è quella sul piano media-varianza richiede ipotesi semplificatrici (rendimenti normalmente distribuiti e/o funzione di utilità quadratica).

<sup>9</sup>Il CAPM è stato proposto originalmente per prezzare azioni dall'economista statunitense premio Nobel per l'economia nel 1990 William Sharpe, e poi sviluppato da John Lintner e Jan Mossin, a metà degli anni 60. Successivamente è stato esteso a più fattori nel modello noto come Arbitrage Pricing Theory (APT) dall'economista statunitense Stephen Ross negli anni settanta del secolo scorso. Questi modelli possono in generale esser utilizzati per prezzare altri titoli rischiosi quali le obbligazioni.

dimento atteso delle azioni è determinato sulla base di un modello a due fattori: il fattore di rischio di mercato e il fattore green, dove il primo è definito come nel modello CAPM, e il secondo come differenza tra il rendimento di un portafoglio verde e quello di un portafoglio brown.<sup>10</sup>

Per quanto riguarda i bond, di nuovo la letteratura si esprime principalmente sui **green bond**: ad esempio Baker et al. (2018, 2022) propone una modello di pricing per le obbligazioni green e convenzionali, in cui la **connotazione green** dei bond viene inserita come **deterministica**, identificata in un punteggio o score ambientale, all'interno di un approccio media-varianza di massimizzazione dell'utilità attesa<sup>11</sup>. Il risultato è un modello CAPM traslato di un termine deterministico in funzione dello score ambientale, e quindi il modello è un modello a un fattore in cui viene prezzato solo il rischio di mercato. In un nostro recente lavoro, Bertelli et al. (2021), proponiamo un modello fattoriale per valutare se la connotazione green è **stocastica** e se è prezzata dal mercato potendo in tale modo stimare il green premium associato alla greenness del bond<sup>12</sup>.

Per chiudere va sottolineato come anche la **modellistica di ottimizzazione di portafoglio** à la Markowitz vada **rivisitata in ottica di sostenibilità**, ed anche in questo caso i lavori accademici che hanno incorporando i fattori ESG oltre a quelli di rischio e rendimento del mercato sono ancora pochi<sup>13</sup>.

---

<sup>10</sup>Per la rappresentazione formale del modello si veda Alessi, L., Ossola, E., & Panzica, R. (2021). What greenium matters in the stock market? The role of greenhouse gas emissions and environmental disclosures. *Journal of Financial Stability*, 54, 100869.

<sup>11</sup>Per la rappresentazione formale del modello si veda Baker, M., Bergstresser, D., Serafeim, G., & Wurgler, J. (2018). *Financing the response to climate change: The pricing and ownership of US green bonds*. NBER Working Papers 25194, National Bureau of Economic Research, poi pubblicato su rivista come Baker, M., Bergstresser, D., Serafeim, G., & Wurgler, J. (2022). The pricing and ownership of US green bonds. *Annual Review of Financial Economics*, 14, 415-437.

<sup>12</sup>Per la rappresentazione formale del modello si veda Bertelli B., Boero G., Torricelli C., 2021, The market price of greenness: a factor pricing approach for Green Bonds, Working Paper CEFIN (Centro Studi di Banca e Finanza, Università di Modena e Reggio Emilia) N. 83, June, ISSN 2282-8168.

<sup>13</sup>Ad esempio Pedersen, L. H., Fitzgibbons, S., & Pomorski, L. (2021). Responsible investing: The ESG-efficient frontier. *Journal of Financial Economics*, 142(2), 572-597; Varmaz, A., Fieberg, C., & Poddig, T. (2022). Portfolio optimization for sustainable investments. Available at SSRN 3859616.

## **Retorica, l'arte dell'argomentare**

**Passare da una premessa o ipotesi ad una conclusione o tesi**

## **Rhetoric, the art of arguing**

**Moving from a premise or hypothesis to a conclusion or thesis**

**Francesco de Giovanni<sup>1</sup> e Carmela Musella<sup>2</sup>**

Captatio benevolentiae: non siamo certamente esperti di retorica. Lo spunto per questo scritto è stato un film leggero, adatto ad una sera d'estate: una commedia francese, titolo originale *Le Brio*. Ad alcuni bambini piace molto ascoltare le conversazioni degli adulti, prendere parte alle loro piccole dispute e, se consentito, intervenire per sostenere l'uno o l'altro. Il film *Le Brio* stimola il ricordo di queste esperienze dell'infanzia e suggerisce anche il fatto che uno degli aspetti che possono risultare più attraenti della Matematica è il dover argomentare, per passare da un'ipotesi ad una tesi. Matematica e Dialettica: il substrato comune è la Filosofia.

La tesi del film è che l'arte oratoria è la chiave che apre le porte del successo, lo strumento per affermarsi nella società.

La giovane Neïla Salah cresce nella periferia parigina e sogna di diventare un giovane avvocato. Iscritta alla prestigiosa Università Panthéon-Assas, si scontra fin da subito con il professore Pierre Mazard, reazionario e classista, che finisce nel mirino degli studenti per le sue posizioni e per i suoi eccessi verbali. Per evitare un provvedimento disciplinare, il professore accetta la proposta dei vertici dell'Ateneo di preparare Neïla per un concorso di eloquenza molto ambito ed elitario.

Secondo il professor Mazard la retorica, l'eloquenza, è esattamente ciò che egli insegna. Ad avere ragione, senza preoccuparsi della verità: “la vérité, on s'en fout”.

La Matematica invece persegue la verità? Secondo una ben nota definizione di Bertrand Russell, essa è “la sola scienza esatta in cui non si sa mai di cosa si sta parlando né se quello che si dice è vero”.

Mazard fonda i suoi insegnamenti sul libro *L'arte di avere sempre ragione*, in cui Arthur Schopenhauer si presenta come un “maestro di scherma che non considera chi abbia effettivamente ragione nella contesa che ha dato origine al duello”, ma si preoccupa unicamente di insegnare a “colpire e parare”, giacché “questo è quello che conta”.

---

<sup>1</sup>degiovan@unina.it - Università degli Studi di Napoli Federico II

<sup>2</sup>cmusella@unina.it - Università degli Studi di Napoli Federico II

Ecco alcuni degli stratagemmi da padroneggiare.

- *L'omonimia*: prendete una parola a caso nella frase dell'avversario e attaccatelo con un giudizio che non ha nulla a che fare con la questione. Esempio: “- Io adoro le patate -” “- Ah, l'adorazione! Ecco un soggetto fallace! -”
- *I falsi argomenti*: utilizzate le convinzioni del vostro avversario contro di lui. È sempre più semplice che convincerlo con i vostri argomenti che egli rifiuterà in ogni modo. Esempio: “- È un bambino, bisogna essere indulgenti con lui -” “- È proprio perché è un bambino, che bisogna impedirgli di prendere delle cattive abitudini -”
- *Trarre delle false conclusioni*: condurre l'avversario ad una conclusione assurda che non era la sua idea di partenza, con una catena di deduzioni non legittime, allo scopo di squalificare la sua tesi. Esempio: “Lei non ha l'auto, quindi cammina a lungo, cioè le piace camminare, ciò significa che le piacciono le vie poco affollate. Se le piacciono le vie poco affollate allora amerà stare in giro di notte. Quindi le piace il buio, l'oscurità. E cosa c'è di più buio di un vicolo abbandonato dove vanno a nascondersi i drogati? Le piacciono i drogati, quindi. È una spacciatrice?”

Difficile dare una definizione univoca della retorica. Secondo Marc Fumaroli, la retorica sfugge a una vera definizione perché è altrettanto “fluida, mutevole e feconda quanto lo è il suo oggetto: la persuasione” (cfr. [1], p.12).

Alle evidenze delle dimostrazioni scientifiche non occorre l'arte della persuasione. D'altra parte, Alain Badiou fa riferimento alla capacità di convincimento che possono utilizzare i matematici quando afferma: “con un po' di attenzione, una dimostrazione esposta chiaramente, e nella quale il linguaggio sia stato precisato in modo corretto, può convincere chiunque, ovunque si trovi, alla sola condizione che questi appartenga all'umanità” .

La retorica è, da un lato, pratica e tecnica comunicativa, dall'altro scienza del discorso, studio delle regole che ne assicurano il buon funzionamento, la cosiddetta retorica esterna.

La retorica esterna avrebbe avuto inizio con la codificazione avvenuta a partire dai primi decenni del V secolo a.C. nella Magna Grecia e in Sicilia. Qui si svilupparono due aspetti principali. Il primo fu l'arte di difendersi e di attaccare nelle controversie giudiziarie e nei dibattiti politici, di cui furono iniziatori Corace ed il suo allievo Tisia. A Siracusa, abbattuta la tirannide, si aprì una serie di processi per rivendicare la proprietà dei terreni che erano stati confiscati dai tiranni Gelone e Gerone I. Corace e Tisia fornirono allora ai litiganti un metodo per far valere le proprie ragioni.

L'altro aspetto della retorica, identificata con l'uso della parola come magia trascinatrice degli animi, incantamento e fascinazione, si fa risalire a Pitagora ed ebbe grande sviluppo presso i sofisti (Protagora, Gorgia).

La parola, se usata in modo opportuno, può sprigionare una forza grandissima. Può essere medicina dell'anima per effetto della *politropia*: la capacità di trovare tipi diversi di discorsi per i diversi tipi di ascoltatori, come si guariscono i pazienti con rimedi adatti alle condizioni e alle predisposizioni di ciascuno. Altrettanto importante è la capacità di adattarsi alle diverse circostanze e al tempo, di sfruttare l'occasione buona (il *kairos*, il momento opportuno).

L'esercizio dei discorsi contrapposti, che si basa sul principio che su ogni argomento è possibile sostenere almeno due opinioni opposte, dimostra secondo alcuni che i sofisti fossero degli opportunisti privi di morale; è per altri un modo di pensare che svela la complessità del reale.

In Francia il film *Le Brio* ha suscitato delle polemiche attorno alla figura, che emerge come sostanzialmente negativa, del professor Mazard (presumibilmente inteso come esempio superlativo di un modo diffuso di interpretare la professione di avvocato). François Martineau, avvocato e autore di testi sulla retorica, contesta fondamentalmente la tesi, esposta da Mazard, che lo scopo della professione sia di ottenere ragione, a prescindere dalla verità di quanto si sostiene. Egli cita autori di epoca classica, a cominciare da Isocrate, che lavoravano per porre un argine all'enorme potere che in quel periodo andava mostrando la retorica come tecnica slegata dalla morale. La morale, in questo caso da intendersi come la rettitudine dell'oratore, che si impegna a esporre le proprie tesi attenendosi in buona fede alla propria cognizione della realtà, è parte integrante e fondativa dello studio dell'arte retorica come disciplina e non solo come armamentario tecnico (armamentario in sé di enorme potenza, addirittura terribile se nella mani di quelli che Martineau definisce "pazzi furiosi").

Platone condanna la retorica praticata dai sofisti e promuove la dialettica come arte del discutere modellata sui contenuti specifici. Nell'insuperata (a detta di Bice Mortara Garavelli, cfr. [1], p.19) sistemazione che ne fece Aristotele, la retorica comprende una teoria dell'argomentazione, una teoria dell'elocuzione e una teoria della composizione del discorso. La sua funzione non è persuadere, ma "vedere i mezzi di persuasione che ci sono intorno ad ogni argomento".

Aristotele sistema concetti che saranno alla base degli sviluppi successivi della disciplina: l'*ethos* (l'insieme delle qualità intellettuali e morali dell'oratore), il *logos* (il ragionamento, lo sfruttamento razionale delle prove) e il *pathos* (la capacità di agire sui sentimenti degli ascoltatori).

Fra le regole per esprimersi bene (e ben ragionare), oltre ai tre principi aristotelici, gli esperti consigliano:

- (a) mai spiegare tutto in modo puntiglioso e prolisso, ma lasciare sempre all'uditore qualcosa da comprendere e da dedurre autonomamente;
- (b) usare la tecnica del *Corax*: l'apparenza inganna, quella che sembrerebbe la causa più naturale ... non può esserlo ... è troppo prevedibile;
- (c) ricordarsi dell'efficacia del principio del tre (è il "numero perfetto" di cose importanti da dire e ricordare).

Nel 2021, in un'esperienza di volontariato presso una scuola estiva organizzata dalla Comunità di S. Egidio per bambini che avevano risentito particolarmente della mancanza della scuola "in presenza", anche le attività di Matematica sono state organizzate tenendo conto dell'esigenza, soprattutto per i più piccoli, di giocare in movimento. Le addizioni e le sottrazioni venivano eseguite saltando sulla linea dei numeri e su un gioco dell'oca a grandezza naturale, con l'ausilio di cartelli numerati sistemati sul pavimento.

Sono stati usati cartelli con su stampata una cifra anche per altri esercizi; allineati 3 o 4 bambini, veniva consegnato a ciascuno di loro un cartello, invitandoli poi a scambiarsi di posto, in modo da realizzare tutte le permutazioni possibili e chiedendo di leggere i numeri risultanti. Quindi di disporli in ordine crescente o decrescente. Si cercava da un lato di richiamare l'analogia con l'uso delle lettere per comporre le parole, con l'ordine con cui le parole sono elencate in un vocabolario, dall'altro di favorire le traduzioni dall'Italiano nel linguaggio matematico e viceversa.

È stato realizzato un abaco con polistirolo e bastoncini di legno; i bambini avevano preparato delle sferette con la plastilina e venivano chiamati uno per volta a rappresentare un numero, che gli era stato comunicato quando erano ancora al banco, in modo che potessero calcolare quante "palline" portarsi dietro.

Inoltre, grazie alla disponibilità di alcuni nostri colleghi di Ateneo, sono stati organizzati dei laboratori di Scienze: estrazione del DNA di una banana e di un kiwi e costruzione della doppia elica del DNA con la plastilina. I bambini sono stati poi coinvolti in un progetto internazionale (<https://tinyearth.wisc.edu/>) che mira a contrastare l'attuale tendenza della diffusione della resistenza antimicrobica; si è lavorato su campioni di terreno, "dato il cibo" ai microbi e monitorato la loro crescita.

Ogni passaggio dei laboratori di Scienze ha fornito l'occasione per contare, sommare, moltiplicare, scoprire la successione esponenziale (di base 2).

Soprattutto, i bambini hanno scoperto che si può **parlare** di Matematica. Hanno letto dal libro di Umberto Galimberti *Perché? 100 storie di filosofi per ragazzi curiosi*, la storia di Pitagora, secondo cui ogni cosa intorno a noi "è fatta di numeri e relazioni tra numeri"; scoperto che il numero sei può essere sia un numero triangolo che un numero rettangolo e disegnato il dieci come numero triangolo, ottenendo la *tetraktis*.

Hanno letto la storia di Ipazia, che aveva scoperto che al centro dell'Universo c'è il Sole e che la Terra, girandogli intorno, descrive un'ellisse, "un cerchio un po' speciale". Quindi hanno disegnato il ritratto di Ipazia ispirandosi all'illustrazione che accompagna il testo sul libro. Poi hanno costruito un modellino di sistema solare, e per questo si è parlato di "numeri grandissimi" e di riduzioni in scala.



Le attività di Matematica non apparivano slegate dalle altre. Il fulcro era la Filosofia. Per i bambini, è stata un'occasione di una relazione inedita con la Matematica. Per i volontari, un'occasione di sperimentare la retorica come capacità di mettersi in relazione con gli altri in modo appropriato.

“Vi è anche una retorica fine: vive di compiacenza per le parole non ancora dette”  
(Fausto Melotti, *Linee*).

## **Bibliografia**

- [1] B. Mortara Garavelli: "Prima Lezione di Retorica", *Laterza*, Bari (2011).





## **Attività con GeoGebra volta a illustrare i teoremi di: Desargues, Pappo-Pascal e Pascal**

### **Activities with GeoGebra aimed at illustrating the theorems of: Desargues, Pappo-Pascal and Pascalle**

**Marcello Pedone<sup>1</sup> e Paola Putignano<sup>2</sup>**

#### **Abstract**

Nell'articolo vengono presentati alcuni teoremi di geometria e geometria proiettiva con relativa dimostrazione. Tutte le figure sono state realizzate con il software GeoGebra.

*“...Quando i teoremi sono difficili, bisognerebbe insegnarli inizialmente come esercizi di disegno geometrico, finché la figura è divenuta del tutto familiare; allora sarà un passo avanti piacevole apprendere i legami logici tra le varie linee o i vari circoli. È anche desiderabile che la figura illustrante un teorema venga disegnata in tutti i casi e in tutte le forme possibili, di modo che le relazioni astratte di cui la geometria si occupa possano venire in luce da sé stesse, come portato logico delle somiglianze esistenti tra situazioni apparentemente tanto diverse. Le dimostrazioni astratte dovrebbero rappresentare dunque soltanto una piccola parte dell'istruzione, e dovrebbero essere date quando, attraverso la familiarità acquisita con gli esempi concreti, esse possono essere accolte come generalizzazioni naturali di fatti visibili ...”*

Bertrand Russel, “Misticismo e logica”, Londra 1917.

## **Premessa**

I teoremi trattati nel presente articolo sono:

### **TEOREMA DI DESARGUES**

*Se due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto, lo sono anche rispetto ad una retta.*

---

<sup>1</sup>marcellopedone@tin.it - Consigliere Nazionale Mathesis e Presidente della sezione di Lecce

<sup>2</sup>paolaputignano2000@libero.it - Studentessa della Facoltà di Matematica Università di Modena

**TEOREMA DI PASCAL**

*In un esagono inscritto in una sezione conica, i tre punti di intersezione dei lati opposti giacciono sempre su un'unica retta.*

**TEOREMA DI PAPPO-PASCAL**

*Come caso particolare del teorema di Pascal*

**TEOREMA DI BRIACHON**

*Siano date sei tangenti ad una conica. Esse si intersecano a due a due in sei punti. Si traccino le rette che congiungono i punti opposti. Queste rette si incontreranno in un punto.*

**Teorema di Desargues**

Se in due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  i vertici omologhi concorrono in un punto  $O$  (proprio o all'infinito) le rette dei lati omologhi si incontrano in punti allineati e viceversa.

*Il teorema di Desargues afferma che se due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto, lo sono anche rispetto ad una retta.*

Due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto se le rette che uniscono i punti sono concorrenti.

Si dice che due triangoli sono in prospettiva rispetto ad una retta se le coppie formate per rette corrispondenti si tagliano in punti allineati.

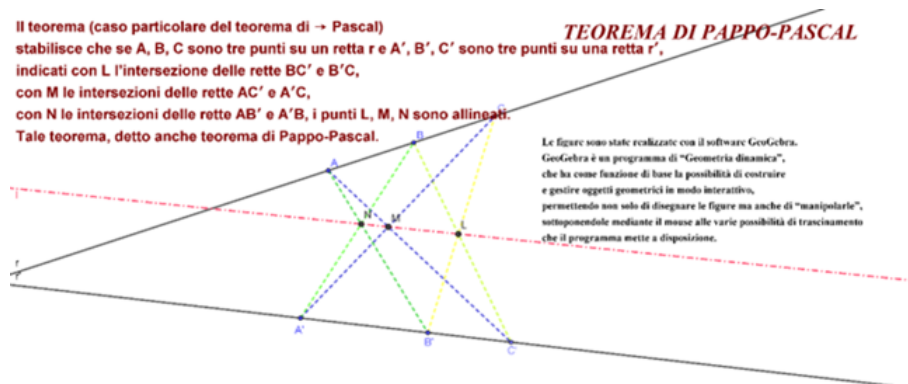
**Dimostrazione**

La dimostrazione più comune di questo teorema è fatta in tre dimensioni. Questo è possibile perché la geometria proiettiva funziona egualmente anche in questo caso. Considerando i due triangoli in questione ciascuno di questo apparterrà a un piano.

Chiamiamo  $r$  la retta che si ottiene intersecando i due piani. Ora, consideriamo  $D, E, F$ , punti di intersezione fra due vertici in prospettiva rispetto al punto  $O$ , punto rispetto al quale i triangoli di partenza sono in prospettiva.  $D, E$  ed  $F$  dovranno appartenere tutti alla retta  $r$  (retta viola in figura) in quanto tutti appartengono sia al piano del primo triangolo sia al piano del secondo triangolo, e si trovano perciò nella loro intersezione.

## Teorema di Pappo-Pascal

Il teorema (caso particolare del teorema di Pascal) stabilisce che se  $A, B, C$  sono tre punti su un retta  $r$  e  $A', B', C'$  sono tre punti su una retta  $r'$ , indicati con  $L$  l'intersezione delle rette  $BC'$  e  $B'C$ , con  $M$  le intersezioni delle rette  $AC'$  e  $A'C$ , con  $N$  le intersezioni delle rette  $AB'$  e  $A'B$ , i punti  $L, M, N$  sono allineati.



## Dimostrazione

Dimostriamo il teorema con l'aiuto delle coordinate omogenee. Anzitutto definiamo  $N = L(A, B') \cap L(A', B)$ ,  $M = L(A, C') \cap L(A', C)$ ,  $L = L(B, C') \cap L(B', C)$ . Osserviamo che, presi i quattro punti  $A, A', C', L$ , se ne consideriamo solo tre di questi, risultano non allineati, cioè non giacenti sulla stessa retta. Quindi possiamo scegliere le coordinate omogenee tali che  $C'(1, 0, 0)$ ,  $L(0, 1, 0)$ ,  $A(0, 0, 1)$ ,  $C'(1, 1, 1)$ .

Ora questo ci dà le equazioni di tre rette:  $L(A', C') = r : y = z$ ,  $L(C', L) : z = x$ ,  $L(A, C') : x = y$ . Queste rette contengono rispettivamente i punti  $B', B, M$ , dunque  $B'(p, 1, 1)$ ,  $B(1, q, 1)$ ,  $M(1, 1, r)$ , con  $p, q, r$  degli scalari. Le tre rette  $L(L, B) : x = py$ ,  $L(M, A) : y = qz$ ,  $L(A', B') : z = rx$ , passano tutte per lo stesso punto  $C'(1, 1, 1)$  se  $pqr = 1$ . Infine,  $N = L(A, B') \cap L(A', B)$ , significa

$$\begin{cases} x = py \\ y = qz \end{cases} \implies \begin{cases} x = pqz \\ y = qz \end{cases}$$

Per concludere la dimostrazione dovremmo vedere che  $N$  appartiene alla retta  $L(L, M) : z = rx$ . Affinché questo sia vero deve verificarsi  $z = r(pqz)$  cioè  $rpq = 1$ . Ma questo è vero per quanto abbiamo appena detto, quindi i tre punti  $N, M, L$  sono allineati.

## Teorema di Pascal

“In un esagono inscritto in una sezione conica, i tre punti di intersezione  $(G, H, J)$  dei lati opposti giacciono sempre su un'unica retta”.

Teorema di Pascal (*costruzione con GeoGebra*): “dati sei punti su una conica, si unisca ogni punto con il successivo mediante una retta, i tre punti ottenuti intersecando le rette opposte apparterranno allora ad una retta”.



## Dimostrazione

Sia  $ABCDEF$  un esagono inscritto in una conica; poniamo:  $H = AB \cap DE$ ;  $J = BC \cap EF$ ;  $G = CD \cap FA$ . Se un triangolo  $XYZ$  si deforma in modo che i suoi vertici  $X, Y$  scorrano sulle rette  $CD, CB$ , e i lati  $YZ, ZX, XY$  passino per i punti fissi  $E, A, H$ , allora il vertice  $Z$ , descrive una conica che passa per i punti  $A, E, C, B, D$  cioè  $Z$  descrive la conica data. Quando  $Z$  viene a coincidere con  $F$ , i vertici  $X$  e  $Y$  del triangolo coincidono rispettivamente con  $H$  e  $J$ ;  $G$  deve essere il punto fisso del lato  $JH$ , quindi  $J, H, G$  sono allineati.

*Il teorema di Pascal costituisce un esempio di teorema duale con il teorema di Brianchon.*

## NOTA

**Per cinque punti generici passa una sola conica**

Un risultato classico della teoria delle coniche afferma che per 5 punti generici passa una sola conica. Per "generici" si intende in questo caso che i 5 punti devono essere distinti, e che fra di loro non ve ne sono 4 allineati, cioè giacenti sulla stessa retta: l'aggettivo "generico" suggerisce che 5 punti "presi a caso" soddisfano certamente questa proprietà.

### **Condizione sul sesto punto**

Cinque punti generici determinano quindi una conica. Il teorema di Pascal fornisce una condizione affinché un sesto punto appartenga alla conica

*Il caso particolare in cui i sei punti sono contenuti in una conica degenera, cioè l'unione di due rette, si traduce nel teorema di Pappo-Pascal.*

## **Teorema di Brianchon**

Brianchon riscoprì il teorema di Pascal riformulandolo in forma moderna: "in un esagono inscritto in una sezione conica, i tre punti di intersezione dei lati opposti giacciono sempre su un'unica retta". Inoltre, Brianchon dimostrò il teorema che porta il suo nome: "In ogni esagono circoscritto ad una sezione conica, le tre diagonali si intersecano nel medesimo punto" (il punto di Brianchon) I teoremi di Pascal e Brianchon occupano una posizione fondamentale nello studio delle coniche dal punto di vista proiettivo.

*Essi formano, inoltre, il primo chiaro esempio di una coppia di importanti teoremi duali. Due teoremi si dicono duali se si mutano l'uno nell'altro quando tutti gli elementi e tutte le operazioni sono sostituite dai loro duali. In geometria piana il punto e la retta si dicono elementi duali. Tracciare una retta passante per un punto su una retta e segnare un punto su una retta sono operazioni duali. La natura duale dei teoremi di Pascal e Brianchon appare evidente se vengono formulati come segue:*

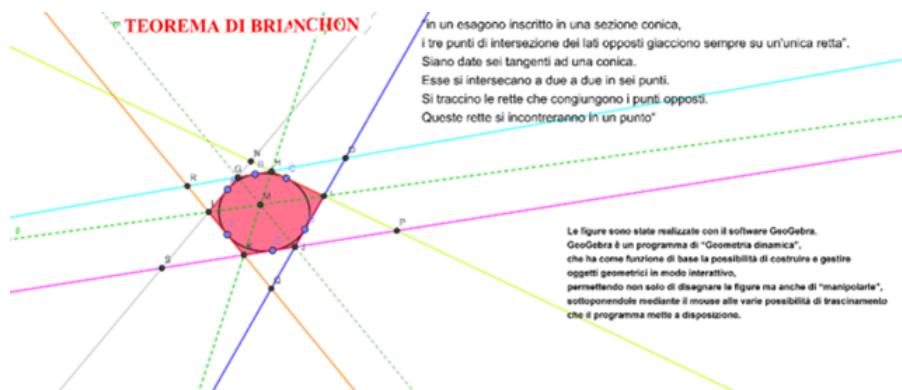
**Teorema di Pascal:** "dati sei punti su una conica, si unisca ogni punto con il successivo mediante una retta, i tre punti ottenuti intersecando le rette opposte apparterranno allora ad una retta".

**Teorema di Brianchon:** "siano date sei tangenti ad una conica. Esse si intersecano a due a due in sei punti. Si traccino le rette che congiungono i punti opposti. Queste rette si incontreranno in un punto".

Queste relazioni intercorrenti fra i punti e le rette di una conica furono più tardi efficacemente sfruttate da Jean Victor Poncelet (1788-1867). Fra le prime scoperte fatte da Poncelet vi fu quella che fece in collaborazione con Brianchon e che venne pubblicata in un articolo firmato da entrambi sugli Annales di Gergonne del 1820-1821.

In questo articolo Brianchon e Poncelet presentavano una dimostrazione del teorema che afferma:

**"La circonferenza che passa per i piedi delle perpendicolari, abbassate dai vertici di qualsiasi triangolo sui lati opposti, passa anche per i punti di mezzo di questi lati oltre che per i punti di mezzo dei segmenti che congiungono i vertici con il punto di intersezione delle perpendicolari"**



## Bibliografia

- [1] M. Pedone. Teorema di Pascal-Brianchon <https://www.geogebra.org/m/XuN2pvdM>
- [2] M. Pedone. Teorema di Pascal-Brianchon. <https://youtu.be/ScpZQcqIg-Y>
- [3] M. Pedone. Teorema di Pappo Pascal. <https://youtu.be/UhEZu6QfQX4>
- [4] F. Enriques: Lezioni di geometria proiettiva
- [5] M. Pedone. Primo e Secondo Teorema di Pappo-Guldino. <https://www.geogebra.org/m/NMAw9d9k>

## Arte e Tecnologie per una didattica innovativa

### Art and Technologies for innovative teaching

Eleonora Bilotta<sup>1</sup> e Pietro Pantano<sup>2</sup>

#### Abstract

In questo lavoro presentiamo un approccio che integra Arte, Scienza, Intelligenza Computazionale e Manifattura Digitale. Matematica da esibire, da calpestare e da indossare sotto forma di gioielli, mosaici e tessuti forniscono un approccio non convenzionale alla disciplina e la connettono direttamente alle moderne tecnologie dell'ultima rivoluzione industriale. Gli argomenti forniscono anche una serie di spunti educativi per impostare percorsi educativi in classe integrati con esperienze di laboratorio.

## Evoluzione della Matematica come Scienza Applicata

In questi ultimi anni la Matematica ha subito dei cambiamenti rilevanti nel modo in cui viene percepita. La disponibilità dei Big Data, l'uso delle simulazioni e l'avvento prepotente dell'Intelligenza Artificiale e delle Machine Learning pongono grandi sfide e presentano nuove opportunità. Nella sua dimensione applicativa, la Matematica, per certi versi, è stata considerata una scienza *ancillare* per le altre scienze dopo Galileo: forniva il linguaggio nel quale erano scritte le leggi della natura e consentiva lo sviluppo delle applicazioni ingegneristiche. La maggiore attenzione sui problemi del *mondo reale*, con le sue infinite sfaccettature e imprevedibilità, ha comportato la presa di coscienza che i fenomeni umani e biologici sono inerentemente *complessi* e spesso *irriducibili* e la loro analisi, comprensione e controllo richiedono una enorme quantità di dati e nuovi (o rivisti) strumenti matematici. Tutti questi fattori cambiano la natura stessa della disciplina, che non ha più bisogno di essere intermediata dalla fisica o dall'ingegneria ma diventa essa stessa una *scienza applicata* in grado di cogliere le sfide della complessità dei fenomeni naturali. Ovviamente questo comporta un ripensamento anche dell'insegnamento della disciplina che inevitabilmente deve

---

<sup>1</sup>Dipartimento di Fisica, Università della Calabria

<sup>2</sup>Dipartimento di Fisica, Università della Calabria

giá incorporare aspetti di dati e di calcolo computazionale, andando, in un certo senso, in direzione opposta a quanto avvenuto negli ultimi secoli. La disciplina non si confronta piú prevalentemente con simboli ma con numeri.

In questo articolo forniamo la testimonianza di una serie di ricerche teoriche che hanno un impatto sulla creazione di espressioni artistiche e come queste, attraverso l'uso di macchine a controllo numerico, possono diventare oggetti di uso quotidiano. Gli argomenti che tratteremo riguarderanno come attrattori strani possono diventare gioielli e avvicinare gli studenti a concetti astratti come lo spazio delle fasi, come mosaici ed altri oggetti del patrimonio storico possono essere ripensati e utilizzati e come gli automi cellulari possono dar vita a tessuti di grande bellezza e imprevedibilitá. L'idea é di utilizzare gli oggetti della manifattura e le metodologie sottostanti alla loro realizzazione per suscitare curiositá e quindi interesse alla conoscenza matematica sottostante.

## Dalle forme astratte agli oggetti concreti

Consideriamo una semplice curva polare

$$r = k \cos(ht) \quad (1)$$

dove  $h$  e  $k$  sono due parametri e  $t$  é la variabile indipendente. Questa curva é ben nota in letteratura come *rodonea* che deriva dalla traduzione greca di *rosa* in quanto, a seconda del valore del parametro  $h$ , assume delle forme che richiamano un fiore. In genere  $h$  é un intero positivo e nel caso sia un numero dispari, rappresenta proprio il numero di petali del fiore (vedi figura 1).

Immaginiamo ora di costruire un cerchio che abbia come centro un punto qualsiasi della curva. Il cerchio deve giacere in un piano ortogonale alla tangente alla curva. Se ripetiamo questa procedura per tutti i punti e raccordiamo in qualche modo questi cerchi, otterremo un tubo come nella figura 2. In realtá é uguale alla figura 1 tranne che ora la figura non é composta da una linea ma la stessa é un oggetto tridimensionale.

Anche se sembrano simili, gli oggetti sono radicalmente differenti. Infatti da un punto di vista formale l'oggetto di figura 2 é un insieme di triangoli in uno spazio tridimensionale che si raccordano perfettamente tra loro in modo da racchiudere un volume finito. Questo volume puó essere esportato come un file *.obj* o *.stl* e stampato da un service on-line o da una qualunque stampante additiva. Quindi con questa procedura, una forma astratta (la curva polare), puó diventare un oggetto concreto attraverso una serie di ben definite operazioni. Il processo descritto in precedenza non si puó ovviamente fare manualmente ma richiede il supporto di uno strumento di calcolo scientifico come ad es. Mathematica. In questo caso poche righe di codice ci portano al risultato.

Inizialmente con un codice descriviamo la curva polare:

```
PolarPlot[r = Cos[5t], {t, 0, 2Pi}]
```



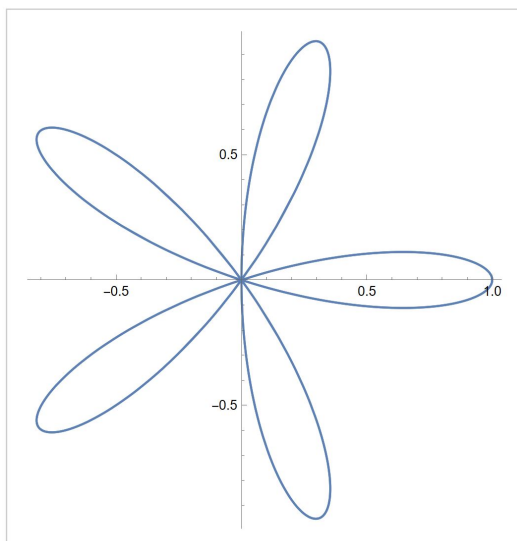


Figura 1: La curva di una rodnea quando  $k = 1$  e  $h = 5$ .

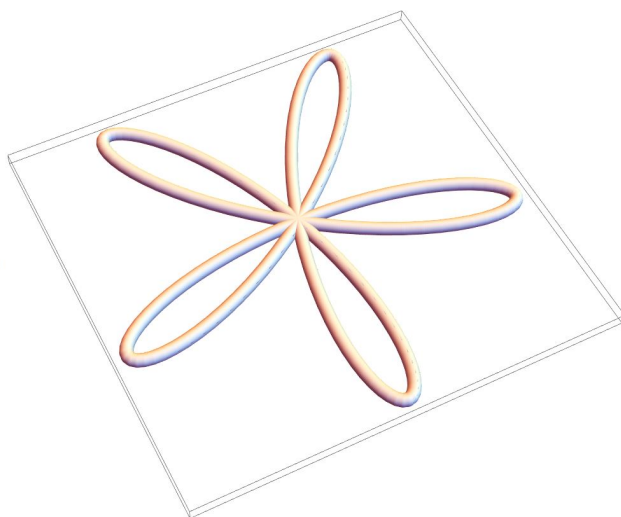


Figura 2: La curva di figura 1 ha ora acquisito uno spessore.

Successivamente discretizziamo la curva e trasformiamo le coordinate da polari in cartesiane

```

rr = Table[r = Cos[5t], {t, 0, 2Pi, .02}];
tt = Table[t, {t, 0, 2Pi, .02}];
pp = Table[CoordinateTransformData["Polar" → "Cartesian", "Mapping"][{rr[[n]], tt[[n]]},
{n, Length[rr]}];

xyz0 = Table[{pp[[n, 1]], pp[[n, 2]], 0}, {n, Length[pp]}];

```

Infine diamo uno spessore alla curva

```
ss = Graphics3D[Tube[xyz0, .03]]
```

A questo punto la grafica 3D può essere esportata in un formato riconosciuto da una stampante 3D.

L'esempio descritto in precedenza, sebbene sia molto semplice, è molto significativo da un punto di vista educativo perché mette in evidenza alcuni aspetti di notevole interesse:

1. quando utilizziamo una funzione analoga all'equazione 1 in realtà stiamo lavorando con *famiglie di oggetti*; ciascun oggetto della famiglia è individuato da un set di parametri (in questo caso  $h$  e  $k$ );
2. possiamo analizzare le tematiche connesse al continuo e al discreto e la necessità nei processi computazionali di passare da una rappresentazione all'altra [Steven Strogatz (2021), *Il potere dell'infinito: L'universo raccontato dal calcolo infinitesimale*, Codice Edizioni];
3. come un elemento di una dimensione può generare un elemento di dimensioni superiori (in questo caso trasformiamo una curva in un tubo); questo passaggio è legato all'introduzione di un altro parametro  $l$  che rappresenta il raggio del tubo.

Da un punto di vista formale, possiamo individuare uno spazio tridimensionale  $G$  dove ogni punto è individuato dai tre parametri  $g = \{h, k, l\}$  ai quali, tramite la procedura descritta in precedenza, possiamo associare, in modo univoco, una forma tridimensionale  $f \in F$  del tipo rappresentato in figura 2. In un certo senso,  $g \in G$  è il *genotipo* di una certa forma  $f \in F$  che possiamo considerare come il *fenotipo* se decidiamo di utilizzare una metafora biologica. Ad ogni genotipo corrisponde un unico fenotipo ed il processo descritto in precedenza è un'applicazione  $c$  tale che

$$c : G \rightarrow F \quad (2)$$

## Curve: Progettazione e fisicalizzazione

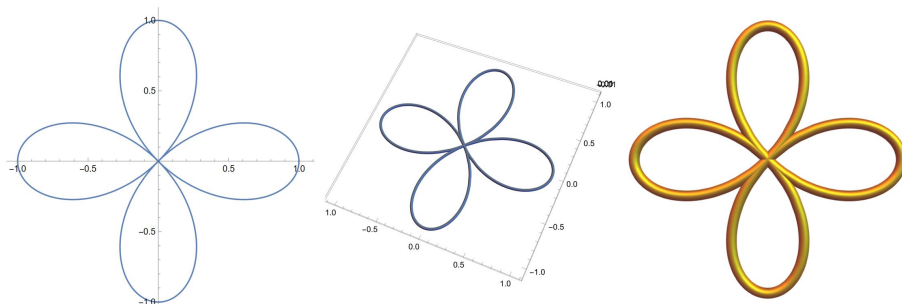


Figura 3: *Il processo di fisicalizzazione.*

In un certo senso  $c$  è un codice che trasforma un set di parametri in un volume particolare la cui essenza è l'equazione della curva polare 1. È ovvio che conoscendo il codice è semplice codificare un set di parametri in una particolare forma tridimensionale, mentre il processo inverso è spesso un problema estremamente complicato.

Infine, possiamo pensare che una macchina automatica (in questo caso una stampante 3D) possa prendere in ingresso un *file* codificato dalla  $f$  e possa fornire in uscita un oggetto fisico reale  $p$  appartenente allo spazio  $P$  degli oggetti del mondo reale; allora possiamo pensare ad un'applicazione  $\lambda$  che trasformi un genotipo in un oggetto reale:

$$\lambda : G \rightarrow P \quad (3)$$

È evidente la metafora biologica, dove una sequenza genetica viene trasformata in una proteina tramite particolari macchine molecolari note come *mitocondri*.

Ovviamente non esiste solo l'equazione 1 in grado di codificare ma ogni equazione o curva parametrica può essere utile allo scopo e quindi a sua volta l'equazione 1 altro non è che una funzione  $c$  appartenente all'insieme delle curve parametriche  $C$  (tra le quali un sottoinsieme è quello delle *curve celebri*). Ogni curva può essere a sua volta rappresentata da un parametro e quindi aggiungendolo al genotipo, non solo questo individua i parametri necessari per la codifica ma individua la macchina codificante.

Questo approccio è alla base di tutti i processi di *fisicalizzazione* che descriveremo successivamente (vedi figura 3).

Concludendo, abbiamo introdotto, in questa sezione, una serie di spazi che sono

- lo spazio dei parametri o spazio dei genotipi
- lo spazio delle forme o spazio dei fenotipi

- lo spazio degli oggetti fisici risultanti da un processo di fisicalizzazione
- spazio delle curve  $C$

Concludiamo questa sezione dicendo che lo spazio delle forme é anche noto come *spazio delle fasi*.

## Gioielli dal Caos

Le semplici funzioni parametriche descritte in precedenza non sono gli unici modi di generare una curva. A partire da Newton conosciamo il ruolo delle *equazioni differenziali* per descrivere la dinamica dei corpi in movimento. Se consideriamo il corpo come un punto materiale soggetto alla forza gravitazionale, utilizzando le leggi di Newton, possiamo scrivere un set di equazioni differenziali. Conoscendo i dati iniziali (posizione e velocità del corpo all'istante iniziale), possiamo *integrare* le equazioni differenziali ottenendo una successione di punti che descriveranno una curva ellittica. Lo stesso processo può essere applicato al moto in prossimità della terra ricavando le leggi di Galileo. La grande scoperta alla base della scienza moderna é che la stessa tipologia di equazioni e lo stesso metodo può essere utilizzato per descrivere sia il moto dei corpi terrestri che il moto dei corpi celesti. In questo caso le equazioni differenziali e il calcolo differenziale e integrale ci consentono di analizzare il comportamento dinamico dei corpi e riuscire a *prevedere* con ragionevole certezza, la posizione futura nota che sia la posizione e la velocità del corpo in un singolo istante di tempo. Questo é il *determinismo meccanico*.

Ovviamente la presenza di molti corpi non impedisce di usare lo stesso approccio. Il problema é che piú grande é il numero dei corpi, molte sono le equazioni coinvolte (tre per ogni corpo) ed i calcoli diventano rapidamente molto complicati. Se inoltre prevediamo che i corpi interagiscano tra loro, non siamo piú in grado (se il numero di corpi é superiore a due) di integrare le equazioni differenziali. In questo caso ci viene in aiuto il calcolo numerico. Se conosciamo i dati iniziali, allora possiamo dedurre la posizione dei corpi in un tempo successivo, purché l'intervallo sia sufficientemente piccolo. Piccoli intervalli temporali però comportano un grandissimo numero di calcoli, che per quanto semplici rapidamente diventano impossibili da fare manualmente. Non é impossibile da un punto di vista concettuale: é che il tempo necessario per ottenere risultati soddisfacenti si dilata moltissimo rispetto al tempo biologico umano. In questo caso il *calcolo scientifico* estende la nostra conoscenza e abbatte i limiti temporali: ciò che prima era teoricamente possibile ma impossibile da realizzare nei fatti, diventa ora fattibile. Il passaggio consentito dal calcolo scientifico, apre nuove prospettive, porta nuove conoscenze e rivoluziona la nostra immagine del mondo.

Le equazioni differenziali nello sviluppo storico descrivono il futuro partendo dalla conoscenza del presente. Fisici e Ingegneri non le usano piú per prevedere il modo dei corpi ma per descrivere il comportamento di variegati sistemi. In particolare gli ingegneri usano questo strumento per costruire e controllare macchine. Il problema che emerge però é che mentre le equazioni descrittive sono *non lineari*, le tecniche analitiche si applicano bene solo alle equazioni *lineari*.

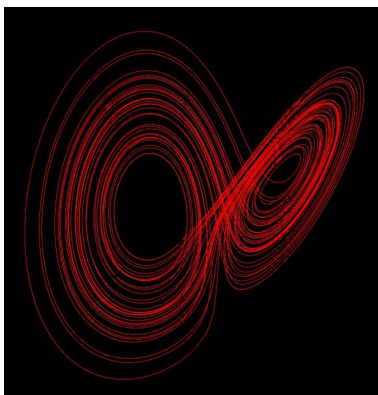


Figura 4: *L'attrattore di Lorenz.*

Siccome le equazioni lineari sono le uniche trattabili analiticamente ed in genere sono approssimazioni di equazioni non lineari, non potendo cambiare il mondo, se ne cambia la rappresentazione. Questo però come apparirà evidente, rappresenta un *orizzonte* alla conoscenza.

Il primo che si confronta con i problemi non lineari è Lorenz, un meteorologo che ai primi anni 60 del secolo scorso, cercando di semplificare le previsioni meteorologiche scrive tre equazioni non lineari in tre incognite. Questo set di equazioni è noto come *sistema di Lorenz*:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - xz - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

Quando Lorenz trovò questo sistema, non potendolo integrare analiticamente passò all'integrazione numerica ed ottenne la forma straordinariamente sorprendente analoga a quella di figura 4.

Questa curva era molto strana; continuava ad avvolgersi su se stessa indefinitamente senza intersecarsi mai. Continuando l'integrazione numerica sembrava essere in grado di occupare tutto lo spazio a disposizione. Lorenz chiamò questa curva tridimensionale *attrattore strano*. Fino ad allora il comportamento dinamico dei sistemi studiati, portava verso un punto nello spazio delle fasi o su una curva periodica che erano i due tipi di attrattori noti. L'attrattore di Lorenz catturava invece la dinamica all'interno di uno spazio tridimensionale ma la curva non convergeva né verso un punto fisso né verso una curva chiusa. L'attrattore aveva inoltre una struttura frattale, una nuova categoria di oggetti matematici dei quali parleremo più diffusamente in seguito. Un'altra caratteristica di questo sistema era l'estrema *sensibilità ai dati iniziali*. Due dati iniziali molto vicini, dopo un certo tempo, portavano i punti delle curve del moto ad allontanarsi reciprocamente, per poi riavvicinarsi, di fatto rendendo impossibile qualunque tipo di previsione.

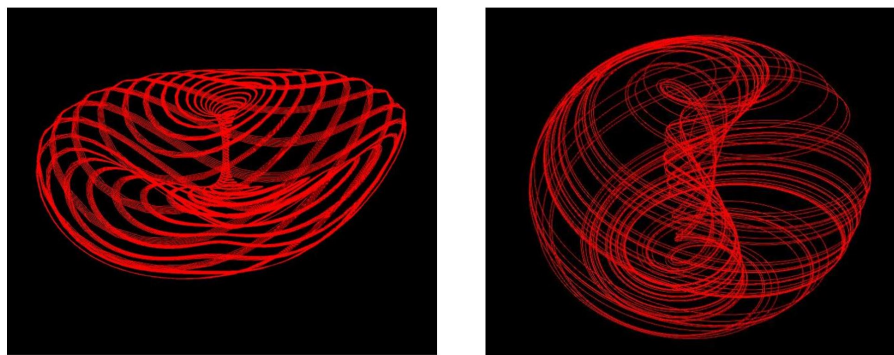


Figura 5: *Attrattori caotici.*

Il sistema continuava ad essere deterministico ma le previsioni diventavano impossibili perché per quanto il dato iniziale fosse accuratamente misurato, l'errore sperimentale era ineliminabile. Il *caos deterministico* era entrato prepotentemente nella scienza contemporanea [Francesca Bertacchini, Eleonora Bilotta, Pietro Pantano (2009), GEM Edizioni].

Una volta che gli scienziati avevano riconosciuto la natura caotica dei fenomeni non lineari, supportati dal calcolo numerico, furono in grado di trovare una grande quantità di attrattori caotici in situazioni fisiche completamente differenti (vedi figura 5).

La descrizione che abbiamo fatto nella sezione precedente continua a funzionare anche in questo caso. Ad esempio nel caso del sistema di Lorenz, lo spazio dei parametri è ora individuato dai parametri  $\sigma, \rho, \beta$  ai quali dobbiamo aggiungere i dati iniziali  $x(0), y(0), z(0)$  ed i valori dell'integrazione numerica  $\Delta t$  ed  $n$  (i passi di integrazione). Utilizzando proprio il concetto di spazio dei parametri (genotipo) in una serie di lavori, abbiamo trovato nell'oscillatore di Chua oltre 900 attrattori strani differenti. Questi attrattori, pubblicati una serie di articoli scientifici, sono stati raccolti in un libro pubblicato dalla World Scientific [Eleonora Bilotta, Pietro Pantano (2009), *A Gallery of Chua Attractors*, World Scientific]. Lo spazio delle fasi può ancora essere considerato come il fenotipo ed una stampante 3D continuerà ad essere in grado di *fisicalizzare* queste curve (vedi figura 6).

La figura 6 evidenzia il processo generativo. A sinistra i vari punti dell'attrattore strano man mano che procede l'integrazione numerica. A destra in alto differenti attrattori per differenti valori dei parametri; in basso a sinistra la stampa in resina di vari attrattori, a destra in basso differenti stampe di attrattori in bronzo e composizioni sotto forma di gioielli. In [Francesca Bertacchini, Pietro Pantano, Eleonora Bilotta (2023), *Jewels from chaos: A fascinating journey from abstract forms to physical objects*, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 33 (1)] questo processo è descritto in modo analitico così come i problemi legati alla fisicalizzazione per passare dagli attrattori a gioielli con la forma di attrattori.

In figura 7 altri gioielli generati da attrattori strani.



Figura 6: *Dalla generazione degli attrattori ai gioielli.*



Figura 7: *Esempi di gioielli dal caos.*

## Piastrellature e Mosaici

L'idea di piastrellare una superficie piana é molto antica. Il problema risiede nel fare in modo che le varie mattonelle combacino perfettamente tra loro senza lasciare spazi vuoti ed ovviamente senza sovrapporsi. Da un punto di vista matematico questo equivale a creare un *ricoprimento*. Questa operazione puó essere fatta in vari modi:

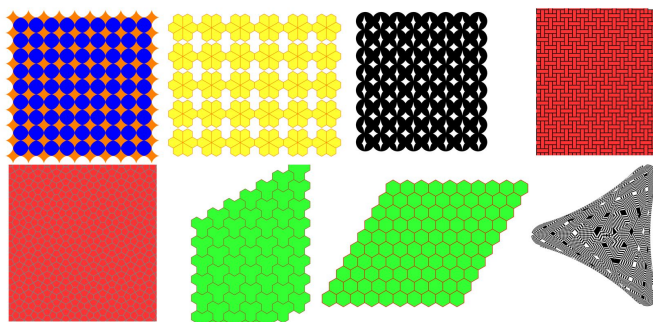


Figura 8: *Esempi di piastrellature.*

ad esempio utilizzando mattonelle dello stesso tipo come quadrati, triangoli o esagoni o combinazioni di piú poligoni differenti ripetuti indefinitamente (vedi figura 8).

I matematici hanno studiato e classificato queste differenti tipologie anche per le straordinarie simmetrie che essi manifestano [John H Conway, Heidi Burgiel, Chaim Goodman–Strauss (2008), A K Peters, Ltd.]. Lo studio di queste strutture non hanno interesse solo per gli aspetti matematici ma anche per le applicazioni come ad esempio nella cristallografia o nell'elettronica. A tutti gli effetti possiamo considerare queste strutture come cristalli bidimensionali.

Possiamo rapidamente investigare questi ricoprimenti ricorrendo al già citato software Mathematica, che ne classifica 60 di forme variegatae

**pt = EntityList["PeriodicTiling"]**

"square tiling", "hexagonal tiling", "regular triangular tiling", "trihexagonal tiling", "small rhombitrihexagonal tiling", "truncated square tiling", "snub square tiling", "truncated hexagonal tiling", "elongated triangular tiling", "great rhombitrihexagonal tiling", "snub hexagonal tiling", "rhombille tiling", "deltoidal trihexagonal tiling", "tetrakis square tiling", "Cairo tiling", "triakis triangular tiling", "prismatic pentagonal tiling", "bisected hexagonal tiling", "floret pentagonal tiling", "Della Robbia weave tiling", "Portugal tiling", "stack bond tiling", "herringbone tiling", "basketweave tiling", "Persian hexagonal weave tiling", "two square tiling", "stretcher bond tiling", "pinwheel tiling", "brickwork square tiling", "chickenwire tiling", "corridor tiling", "corridor horizontal tiling", "brickweave tiling", "trellis tiling", "Heesch isohedral tiling", "arbitrary triangle tiling", "arbitrary quadrilateral tiling", "P pentomino tiling", "chevron tiling", "shingle tiling", "zigzag tiling", "kite tiling", "false cubic tiling", "trihex and hex tiling", "glide reflection tiling", "pentagon type 1 tiling", "pentagon type 2 tiling", "pentagon type 3 tiling", "pentagon type 4 tiling", "pentagon type 5 tiling", "pentagon type 6 tiling", "pentagon type 7 tiling", "pentagon type 8 tiling", "pentagon type 9 tiling", "pentagon type 10 tiling", "pentagon type 11 tiling", "pentagon type 12 tiling", "pentagon type 13 tiling", "pentagon type 14 tiling", "pentagon type 15 tiling".






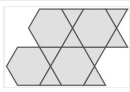



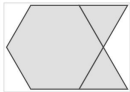
trihexagonal tiling ["Dataset"]	
alternate names	{kagome lattice}
classes	{  edge-transitive tiling ,  semiregular tiling ,  vertex-transitive tiling }
Conway name	hexadeltile
diagram	
dual tiling	rhombille tiling
entity classes	{  edge-transitive tiling ,  semiregular tiling ,  vertex-transitive tiling }
name	trihexagonal tiling
notations	{GruenbaumNotation $\rightarrow$ 3.6.3.6, SchlaefliSymbol $\rightarrow$ t_1{6,3}, WythoffSymbol $\rightarrow$ 2   6 3, VertexNotation $\rightarrow$ {6, 3, 6, 3}}
parameters	{}
primitive unit	
symmetry	{p6m, *632}
translation vectors	Function[{}, {(2, 0)}, {1, $\sqrt{3}$ }]

Figura 9: *Proprietá di una tassellazione.*

Di ognuna di queste ci restuisce anche le proprietá (vedi figura 9). Quello che ci interessa maggiormente per i nostri scopi é l'*unitá primitiva* e i *vettori di traslazione*. Di fatto i vettori di traslazione consentono di traslare nel piano l'unitá primitiva ed ottenere quindi il ricoprimento del diagramma.

Utilizzare un software di calcolo scientifico in questo caso é estremamente efficiente perché non é semplicissimo trovare (o individuare dalle tassellazioni utilizzate) le unitá elementari ed i vettori di traslazione che spesso includono numeri irrazionali. In questo caso l'ingegneria inversa che parte dai ricoprimenti per ottenere la geometria é inefficace.

Se analizziamo i ricoprimenti della figura 8 ci accorgiamo che non tutte sono dello stesso colore. Utilizzare differenti colori rende questi ricoprimenti molto piú belli. Una raccolta mirabile di piastrellature policrome si trova nel libro [Pier Francesco Sciuto (2022), Patternland. Un piccolo atlante matematico di tassellazioni, Pendragon]. La policromia apre il campo ad altre applicazioni come ad esempio i mosaici dove i ricoprimenti non sono piú fatti con unitá primitive ma con tessere di differenti dimensioni e spessore. Nonostante ciò organizzazioni e simmetrie possono essere individuate sia a livello locale che globale.

In realtà possiamo investigare queste configurazioni in tre differenti modi: attraverso la manipolazione reale di tessere; attraverso un software di calcolo scientifico o per mezzo di ragionamenti astratti tipici della Matematica. Ad esempio in figura 10, una serie di tessere, realizzate appositamente da una macchina con taglio laser (a sinistra), sono state utilizzate per costruire un triangolo di Sierpinski (al centro), poi



Figura 10: A sinistra tessere di varie forme e colori. Al centro un triangolo di Sierpinski costruito con tessere triangolari di forme e colori differenti. A destra lo stesso triangolo all'interno di una struttura piú elaborata

incorporato in una struttura piú complessa (a destra). Quest'ultima riproduce la parte centrale di un mosaico Cosmatesco [Paloma Pajares-Ayuela (2001), W.W. Norton and Company, Inc.] presente nella chiesa di Santa Maria Maggiore a Civita Castellana. I Cosmati, famiglia di marmorari romani che operò a partire dall'undicesimo secolo soprattutto nel Lazio, ha lasciato delle tracce memorabili di pavimenti di enorme complessità, ispirando molti architetti anche fuori dall'Italia centrale. Memorabile è la grande pavimentazione che si trova a WestMinster.

Manipolando un enorme numero di tessere, si possono esplorare simmetrie e configurazioni di sorprendente complessità. Nella figura 11 abbiamo a sinistra una ricostruzione di un quincux e delle guilloche del mosaico con delle texture policrome. Questo frammento con una stampante U-V è stato poi riprodotto su una singola mattonella in legno e in ceramica. La seconda figura di sinistra è la ricostruzione dell'intero mosaico anch'esso stampato su un supporto in ceramica e legno. Infine le immagini di destra sono dei rendering dell'intero mosaico realizzati con texture lignee di differenti colori.

La dimensione matematica, artistica e produttiva di questi studi è veramente interessante. Ad esempio in figura 12 possiamo osservare le infinite possibilità di realizzare sia figure sia tassellazioni utilizzabili in differenti contesti. In questo caso l'uso di macchine di taglio su legno o la stessa stampa di texture su tessere ceramiche o lignee consente l'esplorazione di figure di particolare interesse storico e/o artistico. Nell'immagine di destra possiamo osservare un interessante mosaico rinvenuto a Colonia noto come *Mosaico dei Filosofi*. In questo caso le tessere esagonali contenevano le immagini dei piú importanti filosofi dell'antichità.

## Automi Cellulari: indossare la matematica

Un altro contesto nel quale Arte, Scienza, calcolo scientifico e computazione, manifattura digitale e macchine a controllo numerico trovano una notevole intersezione



Figura 11: *La ricostruzione e stampa della pavimentazione cosmatesca di Westminster stampata su supporto ceramico e ligneo. A sinistra il particolare di una figura.*

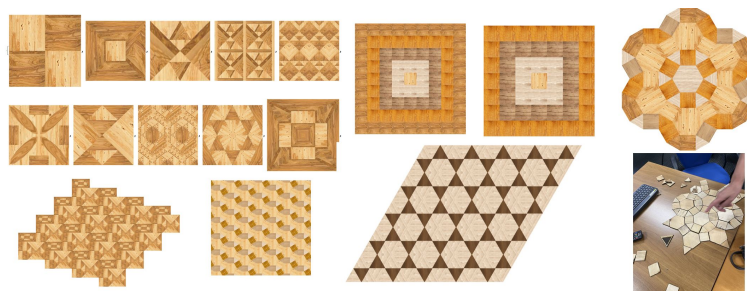


Figura 12: *Varie figure, piastrellature e mosaici lignei. a destra il mosaico dei filosofi.*

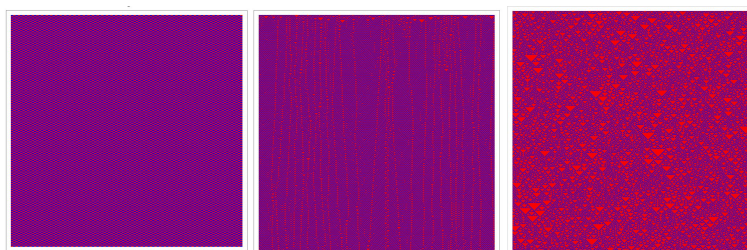


Figura 13: *Pattern generati da automi cellulari. A sinistra una figura regolare, al centro l'emergenza di strutture complesse e a destra un pattern caotico.*

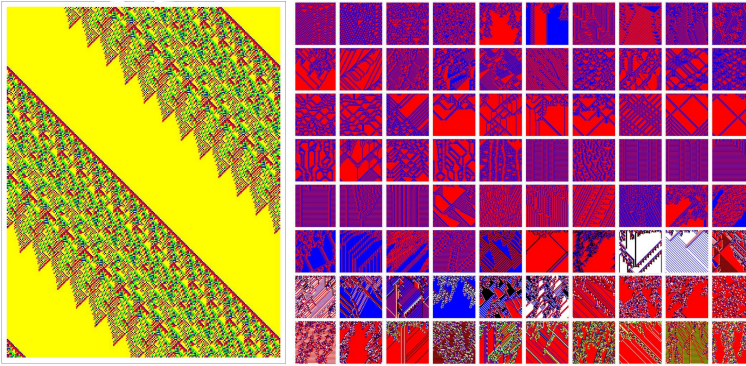


Figura 14: Una serie di regole complesse di Automi Cellulari dove si possono individuare glider, domini regolari etc. A sinistra il dettaglio dell'evoluzione spaziale temporale di un glider molto complesso.

è quello degli automi cellulari (CA). Furono introdotti nel secolo scorso da von Neumann per indagare la *logica della vita*. Sono sistemi dinamici discreti nello spazio e nel tempo ed una loro mirabile caratteristica è che al di là delle semplici regole di evoluzione, sono in grado di esibire comportamenti di straordinaria varietà e complessità [Stephen Wolfram (2002), *A New Kind of Science*, Wolfram Media Inc ]. Ad esempio nella figura 13 osserviamo tre differenti pattern prodotti da automi cellulari: a sinistra un pattern ordinato con strutture periodiche, al centro l'*emergenza* di strutture complesse (note come *glider*) ed a destra un pattern caotico.

La cosa veramente rilevante è proprio l'emergenza di pattern complessi. Come si può osservare dalla figura 14 all'interno dei pattern spazio temporali (lo spazio composto dalle celle discrete orizzontali, mentre in verticale c'è l'evoluzione temporale della sequenza di celle) possiamo individuare nettamente la presenza di strutture che viaggiano nello spazio man mano che il tempo scorre. La caratteristica di queste strutture emergenti è il loro comportamento periodico come si può osservare nella figura 14 a sinistra. Queste strutture inoltre manifestano grande complessità: mentre viaggiano su sfondi ordinati (uniformi o periodici) si incontrano spesso generando altre strutture dello stesso tipo o loro derivate. La complessità computazionale, al di là delle semplici regole di evoluzione, impedisce nei fatti per le regole complesse o caotiche di prevedere l'andamento futuro del sistema se non lasciando che la stessa computazione sviluppi il suo corso. Ricordiamo che le regole di evoluzione di una cella di un CA è regolata dal suo stato e da quello dei suoi vicini più prossimi: per questo facciamo riferimento alla *semplicità* delle regole di evoluzione.

Come per i gioielli e le piastrelle trattati nelle sezioni precedenti, possiamo chiederci se queste strutture matematico-computazionali possono essere in qualche modo fisicalizzate. Come si può osservare dalla figura 15 questo è certamente possibile, purché si usi una particolare macchina a controllo numerico che in questo caso particolare sono i telai Jacquard. Non è possibile implementare manualmente una trama indotta





Figura 15: *Un CA complesso utilizzato per fisicalizzare un tessuto tramite un telaio Jacquard.*



Figura 16: *Da sinistra verso destra, le prime due immagini sono relative ad un CA complesso fisicalizzato in lana. La penultima immagine riporta il pattern spazio temporale del CA e l'ultima immagine a destra un dettaglio delle strutture emergenti all'incrocio tra solitoni.*

da un CA complesso o caotico. La relazione con i telai programmabili consente anche un'escursione molto interessante sui concetti di informazione e programmazione. Nella figura 15 osserviamo un pattern di un CA complesso tessuto in cotone e finalizzato in cuscini o tovaglia. A destra un dettaglio nel quale si può osservare la complessità della trama. È interessante notare anche l'effetto della dimensione del filo nella comprensione delle strutture emergenti: gioca un ruolo cruciale non solo nel rendering ma anche nella sua realizzazione fisica.

Nella figura 16 possiamo invece osservare uno splendido manufatto rappresentato da una sciarpa tessuta in lana sempre con un telaio Jacquard. In questo caso l'immagine (evidenziata nella penultima figura a destra) rappresenta l'evoluzione di due solitoni che viaggiano in verso opposto. Incontrandosi danno origine ad altri solitoni e nell'incrocio danno vita a figure via via più complesse com'è evidenziato dall'ultima immagine a destra. Questo processo continua nel tempo generando tanti solitoni e figure molto complesse, portando il sistema verso il caso. In un certo senso la dinamica di questo CA, descritto in [Y. Aizawa, I. Nishikawa, K. Kaneko, (1990), Soliton turbu-

lence in one-dimensional cellular automata, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 45, Issues 1–3, pp 307-327] rappresenta l'evoluzione di un sistema dall'ordine al caos. Le prime due immagini da sinistra della figura 16 mostrano la fisicalizzazione del CA in lana.

## Uno sguardo prospettico

Quanto descritto in questo articolo é il risultato di un percorso piú che ventennale sviluppato presso l'università della Calabria tra Arte Scienza e Manifattura. Il punto di partenza é stata la ricerca sui sistemi complessi. Per interpretare i risultati che via via emergevano da questi studi, é stato necessario costruire rappresentazioni grafiche e analizzare segnali. Questo ha dato come risultato immagini, suoni e musica di struggente bellezza. Da qui l'idea di trasformare questi oggetti digitali in oggetti reali, approfittando degli strumenti disponibili nella quarta rivoluzione industriale. La descrizione di questo percorso si trova nel libro [Francesca Bertacchini, Eleonora Bilotta, Pietro Pantano (2022), *Sistemi complessi: Un viaggio tra Arte e Scienza*, Rubbettino Editore]. I manufatti presentati in questo articoli e molti altri sono stati esposti nella mostra *ESSENZE – Modellazione di sistemi complessi*. Una versione virtuale della mostra stessa si trova all'indirizzo <https://armonicamente.unical.it/mostra-essenze/>.

L'idea che questo percorso potesse poi essere utilizzato a scopi didattici per appassionare alla Matematica le nuove generazioni assai sensibili alle immagini, alle manufatti innovative e alla manipolazione tramite strumenti digitali, é stato consequenziale. L'applicazione didattica non é complicata purché si disponga delle attrezzature necessarie per finalizzare i risultati in termini di manufatti. Gli strumenti, come le stampanti 3D, sono ormai abbastanza diffusi mentre piú rari sono le macchine di taglio laser. I telai jacquard, necessari per i CA, sono invece piú difficili da trovare ma comunque accessibili.

Un percorso educativo basato sull'approccio presentato in questo articolo consente

- l'introduzione di Algoritmi Cognitivi e Intelligenza Computazionale come supporto alla progettazione;
- un riferimento specifico alla manifattura pilotando macchine a controllo numerico;
- di lavorare all'interno di un nuovo paradigma rispetto alla produzione tradizionale;
- di fornire agli studenti una dimensione immediatamente utilizzabile nel mondo del lavoro;
- di avvicinare la Matematica alla realtà ed alla quotidianità;
- di fornire strumenti utili per comprendere la società contemporanea;
- di incrociare meglio gli interessi degli studenti (stampa 3D, manipolazione di musiche e suoni, immagini etc.).

## **Bibliografia**

(NOTA:Riportata nel testo)

## **Ringraziamenti**

Si ringrazia Pier Francesco Sciuto per i codici originali relativi alla creazione delle tallellazioni presentate nel suo libro e Nicola Severino per gli utili consigli relativi ai Cosmati.

La ricerca é stata finanziata dai fondi del progetto Next Generation UE - PNRR Tech4You assegnati all' Università della Basilicata (PP4.2.1 - Materials, architecture and design: open knowledge and innovative digital tools for cultural heritage. Coordinatore scientifico prof. Antonella Guida)





# Quanti sono i gruppi di ordine 2023?

## How many groups of order 2023 are there?

Maria Coccozza<sup>1</sup> e Alessio Russo<sup>2</sup>

### Abstract

In this article we prove that if  $G$  is a group of order 2023, then  $G$  is either cyclic or is isomorphic to the direct product  $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{17}$ . In particular,  $G$  is abelian.

### Introduzione

Siano  $(G_1, \perp_1)$  e  $(G_2, \perp_2)$  gruppi. È ben noto che un'applicazione  $f : G_1 \rightarrow G_2$  è un *isomorfismo* di  $G_1$  in  $G_2$  se essa è biettiva e risulta  $f(x \perp_1 y) = f(x) \perp_2 f(y)$ , comunque si considerino degli elementi  $x, y \in G_1$ . Ovviamente, se  $f$  è un isomorfismo di  $G_1$  in  $G_2$ , allora l'applicazione inversa  $f^{-1}$  di  $f$  è un isomorfismo di  $G_2$  in  $G_1$ . I gruppi  $G_1$  e  $G_2$  si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo fra essi. Per esprimere ciò, si scrive  $G_1 \simeq G_2$ , o equivalentemente,  $G_2 \simeq G_1$ . Facciamo un esempio. Consideriamo l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei numeri reali positivi. Con l'ordinaria moltiplicazione dei numeri reali, esso acquista la struttura di gruppo. Tale gruppo è isomorfo al gruppo additivo dei numeri reali. Infatti, l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \log x \in \mathbb{R}$$

è un isomorfismo, in quanto la funzione logaritmo è strettamente monotona e vale la proprietà  $\log(xy) = \log x + \log y$ , per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Un altro esempio può essere ottenuto studiando le radici dell'equazione  $x^8 - 1 = 0$  nel campo complesso. Sappiamo che l'insieme  $C_8$  di tali radici ha ordine 8 e costituisce un gruppo ciclico mediante la moltiplicazione dei numeri complessi. Allora, si può dimostrare che  $C_8$  è isomorfo al gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi dei resti modulo 8.

---

<sup>1</sup>mariaoccozza@lscortese.com - Liceo Scientifico "Nino Cortese", Maddaloni (Ce)

<sup>2</sup>alessio.russo@unicampania.it - Dipartimento di Matematica e Fisica, Università della Campania "Luigi Vanvitelli", Viale Lincoln 5, 81100 Caserta

Abbiamo già osservato che se  $G_1$  è isomorfo a  $G_2$ , allora  $G_2$  è isomorfo a  $G_1$ . Inoltre, è chiaro che ogni gruppo è isomorfo a se stesso e che se  $G_1, G_2$  e  $G_3$  sono gruppi tali che  $G_1 \simeq G_2$  e  $G_2 \simeq G_3$ , allora  $G_1 \simeq G_3$ . Pertanto, fissato un insieme  $\Gamma$  di gruppi, la relazione di isomorfismo in  $\Gamma$  è una *relazione di equivalenza* e quindi permette di ripartire  $\Gamma$  in *classi di isomorfismo*. Ciò consente di studiare i gruppi, come si dice, *a meno di isomorfismi*. In altre parole, è sufficiente individuare un *rappresentante* per ogni classe di isomorfismo e fissare l'attenzione su di esso. Tutte le proprietà che saranno ottenute varranno per ogni gruppo ad esso isomorfo. Naturalmente, è significativo studiare proprietà che si conservano per isomorfismi.

Siano  $n$  un numero intero positivo e  $G$  un gruppo finito di ordine  $n$ . Un importante *teorema di Cayley* (cfr. [4, 3.1]) assicura che  $G$  è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo simmetrico  $S_n$ . Di conseguenza, il numero delle classi di isomorfismo dei gruppi di ordine  $n$  è finito e minore di  $2^{n!}$ . Una di queste classi è costituita da tutti e soli i gruppi ciclici di ordine  $n$  ciascuno dei quali, come è ben noto, è isomorfo al gruppo additivo  $(\mathbb{Z}_n, +)$  dell'anello delle classi dei resti modulo  $n$  (cfr. [4, 4.27]). È interessante ricordare un teorema attribuito da vari autori a Burnside (cfr., ad esempio, [1]), secondo cui  $n$  è ordine soltanto di gruppi ciclici se e solo se  $n$  è prodotto di numeri primi distinti e se  $p$  e  $q$  sono fattori primi di  $n$  tali che  $p < q$ , allora  $p$  non è divisore di  $q - 1$ . Ad esempio, sono ciclici tutti i gruppi di ordine 15, 35 e 455; quindi, per ciascuno di questi numeri c'è un'unica classe di isomorfismo.

In generale, il problema della ricerca, a meno di isomorfismi, dei gruppi di un fissato ordine  $n$  può essere affrontato quando  $n$  ha una forma particolare (come abbiamo visto col teorema di Burnside) oppure relativamente a gruppi di una certa tipologia. Ad esempio, oltre al caso elementare dei gruppi ciclici, il problema è stato completamente risolto per i *gruppi abeliani*. Infatti, tra il 1868 e il 1879 i matematici Frobenius, Kronecker, Schering e Stickelberger dimostrarono (cfr. [5, 2.5.7, 2.5.8]) che *se  $G$  è un gruppo abeliano finito di ordine  $n$ , allora  $G$  si decompone nel prodotto diretto di gruppi ciclici, ciascuno dei quali ha ordine una potenza di un numero primo. Inoltre, se  $n = p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_t^{n_t}$ , dove  $p_1, \dots, p_t$  sono numeri primi a due a due distinti, allora il numero delle classi di isomorfismo dei gruppi abeliani di ordine  $n$  è dato dal prodotto  $\rho_1(n_1) \cdot \dots \cdot \rho_t(n_t)$  delle partizioni dei numeri  $n_1, \dots, n_t$  (si ricorda che per partizione di un numero naturale  $m$  si intende una  $r$ -pla  $(k_1, \dots, k_r)$  di numeri naturali tali che  $k_1 \leq \dots \leq k_r$  e  $m = k_1 + \dots + k_r$ ). Ad esempio, se  $p$  è un numero primo, allora esistono 3 classi di isomorfismo di gruppi abeliani di ordine  $p^3$ , poiché il numero 3 ha le partizioni (3), (1, 2) e (1, 1, 1). Come rappresentanti delle 3 classi di isomorfismo possiamo considerare il gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_{p^3}$  e i gruppi  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2}$  e  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ .*

Scopo di questo articolo è la determinazione della struttura dei gruppi di ordine 2023. Quest'ultimo numero, che è anche quello dell'anno in corso, si decompone nel prodotto del numero 7 e del quadrato  $17^2$ . Lo studio sarà affrontato in un contesto più generale, considerando i gruppi di ordine  $pq^2$ , dove  $p$  e  $q$  sono numeri primi tali che  $p < q$  e  $q^2 - 1$  non è divisibile per  $p$ . Dal risultato ottenuto seguirà che *un gruppo di ordine 2023 se non è ciclico, è isomorfo al prodotto diretto  $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{17}$ .*

Le notazioni e le definizioni utilizzate sono standard nella Teoria dei Gruppi. In particolare, abbiamo fatto riferimento ai manuali [2], [3], [4] e [5].

## Coniugio in un gruppo

Sia  $G$  un gruppo. Come è noto, se  $H$  è un sottogruppo di  $G$ , allora è possibile definire le relazioni di equivalenza  $R'_H$  e  $R''_H$  in  $G$  le cui classi di equivalenza sono, rispettivamente, i *lateralis sinistri*  $xH$  e i *lateralis destri*  $Hx$  di  $H$  in  $G$  determinati dagli elementi  $x \in G$ . Gli insiemi quozienti  $G/R'_H$  e  $G/R''_H$  sono equipotenti e il loro numero cardinale si dice *indice* di  $H$  in  $G$  e si denota col simbolo  $|G : H|$ . Il *Teorema di Lagrange*, uno dei più antichi risultati della Teoria dei Gruppi, assicura che se  $G$  è un gruppo finito, allora  $|G| = |H||G : H|$ . In particolare, l'ordine  $|H|$  del sottogruppo  $H$  è un divisore dell'ordine di  $G$ .

La *relazione di coniugio* rappresenta un altro utile strumento per ottenere una partizione di un gruppo. A tale scopo, siano  $x$  e  $y$  degli elementi di un gruppo  $G$ . Si dice che  $y$  è *coniugato* a  $x$  in  $G$ , e si scrive

$$xC_Gy,$$

se esiste un elemento  $g \in G$  tale che  $y = g^{-1}xg$ . Nel seguito spesso useremo il simbolo  $x^g$  per indicare l'elemento  $g^{-1}xg$ . Non è difficile dimostrare che  $C_G$  è una relazione di equivalenza in  $G$  e che la classe di equivalenza (detta *classe di coniugio*) di un elemento  $x$  di  $G$  è data dall'insieme

$$[x]_{C_G} = \{x^g \mid g \in G\}.$$

Ad esempio, supponiamo che  $G$  sia il gruppo simmetrico  $S_3$  su 3 oggetti. Allora  $S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ , e quindi le classi di coniugio di  $G$  sono  $[1]_{C_{S_3}} = \{1\}$ ,  $[(12)]_{C_{S_3}} = \{(12), (13), (23)\}$  e  $[(123)]_{C_{S_3}} = \{(123), (132)\}$ . Ricordiamo che un sottogruppo  $H$  di un gruppo  $G$  si dice *normale* se contiene i coniugati di tutti i suoi elementi, cioè se  $H$  coincide col sottogruppo  $H^g = \{h^g \mid h \in H\}$  di  $G$ , per ogni elemento  $g \in G$ . Pertanto,  $H$  è un sottogruppo normale se e solo se  $H$  è unione di classi di coniugio di  $G$ .

Se  $x$  è un elemento di  $G$ , si chiama *centralizzante* di  $x$  in  $G$  l'insieme

$$C_G(x) = \{y \in G \mid yx = xy\}.$$

Ovviamente  $C_G(x)$  è un sottogruppo di  $G$  e l'intersezione di tutti i centralizzanti degli elementi di  $G$  coincide col centro  $Z(G)$  di  $G$ . Il prossimo risultato prova in particolare che in gruppo finito  $G$  l'ordine della classe di coniugio di un elemento di  $G$  è un divisore dell'ordine di  $G$ .

**Proposizione 1.** (Burnside) *Siano  $G$  un gruppo e  $x$  un elemento di  $G$ . Allora l'ordine  $|[x]_{C_G}|$  della classe di coniugio di  $x$  coincide con l'indice  $|G : C_G(x)|$  del centralizzante di  $x$  in  $G$ .*

*Dimostrazione.* Se  $a$  e  $b$  sono elementi di  $G$ , allora  $C_G(x)a = C_G(x)b$  se e solo se  $ab^{-1} \in C_G(x)$ , e quindi se e solo se  $xab^{-1} = ab^{-1}x$ . Pertanto  $C_G(x)a = C_G(x)b$  equivale a  $a^{-1}xa = b^{-1}xb$ . Resta allora determinata l'applicazione iniettiva

$$f : C_G(x)a \in G/R''_{C_G(x)} \mapsto a^{-1}xa \in [x]_{C_G}.$$

Inoltre, se  $y$  è un elemento di  $[x]_{C_G}$ , allora esiste un elemento  $a \in G$  tale che  $y = a^{-1}xa$ . Ne segue che  $f(C_G(x)a) = y$ . Pertanto  $f$  è biettiva e l'asserto è dimostrato.  $\square$

Sia  $G$  un gruppo finito. Denotiamo con  $[x_1]_{C_G}, \dots, [x_t]_{C_G}$  le classi di coniugio distinte di  $G$ . Poiché esse determinano una partizione di  $G$ , allora

$$|G| = |[x_1]_{C_G}| + \dots + |[x_t]_{C_G}|.$$

Ovviamente, un elemento di  $G$  è centrale se e solo se la sua classe di coniugio è costituita dal solo elemento, sicché nella precedente uguaglianza la somma degli addendi di ordine 1 è uguale all'ordine del centro di  $G$ . Quindi, utilizzando la Proposizione 1, si ottiene la seguente relazione:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \notin Z(G)} |G : C_G(x)|.$$

Essa prende il nome di *Equazione delle Classi* di  $G$ .

**Proposizione 2.** *Sia  $G$  un gruppo finito di ordine  $p^n$ , dove  $p$  è un numero primo e  $n$  è un numero intero positivo. Allora il centro  $Z(G)$  di  $G$  non è il sottogruppo identico.*

*Dimostrazione.* Ovviamente, possiamo supporre che  $G$  non sia abeliano. Sia  $x$  un elemento non centrale di  $G$ . Allora, il centralizzante  $C_G(x)$  di  $x$  in  $G$  è un sottogruppo proprio di  $G$ ; ne segue che per il teorema di Lagrange  $p$  è un divisore dell'indice  $|G : C_G(x)|$ . Da ciò, utilizzando l'Equazione delle Classi di  $G$ , si ottiene che  $p$  è un divisore dell'ordine di  $Z(G)$ . In particolare,  $Z(G)$  non è identico.  $\square$

Il risultato precedente può essere utilizzato per descrivere i gruppi aventi ordine il quadrato di un numero primo. Prima di fare ciò, mostriamo che il gruppo quoziente di un gruppo non abeliano sul proprio centro è soggetto a delle restrizioni.

**Lemma 1.** *Sia  $G$  un gruppo non abeliano. Allora il gruppo quoziente  $G/Z(G)$  non è ciclico.*

*Dimostrazione.* Per assurdo, supponiamo che  $G/Z(G)$  sia ciclico, e sia  $xZ(G)$  un suo generatore. Se  $a$  e  $b$  sono elementi di  $G$ , allora esistono degli interi positivi  $m$  e  $n$  tali che  $aZ(G) = x^m Z(G)$  e  $bZ(G) = x^n Z(G)$ ; quindi  $a = x^m z_1$  e  $b = x^n z_2$ , dove  $z_1$  e  $z_2$  sono degli elementi centrali di  $G$ . Ne segue che  $ab = ba$  e, per l'arbitrarietà di  $a$  e di  $b$ , si ha che  $G$  è abeliano. Questa contraddizione prova l'asserto.  $\square$

**Corollario 1.** *Siano  $p$  un numero primo e  $G$  un gruppo di ordine  $p^2$ . Allora  $G$  è ciclico oppure si decompone nel prodotto diretto di due sottogruppi di ordine  $p$ .*

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 2 si ha che  $Z(G) \neq \{1\}$ , sicché  $G$  è abeliano per il Lemma 1. Supponiamo che  $G$  non sia ciclico, e siano  $x$  e  $y$  elementi di  $G \setminus \{1\}$  tali che  $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$ . Poiché  $x$  e  $y$  hanno periodo  $p$ , allora si ha subito che  $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$  e l'asserto è dimostrato.  $\square$

Sia  $G$  un gruppo. Denotiamo con  $AutG$  l'insieme di tutti gli automorfismi di  $G$ . Se  $\alpha, \beta \in AutG$ , allora la posizione

$$(\alpha\beta)(x) = \beta(\alpha(x)),$$

con  $x \in G$ , definisce un'operazione in  $AutG$ , rispetto alla quale esso è un gruppo, detto *automorfo* di  $G$ . Sia  $G$  un gruppo avente ordine un numero primo  $p$ . Allora  $G$  è ciclico e sia  $x$  un suo generatore. Poiché ogni potenza  $x^k$ , con  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ , è un generatore di  $G$  e un automorfismo di  $G$  trasforma generatori in generatori, deduciamo che  $|AutG| = p - 1$ . Osserviamo inoltre che se  $G$  è un gruppo, allora esso è abeliano se e solo se l'applicazione (detta *inversione* di  $G$ ) che ad ogni elemento di  $G$  associa il suo inverso è un automorfismo di  $G$ . Può accadere che un gruppo abeliano, anche infinito, abbia come automorfismi soltanto l'identità e l'inversione (cfr. [3, 4.4.2]). Il prossimo risultato fornisce delle informazioni sull'automorfo di un gruppo avente ordine il quadrato di un numero primo.

**Proposizione 3.** *Siano  $p$  un numero primo e  $G$  un gruppo di ordine  $p^2$ . Allora  $|AutG| = p^2 - p$  oppure  $|AutG| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$ .*

*Dimostrazione.* Per il Corollario 1, il gruppo  $G$  è ciclico oppure si decompone nel prodotto diretto di due sottogruppi di ordine  $p$ . Nel primo caso, se  $x$  è un generatore di  $G$ , allora gli automorfismi di  $G$  sono tutte e sole le applicazioni  $x \mapsto x^k$ , con  $k$  intero positivo minore di  $p^2$  e primo con  $p$ . Pertanto  $|AutG| = p^2 - p$ . Nel secondo caso, possiamo riguardare  $G$  come spazio vettoriale di dimensione 2 sul campo  $\mathbb{Z}_p$  con  $p$  elementi. Allora gli automorfismi di  $G$  sono in corrispondenza biunivoca con le  $\mathbb{Z}_p$ -basi ordinate di  $G$ . D'altra parte, nel definire una base possiamo scegliere ovviamente il primo elemento in  $p^2 - 1$  modi diversi, mentre il secondo in  $p^2 - p$  modi diversi. Pertanto vi sono  $(p^2 - 1)(p^2 - p)$  basi ordinate, da cui l'asserto.  $\square$

Nell'ultimo risultato osserviamo che se  $p = 2$  e  $G$  non è ciclico, allora  $G$  è isomorfo al gruppo di Klein  $V_4$ , mentre  $AutG$  è isomorfo al gruppo simmetrico  $S_3$ . D'altra parte, poiché l'automorfo di  $S_3$  è isomorfo a  $S_3$  medesimo, abbiamo che gruppi non isomorfi possono avere automorfi isomorfi.

Sia  $G$  un gruppo non abeliano. Allora è possibile definire un automorfismo non identico di  $G$  a partire da ogni elemento non centrale  $g \in G$ . A tale scopo, si consideri l'applicazione

$$\bar{g} : x \in G \mapsto g^{-1}xg \in G.$$

Si vede subito che  $\bar{g} \in AutG$ . L'automorfismo  $\bar{g}$  viene detto *automorfismo interno* di  $G$  determinato dall'elemento  $g$ . Possiamo poi definire l'applicazione

$$f : g \in G \mapsto \bar{g} \in AutG.$$

Poiché  $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ , comunque si considerino degli elementi  $x, y \in G$ , allora  $f$  è un omomorfismo fra i gruppi  $G$  e  $AutG$ . Inoltre, un elemento  $g$  di  $G$  appartiene al nucleo  $ker f$  di  $f$  se e solo se l'automorfismo interno  $\bar{g}$  determinato da  $g$  è l'applicazione identica di  $G$ . Ne segue che  $ker f = Z(G)$  e, quindi, per il teorema di isomorfismo (cfr. [4, 4.29]) il gruppo quoziente  $G/Z(G)$  è isomorfo al sottogruppo  $InnG$  di  $AutG$  costituito da tutti gli automorfismi interni di  $G$ . Il sottogruppo  $InnG$  si dice *automorfo interno* di  $G$ .

La situazione appena descritta può essere generalizzata. A tale scopo, ricordiamo che se  $H$  è un sottogruppo di un gruppo  $G$ , si dice *centralizzante* di  $H$  in  $G$ , e si denota col simbolo  $C_G(H)$ , il sottogruppo

$$C_G(H) = \bigcap_{x \in G} C_G(x).$$

Ovviamente,  $C_G(G) = Z(G)$ .

**Proposizione 4.** (Teorema N/C) *Sia  $H$  un sottogruppo normale di un gruppo  $G$ . Allora il gruppo quoziente  $G/C_G(H)$  è isomorfo a un sottogruppo di  $\text{Aut}(H)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $g$  un elemento di  $G$ . Poiché  $H$  è normale in  $G$ , allora la restrizione  $\bar{g}|_H$  a  $H$  dell'automorfismo interno  $\bar{g}$  determinato da  $g$  è un automorfismo di  $H$ . Possiamo allora considerare l'applicazione

$$f : g \in G \mapsto \bar{g}|_H \in \text{Aut}H.$$

Si vede facilmente che  $f$  è un omomorfismo fra i gruppi  $G$  e  $\text{Aut}H$  il cui nucleo è  $C_G(H)$ . L'asserto segue allora dal teorema di isomorfismo.  $\square$

## Gruppi di ordine 2023

Prima di enunciare e dimostrare il risultato principale dell'articolo, abbiamo bisogno di studiare delle condizioni affinché un gruppo avente ordine il prodotto di due primi (distinti) sia ciclico.

**Lemma 2.** *Sia  $G$  un gruppo finito, e siano  $H$  e  $K$  sottogruppi normali ciclici di  $G$  aventi ordini coprimi. Se  $G = H \times K$  è prodotto diretto di  $H$  e  $K$ , allora  $G$  è ciclico. In particolare, se  $G$  è un gruppo abeliano finito di ordine  $pq$ , con  $p$  e  $q$  numeri primi distinti, allora  $G$  è ciclico.*

*Dimostrazione.* Siano  $x$  e  $y$  dei generatori, rispettivamente, di  $H$  e di  $K$ , e siano  $m$  l'ordine di  $H$  e  $n$  l'ordine di  $K$ . Allora  $(xy)^m = x^m y^m = y^m$  e  $(xy)^n = x^n y^n = x^n$ , e quindi  $x^n, y^m \in \langle xy \rangle$ . D'altra parte, poiché  $m$  e  $n$  sono coprimi, si ha che  $\langle x^n \rangle = \langle x \rangle$  e  $\langle y^m \rangle = \langle y \rangle$ , sicché  $G = \langle xy \rangle$  è ciclico.

Supponiamo che  $G$  sia abeliano e abbia ordine  $pq$ , con  $p$  e  $q$  numeri primi distinti. Ovviamente si può supporre che  $G$  possieda un elemento  $x$  di periodo  $p$ . Sia  $y$  un elemento di  $G \setminus \langle x \rangle$ . Se  $x$  appartiene a  $\langle y \rangle$ , allora  $\langle x \rangle < \langle y \rangle$  sicché  $G = \langle y \rangle$  è ciclico. Se invece  $x$  non appartiene a  $\langle y \rangle$ , allora  $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$  e  $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$  è ciclico per la prima parte della dimostrazione.  $\square$

**Lemma 3.** *Sia  $G$  un gruppo finito di ordine  $pq$ , con  $p$  e  $q$  numeri primi distinti. Se  $p < q$  e  $p$  non è un divisore di  $q - 1$ , allora  $G$  è ciclico.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $G$  non sia abeliano. Allora per il Lemma 1 risulta che  $Z(G) = \{1\}$ , e quindi l'Equazione delle Classi di  $G$  assume la forma seguente:

$$|G| = 1 + \sum_{x \notin Z(G)} |G : C_G(x)|.$$

Ne segue che  $G$  contiene un elemento  $x$  di periodo  $q$ . Se esistesse un altro elemento  $y \in G$  di periodo  $q$  tale che  $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$ , allora ([4, Esercizio 79]) in  $G$  vi sarebbero  $q^2 = |\langle x \rangle \langle y \rangle|$  elementi, il che sarebbe una contraddizione. Dunque  $H = \langle x \rangle$  è l'unico sottogruppo di ordine  $q$  di  $G$ , e pertanto è normale. Ovviamente,  $H = C_G(H)$ , sicché per la Proposizione 4 si ha che  $|G/H| = p$  deve essere un divisore di  $|Aut H| = q - 1$ . Quest'ultima contraddizione prova che  $G$  è abeliano. L'asserto segue allora dal Lemma 2.  $\square$

Osserviamo che il Lemma 3 è un caso particolare del teorema di Burnside citato nell'introduzione.

**Teorema 1.** *Sia  $G$  un gruppo finito di ordine  $pq^2$ , dove  $p$  e  $q$  sono numeri primi tali che  $p < q$  e  $p$  non divide  $q^2 - 1$ . Allora  $G$  è ciclico oppure è isomorfo al prodotto diretto  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ . In particolare,  $G$  è abeliano.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $G$  non sia abeliano. Allora per il Lemma 1 il gruppo quoziente  $G/Z(G)$  non è ciclico, e quindi per il Lemma 3 il centro  $Z(G)$  di  $G$  può avere ordine 1 oppure  $p$ . Di conseguenza, utilizzando l'Equazione delle Classi

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \notin Z(G)} |G : C_G(x)|,$$

si ha che esiste un elemento  $\bar{x} \in G \setminus Z(G)$  tale che  $q$  non divide l'indice  $|G : C_G(\bar{x})|$ . Poniamo  $H = C_G(\bar{x})$ . Ovviamente  $H$  è un sottogruppo proprio di  $G$  e ha ordine  $q^2$ . Se esiste un elemento  $g \in G$  tale che il sottogruppo  $H^g$  di  $G$  non coincide con  $H$ , allora risulta  $|HH^g| = \frac{q^4}{|H \cap H^g|}$  ([4, Esercizio 79]). Ne segue che  $|HH^g| \in \{q^4, q^3\}$  che è una contraddizione. Dunque,  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$ . Inoltre, poiché  $\bar{x} \in H$ , si ha che il centralizzatore  $C_G(H)$  di  $H$  in  $G$  è contenuto in  $H$  e quindi  $H = C_G(H)$ , essendo  $H$  abeliano per il Corollario 1. Allora la Proposizione 4 assicura che il gruppo quoziente  $G/H$  è isomorfo ad un sottogruppo dell'automorfo  $Aut H$  di  $H$ , e conseguentemente, si ha che  $p$  è un divisore di  $q+1$  oppure di  $q-1$  per la Proposizione 3. Quest'ultima contraddizione prova che  $G$  è abeliano.

Se ogni elemento non identico di  $G$  avesse periodo  $p$  (rispettivamente,  $q$ ), allora  $G$  conterrebbe un sottogruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$  (rispettivamente, a  $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ ), in contrasto col teorema di Lagrange. Pertanto, esistono degli elementi  $x$  e  $y$  di  $G$  aventi periodo, rispettivamente,  $p$  e  $q$ . Inoltre, possiamo supporre che  $G$  sia privo di elementi di periodo  $q^2$ . Infatti, se  $G$  contiene un elemento  $z$  di periodo  $q^2$ , allora  $G = \langle x, z \rangle = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$  è ciclico per il Lemma 2. Poniamo  $A = \langle x, y \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ , e sia  $g$  un elemento di  $G \setminus A$ . Allora  $g$  ha periodo  $p$  oppure  $q$ , e quindi  $\langle A, g \rangle = A \times \langle g \rangle$ . Ne segue che  $g$  ha periodo  $q$  e  $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle g \rangle$  ha la struttura richiesta.  $\square$

Poiché  $2023 = 7 \times 17^2$  e 7 non divide né 16, né 18, allora dal Teorema 1 segue immediatamente la seguente caratterizzazione dei gruppi di ordine 2023.

**Corollario 2.** *Sia  $G$  un gruppo di ordine 2023. Allora  $G$  è ciclico oppure è isomorfo al prodotto diretto  $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{17}$ . In particolare,  $G$  è abeliano.*

Osserviamo che per il Lemma 2 un gruppo non ciclico di ordine 2023 è anche isomorfo al prodotto diretto  $\mathbb{Z}_{119} \times \mathbb{Z}_{17}$ .

Naturalmente, i risultati ottenuti potevano essere dimostrati più rapidamente utilizzando, ad esempio, il *teorema di Sylow* (cfr. [4, 4.44]), ma per la natura divulgativa dell'articolo abbiamo preferito un approccio che fosse il più possibile elementare.

## Bibliografia

- [1] L. E. DICKSON: Definitions of a group and a field by independent postulates, Trans. Math. Soc. 6 (1905), 198-204.
- [2] S. FRANCIOSI, F. DE GIOVANNI: Elementi di Algebra, Aracne, Roma, 1995.
- [3] D. J. S. ROBINSON: A Course in the Theory of Groups, Springer, New York, 1996.
- [4] A. RUSSO: Numeri, Gruppi, Polinomi, Aracne, Roma, 2013.
- [5] A. RUSSO, F. ZULLO: Rappresentazioni di Gruppi, Aracne, Roma, 2017.



## **Istruzioni per gli autori**

Il *Periodico di Matematiche* pubblica articoli di Matematica e di Fisica che abbiano carattere scientifico, storico e didattico, previa valutazione di contenuti ed originalità. Ciascun lavoro presentato è giudicato da esperti anonimi che riferiscono al Direttore, cui compete il giudizio finale.

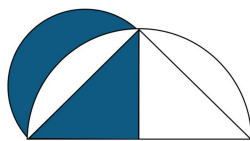
### **Copyright**

Gli autori possono corredare il corpo del testo con immagini in formato .jpeg .jpg con una risoluzione minima di 300 dpi. Ad ogni immagine va associata un'apposita didascalia. Per ogni immagine che non sia di autoproduzione va indicata la fonte, con un eventuale URL. Qualora l'immagine sia di proprietà degli autori sarebbe opportuno indicare il software con il quale la si è realizzata.

### **Invio dei lavori**

Gli articoli vanno inviati, in formato pdf, a mezzo posta elettronica al Direttore o ad uno dei componenti del Comitato di Redazione del *Periodico di Matematiche*.





**Mathesis**

**Presidente**

**Francesco de Giovanni**

E' presidente dal 4 febbraio 2021, ventiquattresimo dal 1895, anno della fondazione.

**presidente@mathesisnazionale.it**

**Consiglio Nazionale**

Vincenzo Iorfida *vice presidente*, Alessio Russo *segretario*, Roberto Franzina *tesoriere*, Serenella Iacino, Giulio Maletta, Susi Osti, Marcello Pedone, Annalisa Santini, Francesco Sicolo, Pasqualina Ventrone.

**Sezioni**

Abruzzo – Avellino – Bari – Brescia – Caserta – Castellamare di Stabia – Catania – Crotone – Ferrara – Firenze – Grottaglie – Lanciano Ortona – Latina – Lecce – Mantova – Messina – Milano – Mondragone – Napoli – Napoli Flegrea – Olbia – Roma – Rovigo – Salerno – Serra San Bruno – Spoleto – Terni – Udine – Varese – Venezia – Verona – Vicenza.

**Rivista**

***Periodico di Matematiche***

Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 "di Matematiche". La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell'Editore Zanichelli.

**Sito web**

[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it)



L'illustrazione in copertina è dell'artista partenopeo **Claudio D'Avascio**, che ha iniziato la sua carriera come fumettista, diventando poi animatore, artista 3d ed infine regista cinematografico. Nel settore dell'animazione ha realizzato diversi videoclip musicali per noti artisti italiani e stranieri. Ha ottenuto numerosi premi per la sua attività nel settore video-cinematografico, caratterizzata da uno stile a forte contaminazione grafica. Nel 2017 ha realizzato il suo primo lungometraggio, *// manutentore*.

## MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

c/o Dipartimento di Matematica e Fisica  
Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"  
Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)  
[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it) • [info@mathesisnazionale.it](mailto:info@mathesisnazionale.it)